Suites et Séries Numériques

—

Révisions et Compléments

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

24 septembre 2024

Questions de cours à maîtriser pour les colles :

1. Etude de la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = \sin(u_n)$
2. Théorème de Césaro - Application à la recherche d'un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} : u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$
3. Organigramme présentant la démarche d'étude de la nature d'une série numérique
4. Critère Spécial des séries alternées
5. Encadrement d'une somme partielle ou d'un reste par des intégrales - Application à $\sum \frac{1}{n \ln^{\beta}(n)}$
6. Lien entre Séries télescopiques et Suite - Application à la définition de la constante d'Euler

Table des matières

1 Suites Numériques

Cf cours MPSI (à revoir en autonomie)

1. Suites convergentes :

   - Définition avec les ε :

     $\rightarrow$ Convergence d'une suite vers $l \in \mathbb{K}$ (unicité de la limite)

     $\rightarrow$ Divergence vers $+\infty$.

   - Méthodes d'étude de la convergence :

Etude de la convergence d'une suite

- Méthode 1 : Avec le théorème de majoration (lorsqu'on connait a priori la limite l)

  On majore $|u_n - l| = \cdots \leq \cdots \leq \alpha_n$ et on montre que $\alpha_n \to 0$.

  Cette méthode est également adaptée pour les suites vectorielles.

- Méthode 2 : Avec le théorème des gendarmes (lorsqu'on ne connaît pas la limite)

  On encadre $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par deux suites $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Cet encadrement doit être suffisament précis pour que ces deux suites convergent vers la même limite.

  Cette méthode ne s'applique qu'aux suites réelles.

- Méthode 3 : Avec les suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

  Lorsque $\left\{\begin{array}{l}(u_{2n}) \to l \\ (u_{2n+1}) \to l\end{array}\right.$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers l.

Exercice : 1

$(*)$ Appliquer les méthodes précédentes, pour étudier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \dfrac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$.

Méthode 1 :
Méthode 2 :
Méthode 3 :

Etude de la convergence d'une suite (suite...)

- Méthode 4 : Avec le théorème de la limite monotone (si on ne demande pas la limite)
- Méthode 5 : En étudiant la convergence $\sum(u_{n+1} - u_n)$ (cf cours sur les séries vectorielles).

Exercice : 2

($*$) Montrer avec les méthodes 4 et 5 que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ converge.

Méthode 4 :
Méthode 5 :

Etude de la convergence d'une suite (suite et fin !)

- Méthode 6 : Cas où $u_n = f(n)$ On calcule directement la limite (avec des équivalents).

Exemple : Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = n\sin(1 - \cos\frac{1}{n})$.

- Méthodes d'étude de la non-convergence :

Théorème : **Caractérisation séquentielle de la limite**

Pour $l \in \bar{\mathbb{K}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{K})^{\mathbb{N}}$, on a :

$$u_n \to l \iff \forall\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ strictement croissante}, u_{\varphi(n)} \to l$$

Preuve de la non-convergence d'une suite

Pour montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on peut :

- Méthode 1 : montrer qu'il existe une suite extraite $u_{\varphi(n)}$ qui diverge.
- Méthode 2 : montrer que $u_{\varphi(n)}$ et $u_{\psi(n)}$ tendent vers des limites distinctes.
- Méthode 3 : procéder par l'absurde

Exemple : Justifier la divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (-1)^n$.

Exemple : Justifier la divergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = e^{u_n}$.

- Propriétés usuelles :

Abréviation : Dans ce qui suit, "APCR" signifie "à partir d'un certain rang".

Proposition : Passage à la limite

Lorsque $\begin{cases} u_n \to l \\ u_n \to l' \end{cases}$, on a : $\begin{cases} \bullet\ u_n = v_n \text{ APCR} & \Rightarrow \quad l = l' \\ \bullet\ u_n \leq v_n \text{ APCR} & \Rightarrow \quad l \leq l' \\ \bullet\ u_n < v_n \text{ APCR} & \Rightarrow \quad l \leq l' \end{cases}$

⚠ Après passage à la limite, la variable n n'intervient plus dans les relations obtenues.

⚠ *Un passage à la limite n'est possible que lorsque les deux membres d'une relation convergent.*
A ne pas confondre avec un calcul de limite ou le théorème des gendarmes.

Exemple : Déterminer la limite de la suite convergente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$ la relation $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Proposition : Encadrements d'une suite

- Une suite convergente est bornée.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to l$ avec $a < l < b$ alors : $a < u_n < b$ APCR.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to l > 0$ alors : $u_n > 0$ APCR.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs.
Montrer que si $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n^2$ converge aussi.

Exercice : 3

(♡) Montrer que : $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to l \in [0,\ 1[\quad \Rightarrow \quad u_n \to 0.$ Et si $l > 1$?

Exercice : 4

(♡) Montrer que : $\sqrt[n]{u_n} \to l \in [0,\ 1[\quad \Rightarrow \quad u_n \to 0.$ Et si $l > 1$?

2. Limites monotones : *(A utiliser lorsqu'on ne demande pas de trouver la limite de la suite)*

Théorème : Limites monotones

- Toute suite croissante "APCR" admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ ou $l = +\infty$.
- Toute suite décroissante "APCR" admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ ou $l = -\infty$.

Remarque : Ainsi, pour une suite croissante "APCR" :

- Si la suite est majorée, elle converge
- Sinon, elle tend vers $+\infty$

Méthode pour prouver la convergence d'une suite

On peut montrer que :

- La suite est monotone
- Qu'elle ne tend pas vers l'infini (souvent en montrant qu'elle est majorée / minorée)

Cette méthode est très souvent utilisée pour prouver la convergence d'une suite récurrente.

Exemples : 2 exemples ont été vus précédemment.

Méthode pour montrer qu'une suite croissante tend vers $+\infty$

On procède souvent par l'absurde :

- On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \not\to +\infty$
- Dans ce cas, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \to l \in \mathbb{K}$... et on continue les déductions jusqu'à obtenir une contradiction.

Exercice : 5

(∗) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, tend vers $+\infty$.

3. Les suites implicites :

Il s'agit des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où le terme général x_n est la solution d'une équation de la forme $f_n(x) = 0$.
La difficulté provient du fait qu'on ne sait pas calculer x_n.

Rappel : théorème de la bijection

Lorsque f est $\begin{cases} \text{strictement monotone} \\ \text{continue} \end{cases}$ sur I alors f est une bijection de I dans $f(I)$.

Méthode d'étude d'une suite implicite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

- Définition : On montre que $f_n(x) = 0$ admet une unique sol° sur I avec le théorème de la bijection
- Sens de variation :
  f_n étant strict^t monotone sur I, on peut comparer $\left\{\begin{array}{l} x_n \\ x_{n+1} \end{array}\right.$ en comparant $\left\{\begin{array}{l} f_n(x_n) \\ f_n(x_{n+1}) \end{array}\right.$.
- Convergence : On montre en général la convergence grace au théorème de la limite monotone.
- Valeur de la limite :
  → On peut envisager de passer à la limite dans la relation $f_n(x_n) = 0$
  → On peut également conjecturer la limite et procéder par encadrement.
  On peut par exemple montrer que $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$ en comparant $f_n(0)$, $f_n(x_n)$ et $f_n(\frac{1}{n})$.

Exercice : 6

Etudier la convergence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où x_n est l'unique solution sur $]1,\ +\infty[$ de $x^n = 1 + x$.

1. Définition :

2. Croissance :

3. Convergence vers 1 :

Par passage à la limite :

En montrant que $1 \leq x_n \leq 1 + \frac{1}{n}$ APCR :

Exercice : 7

$(*)$ Entrainez-vous en étudiant la convergence des suites implicites suivantes :

1. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où x_n est l'unique solution de $x^3 + nx = 1$.
2. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où x_n est l'unique solution positive de $e^x = n - x$.
3. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où x_n est l'unique point de $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ tel que $x\cos^n(x)$ soit maximal.
4. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où x_n est l'unique solution de $\tan(x) = x$ sur $]n\pi - \frac{\pi}{2},\ n\pi + \frac{\pi}{2}[$

Calcul PYTHON du terme x_n d'une suite implicite (Dichotomie)

Pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où x_n est la solution sur $[a,\ b]$ de $f_n(x) = 0$.

Par dichotomie : avec une erreur de e lorsque f_n est strictement croissante

Python
```
A = a                          # Initialisation de la suite A(n)
B = b                          # Initialisation de la suite B(n)
while B-A > e :
    c = (a+b)/2
    if fn(c) > 0 : B = C
    else :         A = C
print((A+B)/2)
```

Calcul PYTHON du terme x_n d'une suite implicite (Newton)

Pour la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où x_n est la solution sur $[a,\ b]$ de $f_n(x) = 0$.

Avec l'algorithme de Newton : pour f croissante et convexe sur $[a,\ b]$

Python
```
def fprime(f,a) :                        # Fonction évaluant la dérivée de f en a
    return (f(a+0.001) - f(a))/0.001

u = b                                    # Initialisation de la suite u(n)
v = u + f(u)/fprime(f,u)                 # Calcul du terme u(n+1)
while abs(v - u) > e :                   # critère d'arrêt arbitraire
    u = v
    v = v + f(v)/fprime(f,v)
print(v)
```

4. Comparaison asymptotique :

Définition : **Relations de comparaison**

- $u_n = O(v_n)$ lorsque $\frac{u_n}{v_n}$ est bornée
- $u_n = o(v_n)$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \to 0$
- $u_n \sim v_n$ lorsque $\frac{u_n}{v_n} \to 1$

Applications : Les équivalents permettent de déterminer

- Pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

  → La limite : $u_n \sim \alpha_n \to l$
  → La vitesse de convergence ou de divergence : $u_n - l \sim \alpha_n \to l$
  → Le signe du terme général APCR : $u_n \sim \alpha_n > 0$

- Pour les séries $\sum u_n$: La convergence d'une série numérique

⚠ Les équivalents ne permettent d'étudier que des propriétés de (u_n) au voisinage de $+\infty$.
Ils ne permettent donc pas d'étudier un sens de variation.
Essayez avec la suite $(u_n) : u_n = n + (-1)^n$

Hierarchie : du plus négligeable vers le plus prépondérant

Le symbole "$\ll$" utilisé ci-dessous signifie : « est négligeable devant ».

En prenant $a \in]-1,\ 1[$, $b > 1$ et $\alpha > 1$:

$$\frac{1}{n!} \ll a^n \ll \frac{1}{n^\alpha} \ll \frac{1}{n} \ll \frac{1}{\sqrt{n}} \ll \frac{1}{\ln n} \ll 1 \ll \ln n \ll \sqrt{n} \ll n \ll n^\alpha \ll b^n \ll n!$$

En particulier, on retiendra que $a^n \ll \frac{1}{n^\alpha}$ *lorsque* $|a| < 1$ *(très utile pour les séries !)*

PROPOSITION : **Formule de Stirling**

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Preuve : Hors-programme !
Un peu plus loin, on démontrera qu'il existe un $K > 0$ tel que $n! \sim K\sqrt{n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

Méthode : Recherche d'un équivalent (cas général)

Lorsque $u_n \to 0$, il faut connaître parfaitement les équivalents suivants :

- $\ln(1+u_n) \sim u_n$
- $(1+u_n)^\alpha - 1 \sim \alpha u_n$
- $\sin(u_n) \sim u_n$
- $\tan u_n \sim u_n$
- $\operatorname{sh} u_n \sim u_n$
- $\operatorname{th} u_n \sim u_n$
- $e^{u_n} - 1 \sim u_n$
- $\cos(u_n) - 1 \sim -\frac{u_n^2}{2}$
- $\operatorname{ch}(u_n) - 1 \sim \frac{u_n^2}{2}$

Remarques :

- On peut multiplier, diviser et élever des équivalents à une puissance α indépendante de n.
- Ne JAMAIS écrire $u_n \sim 0$.

Exemple : $u_n = (2n^2 - 1)\sin(\frac{1}{n})$

Méthode de recherche d'un équivalent d'une somme $u_n + v_n$

- Lorsque $v_n = o(u_n)$, on a $u_n + v_n \sim u_n$
- Sinon :
  - $\to$ on peut additionner les équivalents si ceux-ci ne s'annulent pas.
  - $\to$ s'ils s'annulent, on augmente la précision du calcul en utilisant les développements limités.

Exemple : $u_n = \frac{1}{n} - \tan(\frac{1}{n})$

Méthode de recherche de l'équivalent d'un logarithme $\ln(u_n)$

- Lorsque $u_n \sim \alpha_n \to l \neq 1$, alors $\ln(u_n) \sim \ln(\alpha_n)$
- Lorsque $u_n \sim \alpha_n \to 1$, alors $\ln(u_n) = \ln(1 + (u_n - 1)) \sim u_n - 1$

Exemple : $u_n = \ln(2n^2 + 1)$ et $v_n = \ln(\cos(\frac{1}{n})))$

Danger : Ne pas prendre l'image d'un équivalent par une fonction f !

⚠ $u_n \sim \alpha_n \not\Rightarrow f(u_n) \sim f(\alpha_n)$ (Sauf lorsque $f(x) = x^\alpha$ avec α constante)

On ne prendra donc jamais l'exponentielle d'un équivalent : $u_n \sim \alpha_n \not\Rightarrow e^{u_n} \sim e^{\alpha_n}$.

Exemple : $u_n = (n^3 + 1)^{\frac{1}{n}}$

5. Développement asymptotique (DA) : *Lorsqu'un équivalent ne suffit pas !*

Définition : **Développement asymptotique de u_n à p termes significatifs.**

$$u_n = a_1(n) + \cdots + a_p(n) + o(a_p(n)) \quad \text{avec} \quad a_p(n) \ll \cdots \ll a_1(n)$$

Il y a unicité de cette décomposition.

Méthode générale pour déterminer un développement asymptotique

On utilise les DL des fonctions usuelles en 0.
Pour cela, on fait apparaître (par des mises en facteurs) des termes qui tendent vers 0.

Exemple : Déterminer un développement asymptotique en $o(\dfrac{1}{n^2})$ de $(1 + \dfrac{1}{n})^n$.

Méthode de recherche d'un DA pour les suites implicites

On recherche l'un après l'autre les différents termes du DA, en utilisant :

- Le développement asymptotique précédemment trouvé
- La relation $f_n(x_n) = 0$ qui a permis de définir la suite

Exercice : 8

(**) Trouver un DA à deux termes de (x_n) où x_n est la solution de $x^n = 1 + x$ plus grande que 1.

On commencera par montrer que $x_n \leq 1 + \frac{1}{n}$ ou que (x_n) est décroissante APCR.

Preuve : En procédant pas à pas et en étudiant asymptotiquement les 2 membres de l'égalité, on finit par obtenir :

$$x_n = 1 + \frac{\ln 2}{n} + \frac{\ln 2}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$$

Exercice : 9

Déterminer un développement asymptotique à deux ou trois termes de :

1. (x_n) où x_n est l'unique solution de $x^3 + nx = 1$.
2. (x_n) où x_n est l'unique solution positive de $e^x = n - x$.
3. (x_n) où x_n est l'unique solution de $\tan(x) = x$ sur $]n\pi - \frac{\pi}{2},\ n\pi + \frac{\pi}{2}[$.

---

6. Suites récurrentes : sur des exemples

L'étude des suites récurrentes repose principalement sur 5 idées principales :

Existence

On vérifie que u_n existe pour tout n

Par récurrence avec par exemple P_n : "u_n existe et $u_n \geq 0$"

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n}$.

Limites potentielles

En passant **proprement** à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$

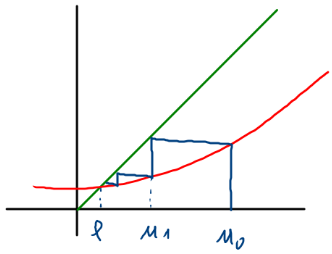
Supposons que (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$, alors par passage à la limite...

Exemple : (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Dessin

Pour conjecturer le sens de variation, la localisation et la limite de la suite

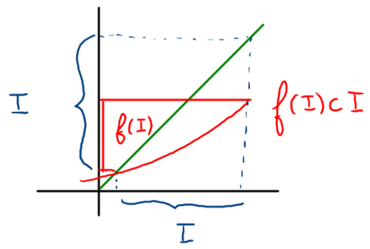
⚠ *On constate que le sens de variation de (u_n) n'est pas celui de f.*



Localisation

En cherchant un intervalle I stable par f avec un $u_{n_0} \in I \quad (f(I) \subset I)$.

On a alors $u_n \in I$ pour tout $n \geq n_0$.



Convergence

Avec le théorème de la limite monotone ou l'Inégalité des Accroissements Finis.

La suite (u_n) est monotone lorsque f est croissante.

Exemple : Avec le théorème de la limite monotone $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \ln(1+u_n) \end{cases}$.

- Existence : "u_n existe et $0 \leq u_n$"
- Limite potentielle : $l = 0$
- Dessin
- Intervalle stable : $I = \mathbb{R}^+$
- Sens de variation
- Conclusion.

Voir l'exercice 43 de la banque CCINP.

Exemple : Avec l'inégalité des accroissements finis $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{4-u_n} \end{cases}$.

- Dessin
- Existence : "u_n existe et $0 \leq u_n \leq 2$"
- Limites potentielles : $l = ...$
- TAF : $|f(u_n) - f(l)| \leq k|u_n - l|$ avec $k < 1$.
- Conclusion.

Exercice : 10

($*$) Etudier la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = \sin(u_n)$.

Calcul PYTHON du terme u_N d'une suite récurrente

Pour la suite $(u_n)\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, le code suivant permet d'obtenir le terme u_N :

Python
```
u = a                                 # Initialisalisation de la suite
for k in range(1,N+1) : u = f(u)      # Calcul du terme u(N)
print(u)
```

7. Théorème de Césaro :

THÉORÈME : **Théorème de Césaro**

Lorsque (u_n) tend vers $l \in \overline{\mathbb{R}}$, la suite de terme général $v_n = \dfrac{u_1 + \cdots + u_n}{n}$ tend aussi vers l.

Preuve : Avec les ε ou en utilisant un théorème sur l'étude asymptotique des sommes partielles.

Exemple : Déterminer (sans utiliser Stirling) un équivalent de $\S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ lorsque $u_n \to l \neq 0$.

Exemple : Déterminer (sans utiliser Stirling) la limite de $u_n = \sqrt[n]{n!}$

Exemple : Déterminer un équivalent de u_n lorsque $u_{n+1} - u_n \to l \in \mathbb{R}$.

Exercice : 11

($\heartsuit$) Equivalent de u_n lorsque $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$ en remarquant que $u_n \to 0$ et que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \to \dfrac{1}{2}$.

Calcul PYTHON d'une somme de Césaro

- Pour la suite $(u_n) \begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$, le code suivant permet d'obtenir $S_N = \dfrac{u_1 + \cdots + u_N}{N}$:

Python
```
u = a
S = a
for k in range(1,N+1) :                # Calcul du numérateur
    u = f(u)
    S = S + u
print(S/N)
```

- Pour la suite $(u_n) : u_n = f(n)$, le code suivant permet d'obtenir $S_N = \dfrac{u_1 + \cdots + u_N}{N}$:

Python
```
S = 0
for k in range(1,N+1) : S = S + f(k)  # Calcul du numérateur
print(S/N)
```

8. Suites linéaires récurrences d'ordre 2 :

Revoir l'étude : $\begin{cases} \text{des suites arithmétiques : } u_{n+1} = u_n + r \\ \text{des suites géométriques : } u_{n+1} = qu_n \\ \text{des suites arithmético-géométriques : } u_{n+1} = qu_n + r \end{cases}$.

LEMME : Soit $a,\ b \in \mathbb{K}$ avec $b \neq 0$.

L'ensemble $\Delta = \{(u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2.

Preuve : A connaître!!
On montre que l'application suivante est un isomorphisme (AL).

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathbb{K}^2 & \longrightarrow & \Delta \\ & (\alpha,\ \beta) & \mapsto & (u_n) : \begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_1 = \beta \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases} \end{array}$$

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \\ u_1 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$ avec $(a,\ b) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$.

DÉFINITION : On appelle *équation caractéristique de* (u_n) l'équation : $(C) :\ r^2 = ar + b$.

Théorème : Cas complexe : $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

- Si $\Delta \neq 0$: on note r_1 et r_2 les deux racines complexes distinctes de (C).
  Il existe alors deux constantes complexes A et B telles que : $u_n = A.r_1^n + Br_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Si $\Delta = 0$: on note r la racine comlexes de (C).
  Il existe alors deux constantes complexes A et B telles que : $u_n = (A.n + B)r^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Théorème : Cas réel : $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Ici $(a,\ b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

- Si $\Delta > 0$: on note r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de (C).
  Il existe alors deux constantes réelles A et B telles que : $u_n = A.r_1^n + Br_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Si $\Delta = 0$: on note r la racine réelles de (C).
  Il existe alors deux constantes réelles A et B telles que : $u_n = (A.n + B)r^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- Si $\Delta < 0$: soit $z = \rho e^{i\theta}$ une des deux racines complexes de (C).
  Il existe alors deux constantes réelles A et B telles que : $u_n = \rho^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Preuve : Le cas $\Delta < 0$ se traite en recherchant les solutions réelles de la forme $u_n = A(\rho e^{i\theta})^n + B(\rho e^{i\theta})^n$.

Voir l'exercice 55 de la banque CCINP.

2 Séries Numériques

Cf cours MPSI (à voir en autonomie)

1. Définition :

Définition : Série numérique

Soit $(u_n)_{n\geq 0} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

La « *série de terme général* u_n », notée $\left\{\begin{array}{c}\sum u_n \\ \text{ou} \\ \sum\limits_{n\geq 0} u_n\end{array}\right.$, est une autre façon d'appeler la suite :

$$(S_n) \ : \ S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k \qquad (\textit{suite des sommes partielles de } (u_n)\ )$$

Exemples : $\sum\limits_{n\geq 0} n$, $\sum\limits_{n\geq 0} q^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Remarque : On peut utiliser la notation $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ même si la série diverge.

---

2. Convergence d'une série numérique :

Nature : La *nature d'une série* est son caractère $\left\{\begin{array}{ll}\text{"convergeant"} & \text{(lorsque } (S_n) \text{ converge)} \\ \text{ou} & \\ \text{"divergeant"} & \text{(lorsque } (S_n) \text{ diverge)}\end{array}\right.$.

Lorsque la série converge :

• La *somme* de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$	est la limite finie de S_n.	On la note $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$
• Le *reste partiel* de $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$	est $R_n = S - S_n$.	On montre que $R_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$

Etude de la nature d'une Série (Méthode 1)

D'après la définition, la première méthode permettant d'étudier la nature de $\sum u_n$ consiste à étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles.

Cette méthode sera assez rarement utilisée par la suite...

Exemples : Etudes en s'intéressant à S_n (Méthode rarement utilisée !)

- $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge vers $+\infty$

D/ Minoration de S_n par une intégrale

- $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge vers $-\ln 2$

D1/ Calcul de S_n à l'aide d'une intégrale : $\frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1}\,\mathrm{d}t$

D2/ Expression de S_n avec la formule de Taylor appliquée à ln sur $[1,\ 2]$.

- Etude du reste partiel de $\sum_{n\geq 0} q^n$ lorsque $|q| < 1$.

Méthodes pour encadrer R_n

Il est très rare que l'on puisse calculer R_n car pour cela, il faudrait connaître S.
On peut en revanche déterminer un encadrement de R_n :

- soit en encadrant le terme général u_n de façon grossière (rapide mais parfois insuffisant)
- soit en encadrant le terme général u_n de façon précise, par exemple par des intégrales
- soit par $|u_{n+1}|$ quand le Critère Spécial des Séries Alternées s'applique

Proposition : **Calcul d'une somme par regroupement des termes**

En attendant de revoir le théorème de sommation par paquets, nous pouvons énoncer le théorème suivant.
Lorsque que les séries ci-dessous convergent, nous avons l'égalité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} u_{2n+1}$$

On peut bien entendu généraliser ce résultat.

Preuve : On décompose la somme partielle S_{2N+1}, puis on s'intéresse aux limites.

Exemple : Prouver que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

Ce résultat est faux si l'hypothèse de CVG n'est pas vérifiée.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2n+1}$$

Théorème : ♡ **Séries télescopiques**

- Simplification : $S_n = \sum_{k=n_0}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_{n_0}$
- Nature : $\sum(u_{n+1} - u_n)$ et (u_n) sont de même nature.

Exemples :

- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$
- $\sum_{n\geq 1} \ln(1 + \frac{1}{n})$

Méthode pour étudier la convergence d'une suite (u_n)

On peut étudier la convergence de $\sum(u_{n+1} - u_n)$.
Cela est facile lorsqu'il est possible de trouver un équivalent simple de $(u_{n+1} - u_n)$.

Application : Utile pour étudier la CVG d'une suite récurrente ou de la forme $u_n = \left(\sum_{k=0}^{n} v_n\right) - w_n$.

Exercice : 12

♡ **La constante d'Euler**

Montrer que la suite (u_n) de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ converge.

Sa limite est noté γ (la constante d'Euler) et on obtient le développement asymptotique $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice : 13

$(*)$ En utilisant la méthode précédente, montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + C + o(1)$.

Méthode pour prouver que $S_n = \alpha_n + C + o(1)$

Pour une série divergente $\sum u_n$ de somme partielle S_n :

- On commence par rechercher un équivalent de S_n : $S_n \sim \alpha_n$
  On pose $v_n = S_n - \alpha_n$ et on souhaite alors prouver que (v_n) converge.
- Pour cela, on montre la CVG de $\sum(v_{n+1} - v_n)$ en recherchant un équivalent de $v_{n+1} - v_n$

Exercice : 14

(♡) **Vers la formule de Stirling**

Montrer qu'il existe une constante $K > 0$ telle que : $n! \sim K\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

Preuve :

On peut démontrer avec les intégrales de Wallis que cette constante K vaut $\sqrt{2\pi}$.

Exercice : 15

($**$) Soit (u_n) vérifiant $u_n = \dfrac{2n}{2n+1}u_{n-1}$ avec $u_0 > 0$. Montrer qu'il existe $A > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{A}{\sqrt{n}}$.

On pensera à utiliser la fonction logarithme.

Preuve : On pose $v_n = \sqrt{n}u_n$ et on montre que $\ln(v_n)$ converge en passant par une série télescopique.

Exercice : 16

(♡♡) **Oral CCINP-MP 2019**

Soit (a_n) définie par $a_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 1 - e^{-a_n}$.

1. Etudier la convergence de (a_n).
2. Nature de $\sum(-1)^n a_n$?
3. Nature de $\sum a_n^2$?
4. Etudier la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}$.
5. En déduire la convergence de $\sum a_n$.

Remarques : Sur l'importance des premiers termes d'une série

- La convergence d'une série ne dépend pas des premiers termes de la série.
  On ne modifie donc pas la nature de $\sum u_n$ en modifiant un nombre fini de valeurs de u_n.
- La somme d'une série dépend en revanche des premiers termes de la série.

3. Limite du terme général d'une série numérique :

Théorème : **Condition Nécessaire de convergence d'une série** (mais non suffisante !)

- Si la série $\sum u_n$ converge, alors on a nécessairement $u_n \to 0$.
- Si $u_n \not\to 0$, on dit que la série *divergence grossièrement*.

Preuve : Il suffit de remarquer que $u_n = S_n - S_{n-1}$.

⚠ La convergence de (u_n) vers 0 ne garantit pas la convergence de la série !

Exemples :

- $\sum \cos n$ diverge grossièrement ($\cos n \not\to 0$). D/ $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$.
- $\sum \frac{1}{n}$ diverge et pourtant $\frac{1}{n} \to 0$.

Exercice : 17

$(*)$ Etudier la convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{d_n^2}$ où d_n est le nombre de diviseurs positifs de n.

4. Opérations sur les sommes de séries CONVERGENTES :

Principe de démonstration :

Les propriétés suivantes sur les sommes se prouvent par passage à la limite à partir des relations sur les sommes partielles.

Théorème : Linéarité de la somme

Lorsque 2 des séries suivantes convergent, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\alpha.u_n + \beta.v_n) = \alpha.\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta.\sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$

Preuve : Facile en passant par les sommes partielles.

C/expl : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}) \neq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}.$

Remarque : $(u_n) \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est une forme linéaire sur l'espace $\{(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid \sum u_n \text{ converge}\}$.

Exemples :

- si $\sum(u_n + v_n)$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum u_n$ converge.
- si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum u_n + v_n$ diverge.

⚠ Bien vérifier la convergence de 2 des 3 séries $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum(u_n + v_n)$ avant d'écrire :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Proposition : Positivité et Croissance

Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont deux séries convergentes :

- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq 0$
- $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq v_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Preuve : Par passages à la limite dans les relations obtenues pour les sommes partielles.

⚠ Les théorèmes analogues sur les intégrales nécessitent en plus la croissance des bornes.

Théorème : Si $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0$ avec tous les $u_n \geq 0$, alors les u_n sont tous nuls.

Preuve : (S_n) est croissante, positive et tend vers 0, donc $S_n = 0$.
Or $u_n = S_{n+1} - S_n$ donc $u_n = 0$.

⚠ Le théorème analogue sur les intégrales nécessite en plus la continuité de la fonction.

Proposition : Séries complexes : $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

- Caractérisation de la convergence :

$$\sum u_n \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum \mathrm{Re}(u_n) \\ \sum \mathrm{Im}(u_n) \end{array} \right. \quad \text{convergent}$$

- Lorsque $\sum u_n$ est une série complexe convergente alors $\sum \overline{u_n}$ converge : $\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} = \overline{\sum_{n=0}^{+\infty} u_n}$

Preuve : Car en dimension finie, une série converge ssi ses séries coordonnées convergent.

Exemple : Comme $\sum e^{in}$ diverge alors au moins une des deux séries $\sum \cos(n)$ et $\sum \sin(n)$ diverge.

3 Convergence d'une série par comparaison à une série positive (SATP)

Idée : On étudie la nature d'une série numérique $\sum u_n$ en étudiant UNIQUEMENT le terme général u_n.

♡ C'est la méthode qui sera en général utilisée pour étudier la nature d'une série.

Cf cours MPSI

1. Cas des séries à termes réels positifs : (SATP)

   Définition : Une série $\sum u_n$ est à termes positifs lorsque $u_n \geq 0$ APCR.

   Lemmes :
   - Une série à termes positifs converge ssi ses sommes partielles sont majorées.
   - Une série à termes positifs divergente diverge vers $+\infty$.

2. Comparaison de séries à termes positifs :

Théorème : Théorème de comparaison

Lorsque $0 \leq u_n \leq v_n$ APCR :

- $\sum v_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge
- $\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum v_n$ diverge

⚠ *Bien vérifier la positivité des termes généraux APCR.*

Exemples :

- $\sum \frac{1}{n^2}$ converge car $0 \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ et nous savons que $\sum \frac{1}{n(n-1)}$ converge.
- $\sum \frac{\ln n}{n+1}$ diverge car $0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{\ln n}{n+1}$ pour n assez grand et nous savons que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Méthode pour comparer 2 suites (u_n) et (v_n) APCR

On recherche un équivalent de $u_n - v_n$ ou de $\frac{u_n}{v_n}$.

- Si $\frac{u_n}{v_n} \to l < 1$ alors $u_n \leq v_n$ APCR
- Si $u_n - v_n \sim \alpha_n \geq 0$ alors $u_n \geq v_n$ APCR

Théorème : Utilisation des équivalents

Lorsque $u_n \sim v_n$ avec $v_n \begin{cases} \text{positif} \\ \text{ou} \\ \text{négatif} \end{cases}$ APCR, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

⚠ *Erreur fréquente : Bien vérifier le signe constant de l'équivalent v_n.*

Exemples :

- $\sum \frac{1}{n^2+n}$ converge car $\frac{1}{n^2+n} \sim \frac{1}{n^2} > 0$ et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.
- $\sum \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ diverge car $\frac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \frac{1}{n} > 0$ et $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Méthode pour étudier la nature d'une série

On commence l'étude d'une série par la recherche d'un équivalent.

Parce qu'un équivalent permet :

- de connaître la limite de (u_n) et donc de vérifier si la série ne diverge pas grossièrement
- de vérifier si la série est à terme général de signe constant (à partir d'un certain rang)
- de se ramener à une série dont l'étude est plus simple (si on a une SATP apcr)

Voir l'exercice 7 de la banque CCINP.

3. Convergence absolue : CVA

Même si ce n'est pas la méthode la plus usuelle, lorsqu'une série n'est pas une SATP, on peut envisager de prouver son *Absolue Convergence.*

DÉFINITION : On dit que $\sum u_n$ *Converge Absolument* (CVA) lorsque $\sum |u_n|$ converge.

Vocabulaire : Lorsque $\begin{cases} \sum u_n \text{ converge} \\ \sum |u_n| \text{ diverge} \end{cases}$, on dit qu'il y a *semi-convergence.*

Exemple de série semi-convergente : $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$

- D1/ La CVG a été vue dans un exercice précédent et la divergence de $\sum \frac{1}{n}$ est connue.
- D2/ La CVG se prouve également à l'aide du CSSA (rappelé plus loin).

THÉORÈME : **CVA $\Rightarrow$ CVG**

Une série absolument convergente est également convergente.
Dans ce cas nous avons :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Preuve :

- Dans le cas réel :
  On remarque que $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$ et on applique le théorème de comparaison des SATP.
- Dans le cas complexe : on se ramène au cas réel en considérant les parties réelles et imaginaires.

Remarque : Cette implication est également vraie pour toute série vectorielle en dimension FINIE.

Exercice : 18

($*$) Prouver la convergence des deux séries suivantes :

- $\sum \dfrac{\sin n}{n^2}$
- $\sum \dfrac{\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})}{n}$

Voir l'exercice 7 de la banque CCINP.

THÉORÈME : **CVG vec les O et les o**

Soit $\sum u_n$ avec $u_n = O(v_n)$ où (v_n) est une SATP.

Alors : $\sum v_n$ CVG $\Rightarrow$ $\sum u_n$ CVA.

A fortiori, on a le même résultat lorsque $u_n = o(v_n)$.

Preuve : Facile par comparaison des SATP.

4. Produit de Cauchy

DÉFINITION : Produit de cauchy :

On appelle "Produit de Cauchy" des séries $\sum_{p\geq 0} u_p$ et $\sum_{q\geq 0} v_q$, la série $\sum_{n\geq 0} w_n$ où :

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

THÉORÈME FONDAMENTAL : Produit de Cauchy de 2 séries absolument convergentes

Si $\left\{ \begin{array}{l} \sum u_p \\ \sum v_q \end{array} \right.$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy converge ABSOLUMENT et :

$$\Big(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\Big)\Big(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \quad \text{où} \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

Preuve : Dans le cas de 2 SATP, on procède par encadrement par 2 sommes rectangulaires. Sinon, c'est un corollaire de la sommation par paquets des familles sommables.

Exercice : 19

$(*)$ Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2}\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha}$ converge pour $\alpha > 1$.

Exercice : 20

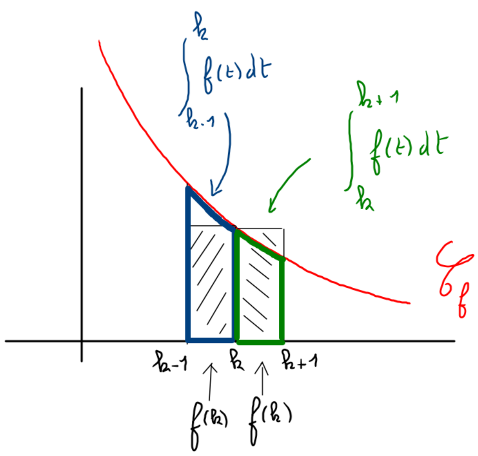
$(*)$ Soit $|a| < 1$. Montrons que $\displaystyle\frac{1}{(1-a)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)a^n$.

Exercice : 21

$(*)$ Soit f est définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ pour tout $x \in \mathbb{C}$. Montrer que : $\forall x,\ y \in \mathbb{C},\ f(x+y) = f(x)f(y)$.

5. Etude par comparaison à des intégrales :

Cas de $\sum f(n)$ où f est une fonction $\left\{ \begin{array}{l} \text{décroissante} \\ \text{continue par morceaux sur } [n_0 - 1, +\infty[\end{array} \right.$.



Théorème : Encadrement d'une somme partielle

Soit f continue par morceaux et décroissante à partir de $n_0 - 1$.

Pour tout $k \geq n_0$, nous avons : $\displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leq f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)\ \mathrm{d}t$

Soit $n \geq n_0$.
En sommant l'inégalité précédente pour k allant de n_0 à n, on obtient :

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t \quad \leq \quad \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \quad \leq \quad \int_{n_0-1}^{n} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Méthode de comparaison Série-Intégrale

La formule donnant encadrement de la somme partielle n'est plus officiellement au programme.
Vous devez donc être capable de refaire le raisonnement qui permet de l'obtenir !

Sinon, il existe un moyen mnémotechnique pour vous rappeler de l'encadrement :

- Repérer les correspondances des bornes
- Se rappeler qu'il y a un décalage de 1 pour trouver les autres bornes.

Remarque : L'encadrement est bien entendu inversé si la fonction est croissante.

Corollaire : Lorsque f est continue par morceaux et monotone

la série $\sum f(n)$ et la suite $\left(\displaystyle\int_a^n f(t)\ \mathrm{d}t\right)_n$ sont de même nature

Exemple : $\displaystyle\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ et $\displaystyle\left(\int_2^n \frac{1}{t \ln^2 t}\ \mathrm{d}t\right)_n$ sont de même nature.

Plus tard...

Dans le cours sur l'intégration, nous montrerons que lorsque f est $\begin{cases} \text{continue par morceaux} \\ \text{monotone} \end{cases}$:

$$\sum f(n) \text{ et } \int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \text{ sont de même nature}$$

Applications de l'encadrement par des intégrales

Lorsque le calcul de l'intégrale est possible, cette méthode d'encadrement permet à la fois :

- de prouver la convergence ou la divergence d'une série
- de déterminer un équivalent de la somme partielle d'une série divergente
- de déterminer un équivalent du reste partielle d'une série convergente.

Méthode pour déterminer un équivalent de R_n

Lorsque $\sum f(n)$ converge avec f une fonction positive décroissante sur $[a,\ +\infty[$.

- Pour n assez grand et $N > n$, on encadre : $\displaystyle\int_{n+1}^{N+1} f(t)\ \mathrm{d}t \leq \sum_{k=n+1}^{N} f(k) \leq \int_{n}^{N} f(t)\ \mathrm{d}t.$
- On calcule les deux intégrales et on fait $N \to +\infty$.
  On obtient alors :
  $$\alpha_n \leq R_n \leq \beta_n$$
- On montre que $\begin{cases} \alpha_n \sim \gamma_n \\ \beta_n \sim \gamma_n \end{cases}$ et on en déduit que $R_n \sim \gamma_n$

Exemples : Applications diverses de l'encadrement par des intégrales

- Convergence d'une série de Bertrand :

  Montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

- Etude d'une somme partielle :

  Déterminer un équivalent des sommes partielles des séries suivantes

  $$\sum \frac{\ln n}{n} \qquad\qquad \sum \frac{1}{n} \qquad\qquad \sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- Etude d'un reste partiel :

  Déterminer un équivalent du reste de la série convergente (vue précédemment !) $\sum \dfrac{1}{n.\ln^2 n}$

4 Séries de référence

Cf cours MPSI

1. Les séries de Riemann :

Théorème : Séries de Riemann

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Preuve : Par comparaison avec des intégrales.

Exemples : Etudier la convergence des séries suivantes

- $\sum \frac{(-1)^n}{n^2 - n + 1}$
- $\sum (\tan \frac{1}{n} - \frac{1}{n})$
- $\sum n e^{-n}$

- $\sum \frac{n+1}{n^2+1}$
- $\sum \frac{\ln n}{n^2+1}$
- $\sum \frac{1}{\ln n}$

2. Les séries géométriques :

Théorème : Séries géométriques

$$\sum_{n \geq 0} q^n \text{ converge} \iff |q| < 1$$

Dans ce cas, la somme vaut : $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ et le reste partiel vaut $R_n = ...$ *(à savoir calculer !)*

Calcul du reste partiel

Méthode pour déterminer la somme d'une série

- on se ramène souvent à une série géométrique (quitte à passer par les complexe)
- on cherche à faire apparaître un développement en série entière connu. (Chap. ultérieur)

Exemples : Calculer la somme des séries suivantes

- $\sum_{n \geq 0} e^{-n}$,
- $\sum_{n \geq 0} \frac{\cos(n)}{2^n}$,
- $\sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n}$ (lorsque $|x| < 1$)
- $\sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n$ (lorsque $|z| < 1$)

Les sommes de séries à connaître

Vous devez connaître par coeur certaines sommes de séries :

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour tout $x \in]-1,1[$.
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (généralisable à $\mathbb{C}$ et à $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$)
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} = \ln(1+x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

D'autres formules seront vues plus tard dans le chapitre sur les Séries Entières.

5 Autres méthodes pour justifier la convergence d'une série

1. Règle de d'Alembert

Cette règle permet de prouver la CVA ou la non-CVA d'une série.

Théorème : Règle de d'Alembert

Lorsque le terme général u_n de la série vérifie $|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}| \to l$:

$$\begin{cases} \text{si } l<1 & \text{alors} \quad \sum |u_n| \text{ converge} \\ \text{si } l>1 & \text{alors} \quad \sum u_n \text{ diverge grossièrement} \end{cases} \qquad \text{et si} \quad l=1 \quad \text{alors} \quad \text{on ne peut rien dire.}$$

Preuve : On traduit le fait qu'à partir d'un certain rang, $|\frac{u_{n+1}}{u_n}|$ est suffisamment proche de l.

Cette technique (assez grossière car on trouve très souvent $l=1$) est en particulier utile lorsque u_n se présente sous la forme d'un produit, car dans ce cas, le rapport $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ se simplifie bien. On l'utilisera très souvent plus tard dans l'étude du rayon de convergence d'une série entière.

Exercice : 22

($*$) Etudier la convergence de $\displaystyle\sum \frac{1}{\binom{2n}{n}}$.

Voir également l'exercice 6 de la banque CCINP.

Exercice : 23
$(*)$ **Critère de Cauchy** (Sur le même princie que le critère de D'Alembert)

1. Soit (u_n) une série positive telle que $\sqrt[n]{|u_n|} \to l$.

   Montrer que : $\begin{cases} \text{si } l < 1 & \text{alors} \quad \sum |u_n| \text{ converge} \\ \text{si } l > 1 & \text{alors} \quad \sum |u_n| \text{ diverge} \end{cases}$ et si $l = 1$, alors on ne peut rien dire.

2. En déduire la convergence de $\sum (\dfrac{n}{n+1})^{n^2}$ et de $\sum \dfrac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$.

2. Cas des Séries Alternées ♡

Cf cours MPSI

La méthode d'étude des séries alternées présentée ici est TRES souvent utilisée pour étudier les séries à terme général de signe non constant (lorsqu'il n'y a pas CVA). Si elle ne s'applique pas, on pourra envisager un développement asymptotique du terme général u_n.

Définition : **Suites et Séries alternées**

- Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est dite *alternée* lorsque $u_n = (-1)^n a_n$ ou $u_n = (-1)^{n+1} a_n$ avec $a_n \geq 0$..
- Une série $\sum u_n$ est dite *alternée* lorsque la suite (u_n) est alternée

Remarque : Une série alternée est donc de la forme $\sum (-1)^n a_n$ *ou* $\sum (-1)^{n+1} a_n$ *avec* $a_n \geq 0$.

Exemples : Les séries $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \ln(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n})$ sont des séries alternées.

Théorème Fondamental : CSSA

Soit $\sum\limits_{n} u_n$ une série alternée à partir de n_0.

Lorsque : $\begin{cases} (|u_n|) \searrow \\ (|u_n|) \to 0 \end{cases}$, on dit que $\sum u_n$ vérifie le *Critère Spécial des Séries Alternées* (CSSA).

Dans ce cas : $\begin{cases} \sum u_n \text{ converge} \\ \text{La somme } S \text{ est encadrée par } S_{2n} \text{ et } S_{2n+1} \\ \text{Le reste } R_n \text{ vérifie à partir de } n_0 : \begin{cases} |R_n| \leq |u_{n+1}| \\ R_n \text{ est du signe de } u_{n+1} \end{cases} \end{cases}$

Remarquons que u_{n+1} est le premier terme du reste R_n.

Dessin

Preuve : Pour $u_n = (-1)^n a_n$.
On montre que les deux suites S_{2n} et S_{2n+1} sont adjacentes, puis :

- la convergence de la série $\sum (-1)^n a_n$.
- $u_{2n+1} \leq R_{2n} \leq 0$ et $0 \leq R_{2n+1} \leq u_{2n+2}$.

Exemples :

Prouver la convergence de $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{(-1)^n}{n^3 - 5n - 1}$ et donner une majoration du reste.

Corollaire : Signe d'une somme alternée

Lorsque $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ vérifie le CSSA pour $n \geq n_0$, le signe de sa somme $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est celui de u_{n_0}.

Preuve : Considérer R_0 dans le théorème précédent.

Exercice : 24

$(**)$ Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{8^n}{(2n)!} < 0$, puis que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{8^n}{(2n)!} < 0$.

3. Exploitation d'un DA :

Méthode d'étude de la nature d'une série avec un DA

On recherche un DA à deux termes du terme général u_n lorsque !

- le terme général n'est pas de signe constant
- le CSSA ne s'applique pas.

Exemple 1 : Nature de $\sum \frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}}$. *(série alternée mais $(|u_n|)$ ne décroît pas)*

D/ On fait un DA : $\frac{(-1)^n}{n+(-1)^{n-1}} = \frac{(-1)^n}{n} + O(\frac{1}{n^2})$...

Exemple 2 : Nature de $\sum \ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}})$. *(série alternée mais PB pour la décroissance de $(|u_n|)$)*

D/ On fait un DA à deux termes : $\ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}) = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^{3/2}})$...

♡ *Exemple intéressant car* $\ln(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}) \sim \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ *et pourtant les deux séries sont de nature différente.*

Voir également l'exercice 46 de la banque CCINP.

---

4. Musculation 1 : Transformation d'Abel (HP mais parfois utilisée en exercice)

On peut envisager d'appliquer la transformation d'Abel lorsque :

- la série n'est pas à terme général de signe constant
- la série ne vérifie pas le CSSA
- un développement asymptotique se présente mal

Méthode : Transformation d'Abel

Pour une série de la forme $\sum u_n v_n$.
On développe sa somme partielle S_n en remplaçant v_k par $T_k - T_{k-1}$ où T_k est la somme partielle $\sum v_n$.

Cette transformation s'applique aux séries lorsque T_n est bornée et a_n décroît vers 0.

Exercice : Donner la nature de $\sum \frac{\sin n}{n}$

Preuve :

- Soit $T_n = \sum_{k=0}^{n} \sin k$.
- On transforme $\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k - T_{k-1}}{k} = ... = \sum_{k=1}^{n} T_k \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - T_0 + \frac{T_n}{n}$.
- On montre alors que (T_n) est bornée en remarquant que $\sin(k) = \operatorname{Im}(e^{ik})$ et on conclut !
- La somme de cette série vaut $\frac{\pi-1}{2}$, mais ce résultat est difficile à prouver !

Exercice : 25

$(*)$ Soit z_n le terme général d'une série complexe convergente.
Prouver que la série $\sum \frac{z_n}{n}$ converge.

♡ *La transformation d'Abel n'est pas au programme de MP, mais reste très souvent utilisée en concours. Bien entendu, il ne s'agit pas de prendre soi-même l'initiative d'utiliser cette méthode, mais d'en maîtriser les différentes étapes pour profiter avantageusement des indications données.*

5. Musculation 2 : Regroupement deux par deux (HP mais parfois utilisée en exercice)

Cette méthode permet l'étude de la nature d'une série alternée lorsque le CSSA ne s'applique pas.

Méthode de regroupement 2 par 2

L'idée est de regrouper les termes consécutifs de S_n deux par deux.

- On commence par étudier S_{2n+1} en posant $v_k = u_{2k} + u_{2k+1}$.

$$S_{2n+1} = (u_0 + u_1) + \cdots + (u_{2n} + u_{2n+1}) = \sum_{k=0}^{n} v_n$$

  Les termes de la suite (u_n) étant alternés, les termes v_n sont parfois de signe constant.
  On peut alors déterminer la nature de $\sum v_n$ avec les méthodes usuelles pour les SATP.

- Dans le cas où (S_{2n+1}) converge (vers l), on étudie alors la suite (S_{2n}) :

$$S_{2n} = S_{2n-1} + u_{2n} \to l$$

- Les suites (S_{2n+1}) et (S_{2n}) convergeant vers la même limite, on en déduit que $\sum u_n$ converge.

Exemple : Appliquer cette méthode pour étudier la convergence de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice : 26

(♡) Etudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 2} \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$.

6 Quelques compléments importants

1. La constante d'Euler : HP mais TRES TRES usuel !

Proposition : La suite (u_n) de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est convergente.

Preuve : On applique la méthode vue dans un exercice précédent en étudiant la nature de $\sum(u_{n+1}-u_n)$.

Définition : Constante d'Euler

La limite de (u_n) de terme général $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ est appelée la *constante d'EULER* et est notée γ.

On a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Nous verrons plus tard une méthode permettant d'obtenir un terme supplémentaire dans ce DA.

Exemple d'application du DA précédent : Calcul de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Preuve :

- On sait que cette série converge par le CSSA.
- On trouve sa limite en étudiant la limite de S_{2n}.

  Pour cela, on calcule S_{2n} en regroupant $\begin{cases} \text{les termes} > 0 \\ \text{les termes} < 0 \end{cases}$ et en faisant apparaître $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k}$.
- On applique alors le DA de $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et on trouve comme prévu : $\ln 2$.

2. Produit infini :

Il s'agit d'étudier la convergence d'une suite (P_n) où $P_n = \prod_{k=0}^{n} a_k$.

Méthode pour étudier la convergence de P_n

- si P_n est télescopique, on simplifie et on termine l'étude
- sinon, on se ramène à l'étude d'une série en prenant le logarithme de P_n : $S_n = \ln(P_n)$.

⚠ *Avant la transformation, il faut vérifier la stricte positivité de tous les facteurs.*

Exemple 1 : $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{k})$.

Pas de difficulté...

Exemple 2 : $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 + \alpha^k x)$ avec $|\alpha| < 1$

Pas de difficulté mais il faut *mettre à part* les facteurs ≤ 0

3. Les séries de Bertrand : (HP mais très usuel)

On étudie ici la convergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ avec $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

Preuve :

- Facile lorsque $\alpha > 1$ ou $\alpha < 1$ par comparaison à des séries de Riemann.
- Pour $\alpha = 1$ on procède par comparaison à une intégrale en traitant à part le cas où $\beta = 1$.

Il est bon de connaître par coeur les résultats précédents, mais il est surtout important d'être capable de les redémontrer.

Voir l'exercice 5 de la banque CCINP.

---

4. Approximation d'une somme : (Rapidité de la convergence ou de la divergence)

A] Recherche d'une approximation de la somme

Pour une série convergente, il s'agit ici de déterminer une valeur de n_0 à partir de laquelle S_n est une valeur approchée de S à ε près.

Pour cela, on recherche une majoration du reste partiel en valeur absolue : $|S - S_n| = |R_n| \leq \dots$.

- Cas des séries alternées vérifiant le CSSA

Méthode
On utilise la majoration connue $|R_n| \leq |u_{n+1}|$.

Exemple : Appliquer la méthode à la série $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

- Cas où il est possible d'encadrer u_k par des intégrales

Méthode
On utilise l'encadrement usuel de $\sum_{k=n+1}^{N} u_k$ puis on fait $N \to +\infty$.

Exemple : Appliquer la méthode à la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

- Cas général

Méthode

On majore $|R_n| = |\sum_{k=n+1}^{N} u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{N} |u_k|$ puis $|u_k| \leq \alpha_k$ puis on fait $N \to +\infty$.

Exemple : Appliquer la méthode à la série $\sum \frac{1}{n^2+2n}$.

B] Recherche d'un équivalent du reste partiel R_n d'une série convergente

Pour une série CVG $\sum u_n$, on souhaite connaître la vitesse de convergence de (S_n) vers la somme S.
En d'autres termes, il s'agit de déterminer un équivalent de $R_n = S_n - S$.

- Lorsqu'on peut appliquer le théorème d'encadrement par des intégrales.

  Par exemple : $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$

- Sinon : nous verrons dans un chapitre ultérieur qu'il est possible, pour les SATP, d'obtenir un équivalent du reste partiel en sommant les équivalents de u_n.

Exercice : 27

(∗∗) **Développement asymptotique du reste d'une série de Riemann**

Soit $\alpha > 1$ et $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Montrer que : $R_n(\alpha) \sim \frac{1}{\alpha-1}.\frac{1}{n^{\alpha-1}}$.
2. Montrer que : $\frac{1}{(\alpha-1)(k+1)^{\alpha-1}} = \frac{1}{(\alpha-1)k^{\alpha-1}} + \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}.\frac{1}{k^{\alpha+1}} + I_k$ avec $0 \leq I_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.
3. En déduire que : $R_n(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}.\frac{1}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + o(\frac{1}{n^\alpha})$.

C] Recherche d'un équivalent de la somme partielle S_n d'une série divergente

Pour une série divergente vers $+\infty$, nous souhaitons connaître la vitesse de divergence.
En d'autres termes, il s'agit de déterminer un équivalent de S_n.

On peut appliquer les deux mêmes méthodes que celles présentées ci-dessus pour la recherche de l'équivalent d'un reste partiel R_n.