Convexité d'une fonction réelle

—

REVISIONS MPSI

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

1er octobre 2024

La convexité d'une fonction réelle de variable réelle permet de décrire l'orientation de la courbure de sa représentation graphique (vers le bas ou vers le haut).

On s'y intéresse souvent pour démontrer des inégalités originales :

→ soit par comparaison de la courbe à l'une de ses tangentes

→ soit par comparaison de la courbe avec l'une de ses cordes

→ soit plus généralement par application de l'inégalité de Jensen.

f est ici une fonction réelle (cad : à valeurs dans $\mathbb{R}$) définie sur un intervalle non trivial $I \subset \mathbb{R}$.

Table des matières

1 Fonctions convexes/concaves

Cf cours MPSI (à revoir en autonomie)

Ici, les fonctions sont réelles et définies sur I un INTERVALLE non trivial de $\mathbb{R}$.

1. Définition :

DÉFINITION : **Fonction convexe (définition graphique)**

On dit qu'une fonction est *convexe* lorsque sa courbe est toujours au dessous de ses cordes.

Formellement :

DÉFINITION : **Fonction convexe/concave (définition formelle)**

$$f : I \to \mathbb{R} \text{ est } \textit{convexe} \iff \left\{ \begin{array}{l} \forall a,\ b \in I \\ \forall x \in [a,\ b] \end{array} \right. ,\ f(x) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a).$$

$$\iff \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \forall a,\ b \in I \\ \forall \lambda \in [0,\ 1] \end{array} \right. ,\ f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b).}$$

On dit que f est *concave* lorsque $-f$ est convexe.

Exemples :

- Sont convexes : les fonctions affines, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto e^x$, ch, cos sur $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$, $x \mapsto |x|$...
- Sont concaves : les fonctions affines, ln, sin sur $[0,\ \pi]$

PROPOSITION : **Continuité d'une fonction convexe**

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexe sur $[a,b]$ est continue sur l'intervalle ouvert $]a,b[$.

Preuve : Voir en musculation.

Dessin

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe sur $[a, b]$ peut-être discontinue en a ou b.

---

2. Caractérisations géométriques de la convexité :

- Avec l'épigraphe

DÉFINITION : **Epigraphe**

L'*épigraphe* d'une fonction est la partie du plan au dessus de sa courbe.

Dessin

THÉORÈME : **Caractérisation de la convexité**

f est convexe SSI son épigraphe est convexe

- Avec la croissance des pentes

DÉFINITION : **Pente de la corde** $[AB]$

Lorsque $A\begin{pmatrix} a \\ f(a) \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} b \\ f(b) \end{pmatrix}$, la pente de $[AB]$ est : $\tau(a, b) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

On remarque que $\tau(a, b) = \tau(b, a)$

Dessin

Remarque : Avec cette notation, la définition de la convexité s'écrit alors :

$$\forall a < b < c \in I,\ \tau(a, c) \leq \tau(a, b) \quad \text{ou} \quad \forall a < b < c \in I,\ \tau(b, a) \leq \tau(b, c)$$

THÉORÈME : Croissance des pentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

$$f \text{ est convexe sur } I \iff \forall a \in I,\ \tau : x \mapsto \tau(a, x) \text{ est croissante sur } I$$

Preuve :

$\Leftarrow$ Immédiat compte-tenu de la remarque précédente.

$\Rightarrow$ Soit f convexe sur I.

Par définition, on a pour tout $a < b < c \in I$ $\begin{cases} \tau(a,c) \leq \tau(a,b) \\ \tau(b,a) \leq \tau(b,c) \end{cases}$ et donc $\tau(a,c) \leq \tau(b,c)$.

On prouve alors facilement la croissance de la pente à l'aide de la définition de la croissance.

Dessin

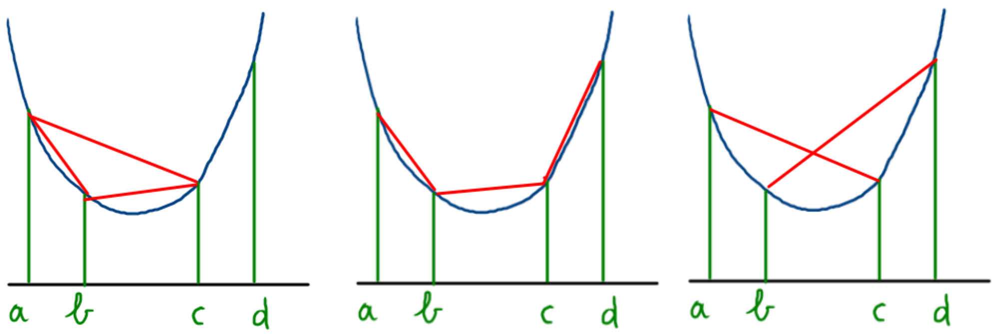
Exercice : 1

$(*)$ Montrer que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{e^x - 1}{x} \end{array}$ est croissante.

COROLLAIRE : Comparaison des pentes

Lorsque f est convexe sur I avec $a < b < c < d \in I$, on a :

$$\tau(a,b) \leq \tau(a,c) \leq \tau(b,c) \quad \text{et} \quad \tau(a,b) \leq \tau(b,c) \leq \tau(c,d) \quad \text{et} \quad \tau(a,c) \leq \tau(b,d)$$



Exercice : 2

$(*)$ Montrer qu'une fonction $\begin{cases} \text{convexe} \\ \text{concave} \end{cases}$ sur $[a,b]$ est affine.

Par l'absurde...

- Exercices

Exercice : 3

$(*)$ Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ convexe majorée est constante.

Exercice : 4

$(**)$ Soit f une application convexe de $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction φ définie sur $[0,\ \frac{1}{2}]$ par $\varphi(x) = f(x) + f(1-x)$ est décroissante.

3. Caractérisations de la convexité des fonctions dérivables :

THÉORÈME : Dans le cas où $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{D}^1$:

$$f \text{ convexe} \quad \Longleftrightarrow \quad f' \text{ est croissante}$$

Preuve :

$\Rightarrow$ Par passage à la limite avec le théorème de croissance des pentes.

$\Leftarrow$ On étudie la fonction $\varphi(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$.

COROLLAIRE : Dans le cas où $f : I \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{D}^2$:

$$f \text{ convexe} \quad \Longleftrightarrow \quad f'' \geq 0$$

Même principe pour caractériser la concavité d'une fonction.

Exemples d'utilisation : exp, ln, $x \mapsto x^2 + x + 1$, ch, $x \mapsto \frac{1}{x}$ ...

Méthodes pour prouver la convexité d'une fonction sur I

- Si f n'est pas dérivable :

  On montre que $f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$ pour tout $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,\ 1]$.

- Si f est uniquement dérivable (Rare) :

  On montre que f' est croissante sur I.

- Si f est deux fois dérivable (Fréquent!) :

  On montre que $f'' \geq 0$ sur I

Exemple : Etudier la convexité de f définie par $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

Exercice : 5

$(*)$ Soit f une application convexe $[0,\ 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction φ définie sur $[0,\ 1/2]$ par $\varphi(x) = f(x) + f(1-x)$ est décroissante.

- Dans le cas où f est dérivable
- Dans le cas où f est deux fois dérivable

Définition : **Point d'inflexion**

Un point $a \in I$ est appelé *point d'inflexion* de $f : I \to \mathbb{R}$ lorsque f change de concavité en a.

Dessin

Lorsque f est $\mathcal{C}^2$ sur I, les points d'inflexion de f sont les points où f'' change de signe.

Exemple : Déterminer le ou les points d'inflexion de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^3 - 3x^2 + x - 5 \end{array}$.

2 Inégalités de convexité : Par comparaison à la tangente

Cf cours MPSI (à revoir en autonomie)

THÉORÈME : Une fonction $\left\{ \begin{array}{l} \text{convexe} \\ \text{dérivable} \end{array} \right.$ est « au dessus » de ses tangentes.

La dérivabilité est ici nécessaire pour définir la notion de tangente.

Preuve : En passant par une étude de fonction.

On a bien entendu le contraire pour une fonction concave.

PROPOSITION : **Inégalités usuelles**

- $\frac{2x}{\pi} \leq \sin x \leq x$ sur $[0, \ \frac{\pi}{2}]$
- $e^x \geq 1 + x$ sur $\mathbb{R}$
- $\ln(1+x) \leq x$ sur $]-1, \ +\infty[$

Preuve :

Exercice : 6

$(*)$ Démontrer en utilisant un argument de convexité que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \geq 0, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$$

3 Inégalité de Jensen

Cf cours MPSI (à revoir en autonomie)

Théorème : Inégalité de Jensen

Lorsque $\begin{cases} f \text{ est convexe sur } I \\ x_1,\ \dots,\ x_n \in I \\ \text{la somme des } \lambda_i \geq 0 \text{ vaut } 1 \end{cases}$, on a : $f(\sum_{i\in I} \lambda_i x_i) \leq \sum_{i\in I} \lambda_i f(x_i)$.

Preuve : Par récurrence.

Corollaire : Lorsque $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, nous avons en particulier :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1,\ \dots,\ x_n \in I, \quad f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i) \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$$

Preuve : Il suffit de prendre $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = \frac{1}{n}$.

Exercice : 7

($*$) Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1,\ \dots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$, on a : $(x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$.

Méthode pour prouver une inégalité par Jensen

Lorsque l'inégalité à démontrer nous semble originale, on pense à Jensen.
Alors :

- On transforme l'inégalité par $\iff$ successives pour lui donner la forme de Jensen
- On introduit alors la fonction f, les x_k et les λ_k
- On s'assure que ces données vérifient les hypothèses de Jensen
- On applique Jensen.

Exercice : 8

($*$) Montrer que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in [-1,\ 1]$, on a : $e^{\lambda x} \leq \operatorname{ch} \lambda + x \operatorname{sh} \lambda$.

Exercice : 9

($*$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des réels strictement positifs.

1. Montrer que $\sqrt[n]{x_1 \dots x_n} \leq \dfrac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n)$.

2. En déduire que $\dfrac{n}{\dfrac{1}{x_1}+\cdots+\dfrac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}$ et que $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_3}+\cdots+\dfrac{x_n}{x_1} \geq n$.

4 Musculation

4.1 Dérivabilité et continuité des f° convexes

Théorème : Si f est convexe, alors f est dérivable à droite et à gauche en x_0 (intérieur) et

$$f'_g(x_0) \leq f'_d(x_0)$$

Preuve : Par comparaison et croissance des pentes.

Corollaire : Une fonction convexe est continue en tout point intérieur à l'intervalle I.

Preuve : La dérivabilité implique la continuité.

4.2 Inégalité de Minkowsky

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > 1$.

- Question 1 : Prouver que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \left(1 + x^{\frac{1}{p}}\right)^p$ est concave.

Preuve :

- Question 2 : Appliquer Jensen en prenant $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$.

Preuve :

• <u>Conclusion</u> :

THÉORÈME : **Inégalité de Minkowsky**

En déduire que $\forall(a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n)\in(\mathbb{R}^{+*})^n$ et $\forall(b_1,\ b_2,\ldots,\ b_n)\in(\mathbb{R}^{+*})^n$ on a :

$$\Big(\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}}\leq\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$

Preuve : En posant (ça ne s'invente pas !) $x_k=\dfrac{b_k^p}{a_k^p}$ et $\lambda_k=\dfrac{a_k^p}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^p}$ dans l'inégalité précédente.

Cette inégalité nous donne l'inégalité triangulaire pour la norme p sur $\mathbb{R}^n$.

4.3 Inégalité de Holder

Soient $\alpha>0$ et $\beta>0$ tels que $\alpha+\beta=1$.

LEMME : Pour tout $x,\ y\in\mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$x^\alpha y^\beta\leq\alpha x+\beta y$$

Preuve : Avec la concavité du logarithme.

THÉORÈME : **Inégalité de Hölder**.

Pour tout $(a_1,\ a_2,\ldots,\ a_n)\in(\mathbb{R}^{+*})^n$ et tout $(b_1,\ b_2,\ldots,\ b_n)\in(\mathbb{R}^{+*})^n$ et on a :

$$\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\leq\Big(\sum_{i=1}^{n}a_i^{\frac{1}{\alpha}}\Big)^{\alpha}\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i^{\frac{1}{\beta}}\Big)^{\beta}$$

Preuve : En posant $x=\lambda a_i^{\frac{1}{\alpha}}$ et $y=\mu b_i^{\frac{1}{\beta}}$ dans l'inégalité précédente.