Les Espaces Vectoriels Normés

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

9 septembre 2024

Au cours de l'année nous serons amenés à étudier des :

- Suites ou séries de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E :

  $\rightarrow$ matrices : $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} A_n$,

  $\rightarrow$ fonctions : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} f_n$ ...

- Fonctions d'un $\mathbb{K}$-ev E vers un autre $\mathbb{K}$-ev F :

  $\rightarrow$ $\varphi : \mathbb{K}_n[X] \rightarrow \mathbb{K}^{n+1}$

  $\rightarrow$ $\varphi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ ...

Pour ces nouveaux objets, nous aurons besoin de définir les notions de *bornitude*, *convergence*, de *limite*, de *continuité*... etc... Pour cela, nous avons besoin d'introduire une notion de *proximité entre deux vecteurs*. Ce sera possible en munissant les espaces vectoriels d'une *norme* : nos espaces sont alors appelés des *espaces vectoriels normés.*

Table des matières

1 Normes sur un $\mathbb{K}$-EV **2**

2 Espaces Vectoriels Normés usuels **10**

3 Comparaison des Normes **16**

4 Application 1 : Suites dans un EVN **22**

5 Application 2 : Séries d'éléments d'un EVN **28**

6 Musculation **30**

Remarque : Les notions de $\left\{\begin{array}{l}\textit{limite}\\ \textit{continuité}\\ \textit{différentiabilité}\end{array}\right.$ *d'une fonction vectorielle feront l'objet de chapitres ultérieurs.*

1 Normes sur un $\mathbb{K}$-EV

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

1. Définition / Propositions

DÉFINITION : **Norme sur E**

Une *norme* sur E est une application $N : E \to \mathbb{R}$ telle que :

• Positivité :	$\forall x \in E,$	$N(x) \geq 0$
• Séparation :	$\forall x \in E,$	$N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$
• Homogénéïté :	$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$	$N(\lambda x) = \lvert\lambda\rvert N(x)$
• Inégalité triangulaire :	$\forall x, y \in E,$	$N(x+y) \leq N(x) + N(y)$

$(E,\ N)$ est alors appelé un *Espace Vectoriel Normé* (EVN).

Notations usuelles : N, $|.|$ ou encore $\|.\|$

Méthode Générale : Pour montrer qu'une application N est une norme sur E

On utilise la définition de la norme en montrant :

- que $N : E \to \mathbb{R}^+$.
- que N vérifie $\begin{cases} \text{la séparation} \\ \text{l'homogénéïté} \\ \text{l'inégalité triangulaire} \end{cases}$

Exemples de normes connues :

- Valeur absolue sur $\mathbb{R}$ / Module sur $\mathbb{C}$
- Norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^2$
- Norme euclidienne associée à un produit scalaire $\langle .,. \rangle$: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$
- Si N est une norme alors $\alpha.N$ est une norme lorsque $\alpha > 0$.

Méthode : Pour montrer qu'une application N n'est pas une norme

On montre que l'une des 4 propriétés de définition n'est pas vérifiée.
Le plus souvent, on montrera que la séparation n'est pas vérifiée en recherchant un vecteur x non nul tel que $N(x) = 0$.

Exemples d'applications qui ne sont pas des normes :

1. Montrer que l'application N définie par $N(x,y) = |x+3y|$ n'est pas une norme sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que l'application N définie par $N(x,y) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\, \mathrm{d}t$ n'est pas une norme sur $\mathcal{C}_m([0,1]\mathbb{R})$.

PROPOSITION :

- $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$ ($\Rightarrow$ est utile pour prouver la nullité d'un vecteur)
- $\|-x\| = \|x\|$
- Les 2 inégalités triangulaires : $|\ \|x\| - \|y\|\ | \leq \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
- L'inégalité triangulaire généralisée : $\|x_1 + \cdots + x_n\| \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|$

Définitions :

- Lorsque $\|x\| = 1$, on dit que x est un *vecteur unitaire* pour la norme $\|.\|$
- *Normer* un vecteur $x \neq 0$ pour une norme $\|.\|$, c'est introduire $y = \frac{x}{\|x\|}$ qui est de norme 1.

PROPOSITION : Une norme euclidienne est une norme.

Preuve : Facile à condition de penser à utiliser Cauchy-Schwarz pour l'inégalité triangulaire.

Remarques :

- Un espace préhilbertien possède donc naturellement la structure d'evn.
- La structure d'evn est plus pauvre que la structure d'espace préhilbertien car une norme non euclidienne ne permet pas de définir la notion d'orthogonalité.
- Nous verrons plus loin que tout ev de dimension fini peut devenir un evn.

Méthodes : Pour montrer qu'une application N est une norme sur E, on peut :

Prendre le risque de montrer que la norme est euclidienne.

On montre que N est de la forme $N(x) = \sqrt{\varphi(x,x)}$ avec φ un produit scalaire sur E.
Dans ce cas, comme dans l'exemple suivant, φ se trouve souvent de façon intuitive.

Exercice : 1

($*$) Montrer que N définie par $N(f) = \sqrt{f^2(0) + \int_0^1 f'^2(t)\ \mathrm{d}t}$ est une norme sur $E = \mathcal{C}^1([0,\ 1],\ \mathbb{R})$.

Méthode : Pour montrer qu'une norme N n'est pas une norme euclidienne

On procède par l'absurde en supposant que N est euclidienne.

- Dans ce cas, N vérifie l'égalité de polarisation

$$N(x+y)^2 + N(x-y)^2 = 2(N(x)^2 + N(y)^2) \quad \text{pour tout } x,\ y \in E$$

- On recherche alors un couple $(x,\ y)$ pour lequel cette égalité est fausse.

Exemple : Montrer que $\|.\|_\infty : (x,y) \mapsto \max(|x|, |y|)$ n'est pas une norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Proposition : Norme Induite

Lorsque $\left\{\begin{array}{l} \|.\| \text{ est une norme sur } E \\ F \text{ est un sev de } E \end{array}\right.$, la restriction de $\|.\|$ à F est une norme sur F appelée *norme induite.*

Preuve : Immédiat !

2. Les normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$: $(\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ u } \mathbb{C})$

Sur $\mathbb{K}^n$, on utilise habituellement l'une des 3 normes suivantes :

- $\|(x_1,\ \ldots,\ x_n)\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ (Norme 1)
- $\|(x_1,\ \ldots,\ x_n)\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$ (Norme euclidienne lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
- $\|(x_1,\ \ldots,\ x_n)\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} |x_k|$ (Norme infinie)

Preuve : On montre facilement que ce sont des normes.
Seule l'inégalité triangulaire de $\|.\|_2$ pose problème :

- cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: on montre que c'est une norme euclidienne.
- cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: HP

Exemple : Calculer les normes usuelles de $x = (-1, 2i, -3)$.

Remarque : La Norme "p" (Vue en exercice !)

La *norme p* est définie sur $\mathbb{K}^n$ par :

$$\|(x_1,\ \ldots,\ x_n)\|_p = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$$

On vérifie avec le théorème des gendarmes que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$, on a : $\|x\|_p \xrightarrow[p\to+\infty]{} \|x\|_\infty$.

On dit alors que la suite de normes $(\|.\|_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ *converge simplement* sur E vers $\|.\|_\infty$.

3. Distance associée à une norme :

Grâce à la notion de distance, une norme permet d'évaluer la proximité entre deux vecteurs d'un même EVN. C'est grâce à elle que l'on pourra définir par la suite les notions de convergence, de limite, de continuité... dans un EVN.

Définition : **Distance associée à une norme**

La distance associée à la norme $\|.\|$ est l'application d définie sur E^2 par :

$$d(x,\ y) = \|x - y\|$$

On visualise mieux la notion de distance en se représentant les vecteurs x, y comme des points, c'est à dire en considérant E comme un espace affine.

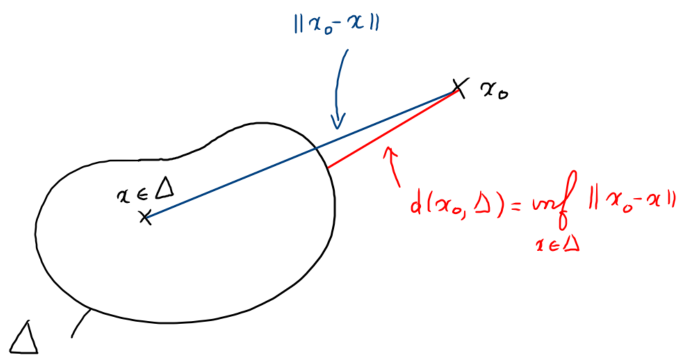
Proposition : **Propriétés d'une distance**

- $d(x,\ y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$ (séparation)
- $d(x, y) = d(y, x)$ (symétrie)
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (inégalité triangulaire)
- $d(x + z, y + z) = d(x, y)$ (invariance par translation)

Preuve : Pas de difficulté...

Définition : On définit la distance d'un vecteur x_0 à une partie Δ non vide de E par :

$$d(x_0, \Delta) = \inf\{\|x_0 - x\| \mid x \in \Delta\}$$



Preuve : Vérification de l'existence de $d(x_0, \Delta)$.

4. Boules :

Pour définir un voisinage (notion topologique vue plus tard) d'un vecteur, on utilise en général la notion de *boule*.

Définition : **Boules ouverte, fermée, sphère**

Soit $a \in E$ (le centre) et $r > 0$ (le rayon) :

- $\mathcal{B}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| < r\}$ Boule ouverte de centre a et de rayon r
- $\mathcal{B}_f(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| \leq r\}$ Boule fermée de centre a et de rayon r
- $\mathcal{S}(a, r) = \{x \in E \mid \|x - a\| = r\}$ Sphère de centre a et de rayon r

Si $r = 1$ on parle de *boule ou des sphère unitée.*

Exemples :

- Dans $(\mathbb{R}, |.|)$, $(\mathbb{C},\ |.|)$:

$(\mathbb{R}, |.|)$	$(\mathbb{C},\ |.|)$

- Les 3 boules unités pour les 3 normes usuelles de $\mathbb{R}^2$.

Boule unité dans $(\mathbb{R}^2,\ \|.\|_1)$	Boule unité dans $(\mathbb{R}^2,\ \|.\|_2)$	Boule unité dans $(\mathbb{R}^2,\ \|.\|_\infty)$

Partie convexe d'un espace affine $\mathcal{E}$

- Segment $[a, b]$ d'un espace affine : Lorsque $a,\ b \in \mathcal{E}$, on appelle « segment $[a, b]$ » l'ensemble :

$$[a, b] = \{\lambda a + (1 - \lambda)b \mid \lambda \in [0,\ 1]\}$$

- Partie convexe d'un espace affine : On dit que $A \in \mathcal{E}$ est une partie convexe lorsque :

$$\forall a, b \in A,\ [a, b] \subset A$$

Segment $[a, b]$	Partie convexe	Partie non convexe

Proposition :

- Les boules se déduisent toutes à partir de la boule unitée : $\mathcal{B}(a, r) = a + r\mathcal{B}(0, 1)$.
- Les boules sont des parties convexes.

$\mathcal{B}(a,r) = a + r\mathcal{B}(0,1)$	Une boule est une partie convexe

5. Parties, fonctions et suites bornées : Dans l'evn $(E,\ \|.\|)$

Une norme permet de définir la notion de *bornitude* d'une partie.

Définition : Partie bornée d'un EVN

On dit qu'une partie $X \subset E$ est bornée lorsqu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in X, \quad \|x\| \leq M$$

⚠ *Le majorant M est indépendant de x.*

Cela revient à dire que la partie est contenue dans une boule de centre 0 *et de rayon M.*

Méthode Générale : Pour montrer qu'une partie A est bornée

On montre qu'il existe un $M \geq 0$ tel que $\forall x \in X, \quad \|x\| \leq M$.
Pour cela, on recherche M en écrivant :

- Soit $x \in A$.
- Majorons : $\|x\| \leq \cdots \leq \cdots \leq M$

Exemples :

- Les boules sont des parties bornées.
- $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \|.\|_2)$ où $\|A\|_2 = \sqrt{\mathrm{Tr}(A^T A)}$
- Les sev (non réduits à $\{0\}$) ne sont pas des parties bornées.

Les boules sont bornées	$\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est borné	Les sev ne sont pas bornés

Cas où $A \subset \mathbb{R}$

Pour les parties A de $\mathbb{R}$ il existe une autre définition possible :

$$A \text{ bornée} \iff \exists\, m, M \in \mathbb{R},\ \forall x \in A,\ m \leq x \leq M$$

Dans cette définition, les réels m et M ne doivent pas dépendre de x.

DÉFINITION : **Fonction bornée à valeurs dans un EVN E**

Une fonction $f : X \to E$ est dite *bornée* lorsque $\operatorname{Im} f = \{f(x) \mid x \in X\}$ est bornée.
C'est à dire lorsqu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall x \in X,\ \|f(x)\| \leq M$$ ⚠ avec M indépendant de x

<u>Méthode</u> : Pour montrer qu'une fonction $f : X \to E$ est bornée

- <u>Méthode 1</u> : Soit $x \in X$, majorons :

$$\|f(x)\| \leq \cdots \leq M$$ ⚠ avec M indépendant de x

- <u>Méthode 2</u> : A l'aide d'un tableau de variation pour les fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Le choix de la méthode dépend du niveau de précision attendu pour le majorant M.

<u>Exemple</u> : La fonction $x \mapsto x(1-x)$ est bornée sur $[0, 1]$.

Méthode 1 (grossière)	Méthode 2 (précise)

DÉFINITION : **Suite bornée (de vecteurs)**

On dit qu'une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est bornée lorsque que $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est borné.
C'est à dire lorsqu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \|x_n\| \leq M$$ ⚠ avec M indépendant de n

Cela signifie que tous les éléments de la suite sont contenus dans une boule.

<u>Méthode Générale</u> : Pour montrer qu'une suite (x_n) est bornée

On montre qu'il existe un $M \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\quad \|x_n\| \leq M$.
Pour cela, on recherche M en écrivant :

- Soit $n \in \mathbb{N}$.
- Majorons : $\|x_n\| \leq \cdots \leq \cdots \leq M$

Exemple : La suite $\left((\cos(n), \frac{1}{n+1})\right)_{n\geq 0}$ est bornée dans l'evn $(\mathbb{R}^2, \|.\|_1)$.

Remarques :

- L'ensemble $\mathcal{B}(X,\ E)$ des fonctions bornées est un sev de $\mathcal{F}(X, E)$.
- L'ensemble $\mathcal{B}(\mathbb{N},\ E)$ des suites bornées est un sev de $\mathcal{E}^{\mathbb{N}}$.

Preuve :

On retiendra qu'une combinaison linéaire de fonctions/suites bornées est une fonction/suite bornée.

Rappel : Prouver que F est un sev de E

- Méthode 1 : Avec la caractérisation des sev : $\begin{cases} F \subset E \\ 0_E \in F \\ F \text{ stable par Combinaison Linéaire} \end{cases}$
- Méthode 2 : Avec la mise sous forme de « Vect(...) » :

$$x \in F \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow x \in \mathrm{Vect}(\dots)$$

Cette deuxième méthode présente l'avantage de fournir une famille génératrice (et souvent une base) de F. Ce qui permet d'en déduire sa dimension.

Exemple : Montrer que $F = \{x \mapsto A\cos(x+\varphi) \mid A,\ \varphi \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$).

2 Espaces Vectoriels Normés usuels

Il est important de connaître les normes habituellement utilisées dans les espaces vectoriels les plus souvent rencontrés. En particulier dans :

- $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ (VU !)
- $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ (VU !)
- E de dim finie ($\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{R}_n[X]$...)
- $\mathcal{B}(X,\ E)$, Suites bornées, ...
- $\mathcal{C}([a,\ b],\ E)$
- Produits d'espaces vectoriels

1. Norme sur un EV de dimension finie

Idée : Lorsque $\dim E < +\infty$, on peut obtenir une norme sur E en choisissant $\begin{cases} \text{une base } e \\ \text{une norme de } \mathbb{K}^n \end{cases}$.

THÉORÈME : **Norme sur un ev de dimension finie**

Tout $\mathbb{K}$-ev E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ peut être muni d'une norme.

Pour cela, il suffit de :

- choisir une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E
- choisir une norme $\|.\|_{\mathbb{K}^n}$ sur $\mathbb{K}^n$ (en général on choisit $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ ou $\|.\|_\infty$)

La norme N est alors définie par :

$$\forall x \in E,\ N(x) = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_{\mathbb{K}^n} \quad \text{où} \quad x = (x_1, \ldots, x_n)_e$$

Preuve : On vérifie facilement que N est bien une norme sur E.

Notation : Selon $\begin{cases} \text{la norme sur } \mathbb{K}^n \\ \text{la base } e \end{cases}$ choisies, on pourra noter cette norme $\|.\|_{1,e}$ ou $\|.\|_{2,e}$ ou $\|.\|_{\infty,e}$.

Exemples :

- Les normes usuelles sur $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ lorsqu'on prend e la base canonique

En choisissant $\|.\|_1$	En choisissant $\|.\|_2$	En choisissant $\|.\|_\infty$

- Les normes usuelles sur $\mathbb{K}_n[X]$ lorsqu'on prend pour e :

$\rightarrow$ $\boxed{\text{la base canonique}}$: $e = (1, X, \ldots, X^n)$

$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

En choisissant $\|.\|_1$	En choisissant $\|.\|_2$	En choisissant $\|.\|_\infty$

→ $\boxed{\text{la base de Lagrange}}$: $e = (L_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ où $L_k = \dfrac{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(X-x_i)}{\prod_{\substack{i=0\\i\neq k}}^{n}(x_k-x_i)}$ et $x_1, \ \dots, \ x_n$ sont 2 à 2 distincts.

$$P = \sum_{k=0}^{n} P(x_k)L_k$$

En choisissant $\|.\|_1$	En choisissant $\|.\|_2$	En choisissant $\|.\|_\infty$

→ $\boxed{\text{la base de Taylor}}$: $e = \left((X-a)^k\right)_{k\in[\![0,n]\!]}$ où $a \in \mathbb{K}$.

$$P = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k$$

En choisissant $\|.\|_1$	En choisissant $\|.\|_2$	En choisissant $\|.\|_\infty$

2. Norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{B}(X,E)$: où $\begin{cases} X \text{ est une partie d'un ev } F \\ (E, \|.\|) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-evn} \end{cases}$

Méthode : Encadrement de $\sup \Delta$

Commençons par rappeler que $\sup \Delta$ est le plus petit des majorants de Δ.

- Pour prouver que $\sup \Delta \leq M$:
  → On montre que pour tout $x \in \Delta$, on a $x \leq M$
  → On obtient alors directement $\sup \Delta \leq M$ ("Passage à la borne Sup")

- Pour prouver que $m \leq \sup \Delta$:
  M 1 : Si $m \in \Delta$ alors on a immédiatement $m \leq \sup \Delta$.
  M 2 : Si $m \notin \Delta$, on propose une suite $(a_n) \in \Delta^{\mathbb{N}}$ telle que $a_n \to m$

Proposition : Lorsque $k \geq 0$ et A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée, on a :

$$\sup(kA) = k.\sup A$$

Preuve : Par double inégalité.

$\leq$ Par passage au sup dans l'inégalité $\forall a \in A, \ ka \leq k.\sup(A)$ on obtient $\sup(kA) \leq k.\sup(A)$.

$\geq$ De plus, pour $k > 0$, on a $\sup(A) = \sup(\frac{1}{k}.k.A) \leq \frac{1}{k}\sup(k.A)$ et donc $k.\sup(A) \leq \sup(kA)$.

Définition : **Norme infinie sur un espace de fonctions bornées**

Soit $(E,\ \|.\|)$ un evn.
Sur l'ev $\mathcal{B}(X,E)$, on définit la norme $\|.\|_\infty$ définie par : $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| \mid x \in X\}$.

Notation usuelle : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in X}\|f(x)\|$.

Preuve : On vérifie facilement l'existence de la fonction $\|.\|_\infty$ et le fait que c'est bien une norme.

Vocabulaire :

- Cette norme est appelée *Norme uniforme, norme sup ou norme infinie sur* $\mathcal{B}(X,E)$
- Lorsque $(f_n) \to f$ pour $\|.\|_\infty$, on dit que la convergence de la suite (f_n) est *uniforme.*

Exercice : 2

$(*)$ Montrer que pour tout $f,\ g \in \mathcal{B}(X,\ \mathbb{K})$, on a $\|f.g\|_\infty \leq \|f\|_\infty\|g\|_\infty$.

Une norme qui vérifie une telle propriété est appelée une "norme sous-multiplicative".

Proposition : **Cas de l'ev des suites bornées**

La norme infinie définit également une norme sur l'ev des suites bornées de $(E,\ \|.\|)$:

$$\|(u_n)\|_\infty = \sup\{\|u_n\| \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Notation usuelle : $\|(u_n)\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}}\|u_n\|$.

Exemple : L'ensemble des suites convergentes vers 0 *étant un sev de l'ensemble des suites bornées, on peut également munir ce sev de la norme induite par la norme infinie.*

Exercice : 3

$(\heartsuit)$ **Norme subordonnée**.

Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et S la sphére unité de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Montrer que l'application $|||.||| : A \mapsto \sup\limits_{X\in S}\|AX\|$ est définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et est une norme.

3. Les normes usuelles sur : $E = \mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{K})$

D'après le Théorème des Bornes Atteintes, les fonctions de $\mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{K})$ sont bornées.
On peut donc munir $\mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{K})$ des trois normes suivantes :

Définition : **Les 3 normes usuelles sur** $\mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{K})$

- $\|f\|_1 = \displaystyle\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ (appelée norme 1)
- $\|f\|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_a^b |f(t)|^2\ \mathrm{d}t}$ (appelée norme 2 ou "norme euclidienne" lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
- $\|f\|_\infty = \displaystyle\sup_{x\in[a,\ b]} |f(x)|$ (appelée la norme infinie ou la norme uniforme)

Preuve : Résultat connu pour $\|.\|_\infty$ et $\|.\|_2$, et facile pour $\|.\|_1$.

Exercice : 4

$(*)$ Soit f une application continue sur $[0,\ 1]$ vérifiant pour tout $x \in [0,\ 1]$: $\dfrac{1}{4}f(\dfrac{x}{2}) + \dfrac{1}{4}f(\dfrac{1+x}{2}) = f(x)$.
Montrer que f est nulle.

Exercice : 5

$(\heartsuit)$ Soit l'espace vectoriel $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0,\ 1],\ \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$ et N définies sur E par :

$$N(f) = \|f + f'\|_\infty$$

Montrer que N est bien définie et est une norme sur E.

4. Produit d'EVN :

Pour devenir un EVN, un espace vectoriel produit sera muni d'une norme produit.

DÉFINITION : **Norme sur l'espace vectoriel produit** $(E_1,\ N_1) \times \cdots \times (E_m,\ N_m)$

$$N(x_1,\ \ldots,\ x_m) = \max_{k \in [\![1,m]\!]} N_k(x_k)$$

Vocabulaire : $\begin{cases} (E_1 \times \cdots \times E_m,\ N) \text{ est appelé l'} EVN \textit{ produit des ev } E_1,\ \ldots,\ E_n \\ N \text{ est appelée la } \textit{norme produit} \end{cases}$.

Preuve : Vérifier que N est bien une norme.

5. Normes d'algèbre :

Rappel : Notion de $\mathbb{K}$ algèbre

On dit que E est une $\mathbb{K}$-algèbre lorsque :

$$\begin{cases} (E, +, .) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-ev} \\ (E,\ +,\ \times) \text{ est un anneau} \end{cases} \quad \text{vérifiant} \quad \lambda.(x \times y) = (\lambda.x) \times y = x \times (\lambda.y)$$

En gros, une $\mathbb{K}$-algèbre est un $\mathbb{K}$-ev dans lequel il est possible de multiplier entre eux les vecteurs.

Exemples : $\begin{cases} \mathbb{R} \\ \mathbb{C} \\ \mathbb{K}^n \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathcal{B}(X,\ \mathbb{K}) \\ \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathbb{K}[X] \\ \mathcal{L}(E) \end{cases}$ sont des $\mathbb{K}$-algèbres usuelles.

DÉFINITION : **Norme d'algèbre**

Une norme d'algèbre sur la $\mathbb{K}$-algèbre E est une norme $\|.\|$ sur E vérifiant :

$$\begin{cases} \|x.y\| \leq \|x\|\|y\| \quad \text{(sous-multiplicativité)} \\ \|1_E\| = 1 \end{cases}$$

Une norme d'algèbre sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée une *norme matricielle.*
Une algèbre E munie d'une norme d'algèbre $\|.\|$ est alors appelée une *algèbre normée.*

Exemples de $\mathbb{K}$-algèbres normées :

- $|.|$ est une norme d'algèbre sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$
- $\|.\|_\infty$ est une norme d'algèbre sur $\mathbb{K}^n$ et sur $\mathcal{B}(X,\ \mathbb{K})$
- $\|.\|_{1,e}$ et $\|.\|_{2,e}$ sont des normes sous-multiplicatives de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. (où e est la base canonique)

Exercice : 6

(♡) Montrer que la norme euclidienne usuelle sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une norme sous-multiplicative.

Aide : Pensez à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Preuve :

Exercice : 7

$(*)$ Soit e la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\|AB\|_{\infty,e} \leq n\|A\|_{\infty,e}\|B\|_{\infty,e}$
2. Montrer que $\|.\|_{\infty,e}$ n'est pas une norme sous-multiplicative de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
3. Montrer que $\|A\| = n\|A\|_{\infty,e}$ est une norme sous-multiplicative de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve :

Remarque : Les normes d'algèbre sont souvent utilisées pour l'étude de convergence des séries vectorielles.

3 Comparaison des Normes

On décide parfois de munir un EVN d'une autre norme. Se pose alors la question de savoir si les notions dont la définition nécessite l'utilisation d'une norme (bornitude, convergence, limite, continuité...) sont conservées.
Nous allons voir que de façon générale qu'une telle propriété n'est pas nécessairement conservée, sauf lorsque :

- les deux normes sont *équivalentes*
- E est de dimension finie.

1. Domination :

Définition : **Domination**

Sur un evn E, on dit que "*N_1 est dominée par N_2*" lorsque :

$$\text{il existe } \alpha > 0 \text{ tel que : } \quad \forall x \in E,\ N_1(x) \leq \alpha N_2(x)$$

Cette notion de domination est analogue à celle notée $''O''$ pour les suites et les fonctions.

On dit également ici que "N_2 est plus fine que N_1".

Méthode : Pour prouver que N_2 domine N_1

Soit $x \in E$, majorons :

$$N_1(x) \leq \cdots \leq \alpha N_2(x) \qquad ⚠ \text{ avec } \alpha \text{ indépendant de } x$$

Exemples : ♡ Comparaison des normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$ ♡

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$	$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$	$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty$

On constate que sur $\mathbb{K}^n$, chacune des 3 normes usuelles est dominée par les deux autres.
Nous verrons que cette propriété se généralise à tout evn E de dimension finie.

Méthode : Pour prouver que N_2 ne domine pas N_1

On procède par l'absurbe et par intuition :

- On suppose donc qu'il existe α tel que $N_1 \leq \alpha N_2$.
- On propose alors une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \to +\infty$.
- On peut alors conclure...

Exemples : Comparaison des 3 normes usuelles de $\mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{K})$.

- $\|f\|_1$ est dominée par $\|f\|_\infty$ (facile)

$\|.\|_\infty$ n'est pas dominée par $\|.\|_1$ ⚠

Par l'absurde en prenant $f_n(t) = t^n$

- $\|f\|_1$ est dominée par $\|f\|_2$ (facile avec Cauchy-Schwarz)

$\|.\|_2$ n'est pas dominée par $\|.\|_1$ ⚠

Par l'absurde en prenant $f_n(t) = t^n$

- $\|f\|_2$ est dominée par $\|f\|_\infty$

$\|.\|_\infty$ n'est pas dominée par $\|.\|_2$ ⚠

Par l'absurde avec $f_n(t) = t^n$

En résumé

$\|.\|_1 << \|.\|_2 << \|.\|_\infty$ où le symbole « $<<$ » signifie ici « est dominé par »

Exercice : 8

(♡) Sur $\mathbb{R}[X]$, on définit les deux normes suivantes : $\forall P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, $\begin{cases} \|P\|_\infty = \max_{k\in\mathbb{N}} |a_k| \\ \|P\|_h = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{|a_k|}{k+1} \end{cases}$.

1. Montrer que $\|.\|_h$ n'est pas dominée par $\|.\|_\infty$.

On pourra considérer la suite $(X^n)_{n\geq 0}$

2. Montrer que $\|.\|_h$ n'est pas dominée par $\|.\|_\infty$.

On pourra considérer la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} X^k\right)_{n\geq 0}$

2. Normes équivalentes :

Définition : Normes équivalentes

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes lorsqu'elles sont dominées l'une par l'autre.
C'est à dire lorsqu'il existe deux constantes positives α et β telles que :

$$\forall x \in E, \quad \alpha N_1(x) \leq N_2(x) \leq \beta N_1(x)$$

Remarque : "...est équivalente à ..." définit une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes de E.

- Réflexivité :
- Symétrie :
- Transitivité :

Théorème Fondamental : Sur un EV de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes!!

Preuve : Non exigible...

Exemples :

- Nous avons vu en effet, que les 3 normes usuelles de $\mathbb{K}^n$ sont équivalentes.
- Toutes les normes sur $\mathbb{K}_n[X]$ sont équivalentes.
- Toutes les normes sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes.

⚠ *Nous avons vu que $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathcal{C}([a,\ b],\mathbb{K})$ NE sont PAS équivalentes.*

Exercice : 9

$(*)$ Soit N une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $N(AB) \leq cN(A)N(B)$.

Idée : On utilise le fait que N est équivalente à $\|.\|_2$ qui est sous-multiplicative

Exercice : 10

$(*)$ Montrer que sur $\mathcal{C}^1([0,\ 1], \mathbb{K})$ les deux normes suivantes sont équivalentes.

$$N_1(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty \quad \text{et} \quad N_2(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

Preuve :

- On a immédiatement $N_1(f) \leq N_2(f)$.
- On montre que $N_2(f) \leq 2N_1(f)$ en montrant que $\begin{cases} \|f\|_\infty \leq N_1(f) & \text{avec } f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t \\ \|f'\|_\infty \leq N_1(f) & \text{immédiat} \end{cases}$

Méthode : Pour montrer que deux normes N_1 et N_2 ne sont pas équivalentes

On procède par l'absurde et on recherche une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que : $\dfrac{N_1(x_n)}{N_2(x_n)} \to 0$ ou $+\infty$.

Exercice : 11

$(\heartsuit)$ Montrer que $\begin{cases} N_1 \\ N_2 \end{cases}$ définies sur $\mathcal{C}^1([0,1],\ \mathbb{R})$ par $\begin{cases} N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{d}t \\ N_2(f) = |f(0)| + \int_0^1 |f'(t)|\,\mathrm{d}t \end{cases}$ ne sont pas équivalentes.

3. Encadrement des boules :

Lorsque deux normes sont équivalentes, toute boule de centre a pour l'une est contenue et contient une boule de centre a pour l'autre.

Preuve : On se ramène à des boules de centre 0 pour simplifier le problème : $\mathcal{B}(a, r) = a + \mathcal{B}(0, r)$.

DESSIN avec les boules usuelles de centre 0 de $\mathbb{R}^2$.

4. Propriétés invariantes par passage à une norme équivalente :

DÉFINITION : On dit qu'une propriété est invariante par passage à une norme équivalente lorsque si elle est vérifiée pour l'une des normes, alors elle l'est également pour l'autre.

PROPOSITION : **Propriétés invariantes par changement de norme équivalente**

Sont invariantes par passage à une norme équivalente :

- "la bornitude d'une partie"
- "la convergence d'une suite (u_n) et sa limite " (vu plus loin !)
- "la limite de f en a est l" (autre chapitre !)
- "la continité d'une fonction f" (autre chapitre !)

⚠ En général, la propriété "x est un vecteur unitaire" N'EST PAS conservée par passage d'une norme à une norme équivalente.

⚠ En revanche, ces différentes propriétés ne sont pas toujours conservées si on passe d'une norme à une autre norme non équivalente !

C-Exemples :

- Cas de la **bornitude** :
  La suite (f_n) définie sur $[0,\ 1]$ par : $f_n(t) = nt^n$ est bornée pour $\|.\|_1$ mais pas pour $\|.\|_\infty$.

- De même, nous verrons en exercices que la **convergence** d'une suite vectorielle et la **continuité** d'une fonction vectorielle dépendent souvent des normes (non équivalentes) choisies.

Autre méthode : Pour montrer que deux normes sur E ne sont pas équivalentes

On peut considérer une suite de $E^{\mathbb{N}}$ qui :
→ est bornée pour l'une des normes
→ est non bornée pour l'autre.

Ou encore :
→ converge vers l pour l'une des normes

. $\rightarrow$ ne converge pas vers l pour l'autre

4 Application 1 : Suites dans un EVN

Ici on s'intéresse à la convergence de suites d'éléments d'un evn $(E,\ \|.\|)$ donné.
En particulier lorsqu'il s'agit d'une suite de :

- p-uplets : $(x_{1,n},\ \dots,\ x_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$
- Matrices : $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Fonctions : $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$
- Suites : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n = (u_{n,p})_{p\in\mathbb{N}}$

Les suites $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ sont appelées des *suites vectorielles.*

Exemples :

Suite et série de triplets	Suite et série de matrices	Suite et série de fonctions

Les suites de réels ou de complexes sont également des suites vectorielles puisque $(\mathbb{R},\ |.|)$ et $(\mathbb{C},\ |.|)$ sont des EVN.

1. Convergence d'une suite vectorielle :

DÉFINITION : **Convergence d'une suite vectorielle**

On dit que $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ *converge vers* $l \in E$ (sous-entendu pour la norme $\|.\|$) lorsque :

$$\|u_n - l\| \to 0$$

On remarque que par définition, la limite l de la suite est nécessairement un vecteur de E.

Remarque : On ne modifie pas la limite d'une suite en modifiant un nombre fini de ses termes.

Notation

"La suite (u_n) converge vers l" pour la norme $\|.\|$ se note plus simplement : $(u_n) \overset{\|.\|}{\to} l$.

On pourra écrire $u_n \to l \begin{cases} \text{si la norme utilisée est implicite} \\ \text{ou} \\ \text{si nous sommes dans un espace de dimension finie} \end{cases}$.

Exemples :

- $u_n = (\dfrac{\sin n}{n},\ \dfrac{n+1}{n}) \to (0,\ 1)$ pour $\|.\|_1$ et donc pour les autres normes car $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie.

- Si $\|A\| < 1$ pour une norme sous-multiplicative $\|.\|$ sur $\mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ alors on a : $A^n \to 0$.

Vocabulaire : lorsque $(f_n) \to f$ pour

- La norme ∞, on dit que (f_n) converge *uniformément* vers f sur $[a,\ b]$,
- La norme 1, on dit que (f_n) converge vers f *en moyenne* sur $[a,\ b]$,
- La norme 2, on dit que (f_n) converge vers f *en moyenne quadratique* sur $[a,\ b]$.

PROPOSITION : Il y a UNICITE de la limite d'une suite. (mais pas toujours "existence")

Preuve : $0 \leq \|l - l'\| \leq \|l - u_n\| + \|u_n - l'\|$ puis théorème des gendarmes.

Méthode : Passage à la limite dans une égalité

Lorsque $\begin{cases} (u_n) \to l \\ (v_n) \to l' \end{cases}$ et que $u_n = v_n$ à partir d'un certain rang (APCR), on a :

$$l = l'$$

On dit alors qu'on effectue un *passage à la limite* dans l'égalité $u_n = v_n$.

PROPOSITION : Une suite convergente est BORNEE.

Preuve : $\|u_n\| \leq \|u_n - l\| + \|l\|$ avec $(\|u_n - l\|)$ une suite réelles convergente et donc bornée.

Exercice : 12

$(*)$ Soit $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ et $(\lambda_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telle que $\begin{cases} 1 \leq |\lambda_n| \\ \lambda_n x_n \to l \in E \end{cases}$.

Montrer que la suite (x_n) est bornée.

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Caractérisation de la convergence par les suites extraites**

Une suite vectorielle converge vers $l \in E$ si et seulement toutes ses suites extraites convergent vers l.

Preuve : Facile

Méthode : Pour montrer qu'une suite (u_n) diverge

- Soit on propose une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui diverge de façon évidente
- Soit on propose deux suites extraites $(u_{\varphi_1(n)})$ et $(u_{\varphi_2(n)})$ qui tendent vers des limites différentes

Exemple : La suite $((-1)^n)$ diverge.

PROPOSITION : Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite l, alors (u_n) converge vers l.

Les généralisations de cette proposition ne sont pas officiellement au programme.

Exemple : Le CSSA pour les séries numériques.

2. Opérations sur les limites de suite :

PROPOSITION : **Passage à la limite dans une norme**

$$u_n \overset{\|.\|}{\to} l \quad \Rightarrow \quad \|u_n\| \to \|l\|$$

Preuve : Immédiat avec la deuxième inégalité triangulaire.

Par caractérisation séquentielle, cette propriété implique la continuité de l'application $x \mapsto \|x\|$ sur $(E, \|.\|)$.

PROPOSITION : **Opérations usuelles**

Lorsque $\begin{cases} (u_n) \to \ell \\ (v_n) \to \ell' \end{cases}$ et $\alpha_n \to \alpha \in \mathbb{K}$, on a :

- $\lambda u_n + \mu v_n \to \lambda\ell + \mu\ell'$
- $u_n v_n \to \ell\ell'$ (si E est une algèbre normée par une norme sous-multiplicative)
- $\alpha_n u_n \to \alpha.\ell$.

Preuve : Identiques aux démonstrations vues en MPSI pour les suites numériques.

Remarque : ♡ Nous verrons dans un chapitre ultérieur, que toute fonction continue sur un segment, à valeurs réelles ou complexes est limite pour la norme infinie d'une suite de fonctions polynômiales. Ce résultat porte le nom de *théorème d'approximation uniforme de Weierstrass.*

---

3. Conservation de la convergence et de la limite par passage à une norme équivalente :

LEMME : **Conservation de la CVG pour une norme dominée**

Si N_2 domine N_2 alors une suite convergente pour N_2 converge vers la même limite pour N_1.

Preuve :

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Conservation de la CVG pour une norme équivalente**

La convergence et la limite d'une suite vectorielle sont conservées par passage à une norme équivalente.

♡ *Comme en dimension finie toutes les normes sont équivalentes, on n'a pas besoin de préciser la norme pour laquelle une suite converge ou diverge. On se contentera d'écrire $(x_n) \to l$.*

Preuve : Immédiat.

Contre-exemple : ⚠ Si deux normes ne sont pas équivalentes, une même suite (x_n)

- peut converger pour l'une et diverger pour l'autre
- peut converger pour l'une et l'autre mais vers des limites différentes.

La suite (u_n) telle que $u_n(t) = t^n$ sur $[0,\ 1]$ converge vers $\tilde{0}$ pour $\|.\|_1$ mais pas pour $\|.\|_\infty$:

Preuve :

Exercice : 13

$(*)$ Sur $\mathbb{R}[X]$, on note $P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ et on considère les 3 normes suivantes :

$$\bullet N_1(P) = \int_0^1 |P(t)|\ \mathrm{d}t \qquad \bullet\ N_\infty(P) = \sup_{t\in[0,\ 1]} |P(t)| \qquad \bullet\ N_2(P) = |P(1)| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}$$

Montrer que la suite $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

- Converge vers 0 pour la norme N_1
- Converge vers 1 pour la norme N_2
- Diverge pour la norme N_∞ (on pourra étudier $N_\infty(X^n - X^{2n})$)

Conclusion de l'exercice : Comme pour la propriété de bornitude, la convergence d'une suite dépend de la norme choisie. Sauf bien entendu dans le cas des evn de dimension finie où toutes les normes sont équivalentes.

Méthode pour étudier la divergence

Pour prouver qu'une suite (u_n) diverge pour une norme $\|.\|$, on pourra tenter de prouver que

$$\|u_{\varphi(n)} - u_{\psi(n)}\| \not\to 0$$

$(u_{\varphi(n)})$ et $(u_{\psi(n)})$ étant deux suite extraites bien choisies.

4. Convergence d'une suite en dimension finie : Ici, $\dim E < +\infty$

Rappel : En dimension finie, si $u_n \overset{N}{\to} l$ alors $u_n \to l$ pour toutes les autres normes.

Préliminaire : En se plaçant dans une base e de E, une suite (u_n) s'écrit : $u_n = u_1(n)e_1 + \cdots + u_p(n)e_p$.

DÉFINITION : Suites coordonnées

Les suites de scalaires $(u_k(n))_n$ sont appelées les *suites coordonnées* de la suite vectorielle (u_n) dans e.

Exemples de suites coordonnées usuelles : (on note e les bases canoniques)

- $u_n = (\frac{1}{n},\ n^2) = \frac{1}{n}.(1,\ 0) + n^2.(0,\ 1) = (\frac{1}{n},\ n^2)_e$
- $P_n = \frac{1}{n} + e^{-n^2}X + X^2 = (\frac{1}{n},\ e^{-n^2},\ 1)_e$
- $A_n = \begin{pmatrix} 1 & \sin(n) \\ n & \frac{1}{n} \end{pmatrix} = 1.E_{1,1} + \sin(n).E_{1,2} + n.E_{2,1} + \frac{1}{n}.E_{2,2} = (1,\ \sin(n),\ n, \frac{1}{n})_e$

THÉORÈME FONDAMENTAL : Caractérisation de la convergence d'une suite vectorielle

$$(u_n) \text{ converge} \iff \text{TOUTES ses suites coordonnées convergent}$$

Dans ce cas :

la limite l de (u_n) est alors $l = l_1e_1 + \cdots + l_pe_p$ où les l_k sont les limites des suites coordonnées.

Preuve : Comme $\dim E < +\infty$, toutes les normes sont équivalentes et on peut donc choisir $\|.\|_{\infty,e}$.

Exemples de suites convergentes :

- Dans $\mathbb{R}^2$: (u_n) définie par $u_n = (n \sin\frac{1}{n},\ (1+\frac{1}{n})^n)$.

COROLLAIRE : Applications

- Suites de p-uplets : Dans $\mathbb{K}^p$, $(x_n^1,\ \ldots,\ x_n^p)_{n\in\mathbb{N}} \to (l_1,\ \ldots,\ l_p) \iff \forall k \in [\![1, p]\!], x_n^k \to l_k$
- Suites de matrices : Dans $\mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \to A \iff \forall i, j,\ (A_n)_{i,j} \to A_{ij}$.
- Suites de polynômes : Dans $\mathbb{K}_p[X]$,

$$(a_n^0 + a_n^1X + \cdots + a_n^pX^p)_{n\in\mathbb{N}} \to b_0 + b_1X + \cdots + b_pX^p \iff \forall k \in [\![1, p]\!], a_n^k \to b_k$$

Preuve : Immédiat en choisissant les bases canoniques.

Exemple : Soit $(A_k) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$. Montrer que si $A_k \to 0$ alors $A_k X \to 0$ pour tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

5. Petits exercices sur les suites matricielles :

Méthode pour montrer une propriété portant sur des limites

Une telle propriété se montre souvent par passage à la limite.

- On recherche une propriété semblable portant sur les suites concernées
- On conclut par passage à la limite

Exercice : 14

$(*)$ Soit $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent et telles que $\left\{\begin{array}{l} A^k \to P \\ B^k \to Q \end{array}\right.$.

Montrer que P et Q commutent également.

Exercice : 15

$(*)$ Soit $A,\ B \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ tels que $A^n \to B$. Montrer que B est la matrice d'un projecteur.

Exercice : 16

$(*)$ Soit $A,\ B \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ telles que $(AB)^n \to O_p$. Montrer que $(BA)^n \to O_p$.

6. Convergence dans un espace produit : Ici, $E = E_1 \times \cdots \times E_p$

Dans un espace produit muni de la NORME PRODUIT N :

$$N(x_1, \dots,\ x_p) = \max_{k \in [\![1,p]\!]} N_k(x_k)$$

DÉFINITION : Une suite de E est de la forme $u_n = (u_1(n),\ \dots, u_p(n))$.
Les suites $(u_k(n))_n$ sont appelée les *suites composantes* de (u_n).

Exemple :

THÉORÈME : **Caractérisation de la convergence d'une suite d'un espace produit**

$$(u_n) \text{ converge} \iff \text{pour tout } k \in [\![1,p]\!], \text{ les suites } (u_k(n))_n \text{ convergent pour } N_k$$

Dans ce cas :

La limite l de (u_n) est alors $l = (l_1, \ldots, l_p)$ où les l_k sont les limites des suites composantes.

D/ Facile.

Exemple :

5 Application 2 : Séries d'éléments d'un EVN

DÉFINITION : **Série vectorielle**

Comme pour les séries numériques, les séries vectorielles sont définies par la suite des sommes partielles.

$$\sum_{n\geq 0} u_n \quad \text{est une autre notation pour la suite} \quad (S_n) \quad \text{de terme général} \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$$

Vocabulaire : $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ (ou plus simplement $\sum u_n$) est appelée la *série de terme général* u_n.

♡ *Les séries numériques sont des séries vectorielles telles que le terme général* u_n *est réel ou complexe.*

Exemples : Lorsque $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\sum\limits_{n\geq 0} A^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{A^n}{n!}$ sont des séries matricielles usuelles.

DÉFINITION :

- Somme partielle : Il s'agit de $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$
- Convergence : La série $\sum u_n$ converge lorsque la suite (S_n) converge vers une limite finie
- Lorsque $\sum u_n$ converge :

  → Somme de la série : on note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ la limite de (S_n)

  → Reste partiel de la série : on note $R_n = S - S_n$ noté $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$, le reste partiel

Proposition : Propriétés usuelles des séries convergentes

- <u>CN de convergence</u> : $\sum u_n$ converge $\Rightarrow$ $(u_n) \to 0$.

  Si $(u_n) \not\to 0$, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

- <u>Linéarité de la somme</u> : Lorsque 2 des séries convergent, alors la troisième converge et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

- <u>Lien entre suite et série télescopique</u> : $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge $\Longleftrightarrow$ (u_n) converge

Preuve :

- $u_n = S_n - S_{n-1}$.
- Facile avec les sommes partielles
- Facile avec la somme partielle

Proposition : Convergence des séries en dimension finie

- La convergence d'une série est indépendante de la norme choisie.
- Une série converge si et seulement si ses séries coordonnées convergent.

Preuve :

- Les normes sont équivalentes et la convergence d'une série est définie par la convergence d'une suite.
- Conséquence immédiate du théorème sur les suites.

<u>Exemple</u> : Etudier la convergence de $\sum\limits_{n\geq 1} \begin{pmatrix} e^{-n} & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n^2} & 0 \end{pmatrix}$.

Définition : Convergence Absolue (CVA)

On dit que $\sum u_n$ est *absolument convergente* dans $(E, \|.\|)$ lorsque : $\sum \|u_n\|$ converge.

<u>Exemple</u> : Lorsque $\|.\|$ est une norme sous-multiplicative sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et que $\|A\| < 1$ alors la série $\sum A^n$ CVA.

Proposition : CVA en dimension finie

Lorsque E est de dimension finie (⚠), une série absolument convergente est convergence :

« CVA $\Rightarrow$ CVG »

Preuve : On considère une base e de E et on munit E de la norme usuelle $\|.\|_{\infty,e}$.
En notant $u_n = u_1(n)e_1 + \cdots + u_p(n)e_p$, on remarque que pour tout $k \in [\![1,p]\!]$, on a : $|u_k(n)| \leq \|u_n\|_{\infty,e}$.

⚠ *Cette implication est fausse en dimension quelconque !*

Proposition : Définition de deux nouvelles exponentielles

Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ et $z \in \mathbb{C}$.

Les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{A^n}{n!}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ sont convergentes et leur somme est notée :

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \quad \text{et} \quad \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Preuve : Par CVA en prenant des normes sous-multiplicatives.

Nous verrons plus tard que cette nouvelle définition de l'exponentielle complexe coïncide bien avec celle donnée en MPSI.

Exercice : 17

$(*)$ Exercice n°40 de la banque CCINP.

Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension finie munie d'une norme sous-multiplicative $\|.\|$ et $u \in A$.

1. Montrer que la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ converge.
2. On suppose ici que $\|u\| < 1$.
   - Montrer que la série $\sum u^n$ converge.
   - Montrer que $1_A - u$ est inversible et que :

$$(1_A - u)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$$

Voir également l'exercice 61 de la banque CCINP.

6 Musculation

1. Application contractante stricte :

Définition : **Application contractante stricte**

Soit $f : E \to E$ où E est un evn muni de la norme $\|\|$.
On dira que f est contractante stricte lorsqu'il existe $k \in [0,\ 1[$ tel que :

$$\forall x,\ y \in E, \quad \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|$$

Remarque : Une application contractante stricte est donc une application lipschitzienne de E dans E de rapport $k \in [0,\ 1[$.

Exemples :

- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ est contractante stricte ssi $a \in [0,\ 1[$.
- f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(x)$ est contractante stricte sur $[a,\ +\infty[$ ssi $a > 1$.

Théorème : **Théorème du point fixe de Picard**

Dans un evn de dimension finie, si $f : E \to E$ est contractante stricte, alors f admet un unique point fixe a.

La suite (x_n) définie par $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases}$ converge vers a et donne donc une approximation de a.

Preuve :

- Unicité : ok.
- Existence : avec (x_n) telle que $x_{n+1} = f(x_n)$.
  $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge absolument et donc (x_n) converge vers l.
  On conclut soit avec la continuité de f (non vue) soit en écrivant $\|f(l) - x_{n+1}\| \leq k\|l - x_n\|$.

2. Oral de Navale : Suites de Cauchy (2018 - 2023 - 2024)

On munit $\mathcal{C}([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ de la norme 1 notée N_1.
On dit que $(f_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy pour N_1 lorsqu'elle vérifie :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N,\ \forall p \in \mathbb{N}, \quad N_1(f_{p+n} - f_n) \leq \varepsilon$$

1. Justifier que N_1 est bien une norme.
2. Montrer que si (f_n) converge pour N_1 alors c'est une suite de Cauchy pour N_1.
3. Soit (f_n) définie par $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k}$.
   Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy pour N_1.
   Est-ce que (f_n) converge pour N_1 ?

Preuve :

1. Facile.
2. Facile avec les epsilons.
3. Le but de cette question est de montrer qu'en dimension infinie, une suite de Cauchy ne converge pas forcément.
   On montre facilement que (f_n) est une suite de Cauchy pour N_1.
   On montre par l'absurde que (f_n) diverge pour N_1.
   Si (f_n) converge alors on montre que sa limite f est nécessairement $x \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k}$.
   On vérifie alors que f n'appartient pas à E (car non continue en 1) et on obtient ainsi une contradiction.

Bien que directement lièe à la notion de norme, les notions de limite et de continuité d'une fonction n'ont pas été traitées dans ce chapitre... Un chapitre entier leur sera consacré ultérieurement.

A suivre...