$\left\{\begin{array}{l}\text{Suites}\\\text{Séries}\end{array}\right.$ de fonctions numériques

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

15 octobre 2024

Les fonctions intervenant dans ce chapitre sont des vecteurs de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(I \subset \mathbb{R},\ \mathbb{K})$. A ce titre, les notions de *suites et séries de fonctions* sont des cas particuliers des suites et séries vectorielles vues dans le chapitre sur les normes.

Plus tard, nous généraliserons les notions de suite et série de fonctions aux "fonctions vectorielles" (fonctions d'un espace vectoriel normé dans un autre).

L'idée principale :

- Les limites de suites de fonctions et les sommes de séries de fonctions permettent de définir un très grand nombre de nouvelles fonctions (impossible d'exprimer à l'aide des fonctions usuelles) offrant des perspectives nouvelles dans la résolution d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles.
- L'étude des propriétés de ces nouvelles fonctions passe en général par l'étude de la convergence uniforme.

Questions de cours à maîtriser pour les colles :

- Savoir étudier la CVS, CVU et non-CVU d'une suite de fonctions
- Savoir étudier la CVS, CVU, non-CVU, CVN et non-CVN d'une série de fonctions
- Savoir prouver les méthodes justifiant la non-CVU et la non-CVN
- Savoir prouver que CVN $\Rightarrow$ CVU $\Rightarrow$ CVS
- Connaître parfaitement les théorèmes de transfert par CVU.
- Etude complète de la fonction Zéta.

Table des matières

1 Suites de fonctions

Définition : Suite de fonctions

Il s'agit d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n \in \mathcal{F}(I \subset \mathbb{R},\ \mathbb{K})$.

Exemples :

- La suite (u_n) de fonctions définies sur $[0,\ 1]$ par $u_n(t) = t^n$.
- La suite (u_n) de fonctions définies sur $[0,\ 1]$ par $u_n(t) = n\cos(t)\sin(nt)$.

Pour les suites de fonctions, on définit 2 modes de convergence : $\left\{\begin{array}{l}\text{la convergence simple : CVS}\\ \text{la convergence uniforme : CVU}\end{array}\right.$.

1. La convergence simple : (CVS)

La convergence simple n'est associée à aucune norme particulière sur $\mathcal{F}(I,\ \mathbb{K})$.

Définition : Convergence simple (CVS)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{F}(I,\ \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$.

- On dit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement* (CVS) sur I lorsque :

$$\forall t \in I, \quad u_n(t) \text{ converge}$$

Il s'agit d'une convergence "point par point".

- Dans ce cas : la limite finie de la suite $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ dépend de t et est notée $u(t)$.

  On dit que la fonction $u \in \mathcal{F}(I,\ \mathbb{K})$ ainsi obtenue est la *limite simple* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
  Ce résultat se note alors :

$$(u_n) \underset{I}{\overset{CVS}{\rightarrow}} u$$

Exemples : Convergence simple des suites (u_n) suivantes :

• $u_n(t) = t^n$ sur $[0,\ 1]$	• $u_n(t) = \dfrac{t^n}{1+t^n}$ sur $\mathbb{R}^+$	• $u_n(t) = n^2 t^n (1-t)$ sur $[0,\ 1]$

Exercice : 1

($\heartsuit$) Etudier la convergence simple de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\left\{\begin{array}{l} u_n(t) = (1-\frac{t}{n})^n \text{ pour } t\in[0,\ n[\\ u_n(t)=0 \text{ pour } t\geq n\end{array}\right.$.

THÉORÈME : **Unicité de la limite simple**
La limite d'une suite de fonction $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant simplement sur I est UNIQUE.
Elle est appelée la *limite simple* de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Abréviation : "à partir d'un certain rang" sera noté "APCR".

PROPOSITION : **Propriétés conservées par CVS**

Soit $(u_n) \underset{I}{\overset{CVS}{\rightarrow}} u$.

- Positivité : Si $u_n\geq 0$ sur I (APCR) alors $u\geq 0$ sur I.
- Croissance : Si les u_n sont croissantes sur I (APCR) alors u l'est aussi.
- Parité : Si les u_n sont paires (resp. impaires) sur I (APCR) alors u l'est aussi.
- Convexité : Si les u_n sont convexes sur I (APCR) alors u l'est aussi.

Preuve : Ces propriétés d'obtiennent par simple passage à la limite.

ATTENTION : D'autres propriétés ne sont pas automatiquement conservées...

- Il n'y a pas toujours conservation de la continuité.

  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n(t)=t^n$ sur $[0,\ 1]$.

- Il n'y a pas toujours conservation de la bornitude.

  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n(t)=\left\{\begin{array}{l} e^t \text{ sur } [0,\ n] \\ 0 \text{ sur }]n,\ +\infty[\end{array}\right.$ sur $\mathbb{R}^+$.

- L'intégrale de la limite n'est pas toujours la limite des intégrales.

  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n(t)=n^2t^n(1-t)$ sur $[0,\ 1]$.

2. La convergence uniforme : (CVU)

(a) Définition et caractérisation :

DÉFINITION : Convergence uniforme (CVU)

- On dit qu'une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{F}(I,\ \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ converge uniformément vers u lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N \quad \text{on a} \quad \forall x \in I,\ |u_n(x) - u(x)| \leq \varepsilon$$

- La limite u est temporairement appelée la *limite uniforme* de (u_n) et on note :

$$(u_n) \overset{CVU}{\underset{I}{\to}} u$$

Remarques :

- La CVU diffère de la CVS du fait de la place de "$\forall x \in I$" dans la définition. C'est une notion de convergence « GLOBALE ».

- Dire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{CVU}{\underset{I}{\to}} u$ revient à dire que $(u_n - u)_{n\in\mathbb{N}} \overset{CVU}{\underset{I}{\to}} \tilde{0}$.

THÉORÈME : Egalité entre limite simple et limite uniforme

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{CVU}{\underset{I}{\to}} u \quad \Rightarrow \quad (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{CVS}{\underset{I}{\to}} u$$

Lorsqu'une suite converge unif^t, elle converge simpl^t et sa limite uniforme est sa limite simple.

Preuve : Qui peut le plus peut le moins...

THÉORÈME FONDAMENTAL : Caractérisation de la CVU

On a l'équivalence :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \overset{CVU}{\underset{I}{\to}} u \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} u_n - u \text{ est bornée APCR} \\ \|u_n - u\|_{\infty,I} \to 0 \end{cases}$$

Preuve :

Remarque : La CVU correspond donc à la convergence de (u_n) pour la norme uniforme sur $\mathcal{B}(I,\ \mathbb{K})$.

Méthodes pour montrer la CVU

- On commence par déterminer u la limite simple de (u_n)
- On s'intéresse alors à $\|u_n - u\|_{\infty,I}$

$\rightarrow$ Méthode 1 : Par calcul (si c'est possible et rapide !)

On calcule $\|u_n - u\|_{\infty,I}$ à l'aide du tableau de variations de $u_n - u$.

$\rightarrow$ Méthode 2 : Par majoration

On fixe $t \in I$ puis on majore $|u_n(t) - u(t)| \leq \cdots \leq \alpha_n$ (indépendante de t).
On en déduit que $\|u_n - u\|_{\infty,I} \leq \alpha_n$
On vérifie alors que $\alpha_n \to 0$.

Exemples : CVU par CALCUL de la norme infinie

1. Etudier la CVU de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(t) = t^n$ sur $[0,\ 1]$, $[0,\ 1[$ et sur $[0,\ a]$ pour $a \in]0,\ 1[$.
2. Etudier la CVU de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(t) = n^2 t^n (1-t)$ sur $[0,\ 1]$, $[0,\ 1[$ et sur $[0,\ a]$ pour $a \in]0,\ 1[$.

• $u_n(t) = t^n$	• $u_n(t) = n^2 t^n (1-t)$

Exemple : CVU par MAJORATION de la norme infinie

Montrer la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n(t) = \dfrac{t+n}{n(1+t^2)}$.

• CVS	• CVU

Exercice : 2

($\heartsuit\heartsuit$) Soit (f_n) la suite de fonctions de $\mathcal{F}([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ définie par $\begin{cases} f_0 = \tilde{0} \\ f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - f_n^2(x)\right) \end{cases}$.

i. Montrer que la suite (f_n) converge simplement sur $[0,\ 1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
ii. Pour gagner du temps, on admet ici que pour tout $n \geq 1$, nous avons :

$$0 \leq f_n(x) - \sqrt{x} \leq \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)^n$$

Montrer que (f_n) converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0,\ 1]$.

Théorème : NON-CVU

Si $\exists (x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n(x_n) - u(x_n) \not\to 0$, alors (u_n) ne converge pas uniformément vers u sur I.

Preuve : Par contraposée.

Méthode pour montrer la NON-CVU

Pour montrer qu'une suite (u_n) ne converge pas uniformément vers sa limite simple u sur I, on peut :

- Soit directement prouver que $\|u_n - u\|_{\infty,I} \not\to 0$ en calculant ou en minorant $\|u_n - u\|_{\infty,I}$
- Soit rechercher $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n(x_n) - u(x_n) \not\to 0$

  ♡ *On choisit (x_n) qui tend vers le point où la CVU semble poser problème.*

Exemples : NON-CVU à l'aide d'une suite (x_n)

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(t) = t^n$ ne converge pas uniformément vers $\tilde{0}$ sur $[0, 1[$
2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(t) = n^2 t^n (1-t)$ ne converge pas uniformément vers $\tilde{0}$ sur $[0, 1[$

• $u_n(t) = t^n$	• $u_n(t) = n^2 t^n (1-t)$

Exercice : 3

(♡) **Exo 11 de la banque CCINP**.

Etudier le mode de convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}$:

- sur $[1,\ +\infty[$
- sur $\mathbb{R}^{+*}$

sur $[1,\ +\infty[$	sur $\mathbb{R}^{+*}$

Exercice : 4

(♡) Etude de la convergence uniforme de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n(t) = nt(1-t)^n$ sur $I = [0,\ 1]$.

Etape 1 : CVS vers $\tilde{0}$:

Etape 2 : On montre qu'il n'y a pas convergence uniforme sur I

- En calculant $\|u_n - u\|_{\infty,I}$ et en montrant que la limite n'est pas nulle.

- En vérifiant que $u_n(\frac{1}{n}) - u(\frac{1}{n}) \not\to 0$.

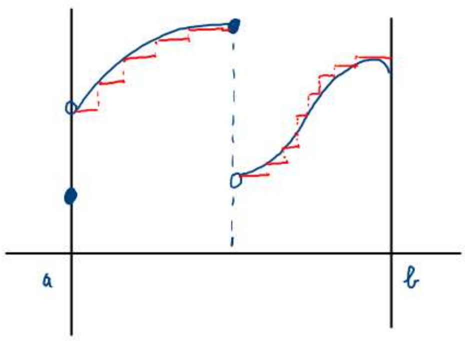
Etape 3 : On montre qu'il y a convergence uniforme sur $[a,\ 1]$ avec $a > 0$.

(b) CAS usuels de CVU

THÉORÈME : **Pour les fonctions continues par morceaux sur** $[a, b]$

Toute fonction $f \in C_m([a,\ b],\ \mathbb{K})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

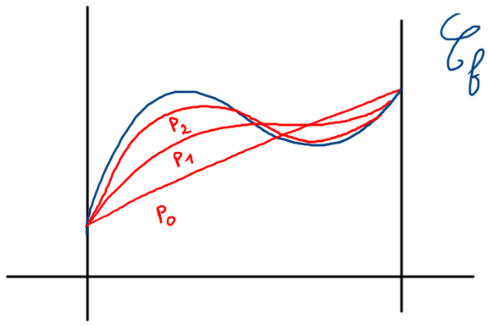
Preuve : Vue en MPSI lors de la construction de l'intégrale de Riemann d'une f° $\mathcal{C}_m$ sur un segment.



THÉORÈME : **Théorème d'approximation de Weierstrass** ♡

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{K})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales.

Preuve : **Non exigible**
On prouve (par exemple) qu'une fonction f continue sur $[0,\ 1]$ est limite uniforme de la suite des polynômes de Bernstein associée. La démonstration fait l'objet de nombreux problèmes.



Voir l'exercice 48 de la banque CCINP.

Exercice : 5

($\heartsuit$) Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$.
Montrer que f est limite simple d'une suite de fonctions polynômiales.

Preuve : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
D'après Weierstrass sur $[-n,\ n]$ il existe un polynôme P_n tel que $\|P_n - f\|_{\infty,[-n,n]} \leq \frac{1}{n}$.
On vérifie alors que $(P_n) \underset{\mathbb{R}}{\overset{CVS}{\to}} f$.

3. Bilan : Pour les suites de fonctions définies sur un intervalle I, on distingue deux modes de convergence :

$$\begin{cases} \text{la convergence simple (CVS)} \\ \text{la convergence uniforme (CVU)} \end{cases}$$

Bilan à connaître PARFAITEMENT :

- Pour montrer la convergence simple (CVS) sur I :

  On étudie la convergence simple d'une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en s'intéressant, pour tout $t \in I$ à la convergence de la suite numérique $(u_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$.
  La limite $u(t)$ obtenue permet de définir une fonction u appelée la limite simple de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

  Lorsqu'une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers u, on peut alors étudier :

- Pour montrer la convergence uniforme (CVU) sur I :

  $\to$ Soit en calculant $\|u_n - u\|_{\infty,I}$, puis en montrant que $\|u_n - u\|_{\infty,I} \to 0$.
  $\to$ Soit en majorant $|u_n(t) - u(t)|$ sur I par une suite (α_n) (indépendante de t) qui tend vers 0.

- Pour montrer la NON convergence uniforme (NON-CVU) sur I :

  $\to$ Soit en recherchant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n(x_n) - u(x_n) \not\to 0$.
  $\to$ Soit en vérifiant que $\|u_n - u\|_\infty \not\to 0$ par calcul ou minoration.
  $\to$ Soit en montrant que u ne vérifie pas l'une des propriétés impliquées par la CVU. (cf plus loin)

2 Séries de fonctions

Dans cette partie, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$.

- Les deux notions de CVS et de CVU se transfèrent naturellement aux séries de fonctions.

- Cependant, la non-connaissance de la somme S permet difficilement de prouver que $\|S_n - S\|_{\infty,I} \to 0$.
  On distingue donc un troisième type de convergence (globale) appelée « convergence normale » (CVN), assez simple à prouver, et qui implique la CVU.

- L'impossibilité d'exprimer la somme S de la série à l'aide des fonctions usuelles rend difficile son étude. Heureusement, la CVU de la série (lorsqu'elle sera avérée) nous permettra d'étudier la régularité de S, ses limites aux bornes de I et d'en calculer des intégrales. Ces théorèmes seront vus dans les parties suivantes de ce chapitre.

1. Présentation :

DÉFINITION : **Série de fonctions**

La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ est la suite de fonctions (S_n) avec $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.

Notation : Cette série est notée $\sum\limits_{n\geq n_0} u_n$ ou parfois $\sum u_n$ et S_n est appelée la *somme partielle* de la série.

Exemple : Etude de la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ où $u_n(t) = t^n$.

Contrairement à la limite d'une suite de fonctions, un dessin ne permet pas de visualiser la somme d'une série de fonctions.

2. La convergence simple : (CVS)

Pour une série de fonctions $\sum u_n$

DÉFINITION : **Convergence simple (CVS) sur I**

Lorsque (S_n) converge simplement sur I, on dit que la série CVS (ou "converge") sur I.

Notation : $\sum u_n$ CVS sur I. (on ne précise pas vers quoi !)

Somme de la série :

- La limite S de (S_n) est appelée la *somme* de la série et est notée $S = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- Il s'agit de la fonction S définie par :

$$\forall t \in I, \quad S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$$

En général, contrairement au cas des suites de fonctions, nous ne pouvons obtenir une expression de $S(t)$ à l'aide des fonctions usuelles.

Méthode pour prouver la CVS sur I d'une série de fonction $\sum u_n$

- On fixe $t \in I$
- On montre que la série $\sum u_n(t)$ converge

PROPOSITION : **Condition Nécessaire de convergence**

$$\sum u_n \text{ CVS sur } I \quad \Rightarrow \quad u_n \underset{I}{\overset{CVS}{\rightarrow}} \tilde{0}.$$

Preuve : Immédiat !

Exemple : Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}$ de la série $\sum u_n$ avec $u_n(t) = \dfrac{1}{1+t^n}$.

DÉFINITION : **Reste de rang n**

- Lorsque $\sum u_n$ converge simplement vers S, on définit le *reste de rang n* par : $R_n = S - S_n$.
  On a alors :
  $$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$$
- Lorsqu'une série CVS, on a alors : $S = S_n + R_n$ avec $R_n \underset{I}{\overset{CVS}{\rightarrow}} \tilde{0}$.

Remarque

Il arrivera désormais de définir une fonction par l'expression $f = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

Son ensemble de définition est alors :

$$\mathcal{D}_f = \{t \in \mathbb{R} \mid \sum u_n(t) \text{ converge}\}$$

Exemple : Etudier l'ensemble de définition de la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^x}$.

Comme pour les suites de fonctions, nous devrons faire appel à la CVU pour $\left\{\begin{array}{l}\textit{intégrer} \\ \textit{étudier la régularité}\end{array}\right.$ *de* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

---

3. La convergence uniforme : (CVU)

DÉFINITION : **Convergence uniforme**

On dit que $\sum u_n$ converge uniformément (CVU) sur I lorsque (S_n) converge uniformément sur I.

Théorème : **Converge uniforme** :

$$\sum u_n \text{ converge uniformément sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \sum u_n \text{ converge (simplement) sur } I \\ R_n \text{ est borné APCR} \\ R_n \underset{I}{\overset{CVU}{\to}} \tilde{0} \quad \text{c'est à dire} \quad \|R_n\|_{\infty,I} \to \tilde{0} \end{cases}.$$

Preuve : Immédiat d'après la caractérisation de la CVU d'une suite de fonctions.

⚠ *Contraitrement aux cas des suites de fonctions où l'étude de la CVU ne pose pas de réelle difficulté, étudier la CVU d'une série de fonctions est compliquée du fait que R_n n'est en général pas connu.*

Méthode : Pour prouver la CVU d'une série de fonctions sur I

→ M1 : ♡ Soit en prouvant la convergence normale *(le plus souvent utilisé : cf plus loin)*

→ M2 : ♡ Soit par majoration uniforme du reste dans le cas des séries vérifiant CSSA

$$\|R_n\|_{\infty,I} \leq \|u_{n+1}\|_{\infty,I} \leq \alpha_n \to 0$$

→ (M3) : Beaucoup plus rarement, en calculant $\|R_n\|_{\infty,I}$ et en montrant que $\|R_n\|_{\infty,I} \to 0$

→ (M4) : Cas particulier des Séries Entières (vu en fin d'année)

♡ *Contrairement aux suites de fonctions, on constate qu'il est possible de prouver la CVU d'une série sans avoir besoin ni de calculer sa somme.*

Exercice : 6

($*$) **Exemple rare où il est possible de calculer la somme S**

Soit la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $u_n(t) = e^{-nt}$.

1. Montrer que $\sum u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Montrer que $\sum u_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ lorsque $a > 0$.

On calcule R_n.

Exercice : 7

($*$) **Exemple où la série vérifie le CSSA**

1. Montrer que la série $\sum u_n$ où $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{n+t}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. Montrer que la série $\sum u_n$ où $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n n}{n^2+t}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Voir l'exercice 8 de la banque CCINP qui étudie le cas d'une série de fonctions vérifiant le CSSA.

Proposition : Condition Nécessaire de CVU

$$\sum f_n \text{ CVU sur } I \quad \Rightarrow \quad (f_n) \text{ converge uniformément vers } \tilde{0} \text{ sur } I.$$

Pour tout $x \in I$, on a :

$|f_n(x)| = |S_n(x) - S_{n-1}(x)| \leq |S_n(x) - S| + |S - S_{n-1}(x)|$

Méthode pour prouver la NON-CVU d'une série $\sum u_n$

On peut montrer la NON-CVU de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 en proposant une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$u_n(x_n) \not\to 0$$

On choisira la suite (x_n) telle que $x_n \to l$ la borne qui semble poser problème.

Exercice : 8

$(*)$ Montrer que $\sum u_n$ où $u_n(t) = e^{-nt}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice : 9

$(\heartsuit)$ Montrer que $\sum u_n$ où $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{1+nt}$ converge uniformément sur $[1, +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Voir l'exercice 17 de la banque CCINP.

4. La convergence normale : (CVN)

♡ L'étude de la convergence normale a pour UNIQUE BUT de prouver la CVU d'une série de fonctions sans avoir besoin de s'intéresser à $\|R_n\|_{\infty,I}$ ♡

Définition : Convergence normale (CVN)

On dit que $\sum u_n$ converge normalement (CVN) sur I lorsque les f° u_n sont bornées APCR et que :

$$\sum \|u_n\|_{\infty,I} \quad \text{converge}$$

Avantage : ♡ *L'étude de la CVN d'effectue sans avoir besoin de connaître la somme de la série* ♡

Remarques

- la CVN de $\sum u_n$ sur I correspond à la CVA de la série vectorielle $\sum u_n$ pour $\|.\|_{\infty,I}$.
- la CVN de $\sum u_n$ sur I implique la CVA de $\sum u_n(x)$ pour tout $x \in I$

Exemple : Montrer que la série $\sum f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx^2}}{1+n^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Méthode pour prouver la CVN de $\sum u_n$ sur I

Il s'agit de montrer que $\sum \|u_n\|_{\infty,I}$ converge.

- M1 : Par majoration :
  Soit $t \in I$, majorons $|u_n(t)| \leq \cdots \leq \alpha_n$ avec $\sum \alpha_n$ qui converge. (Méthode grossière !)

- M2 : Par le calcul : Etudions les variations de u_n.
  On en déduit $\|u_n\|_{\infty,I}$ et on vérifie la convergence de $\sum \|u_n\|_{\infty,I}$. (Méthode précise !)

Remarque : La méthode 2 permet également de vérifier qu'il n'y a pas CVN sur I.

Théorème Fondamental : CVN $\Rightarrow$ CVU

$$\sum u_n \text{ converge normalement (CVN) sur } I \quad \Rightarrow \quad \sum u_n \text{ converge uniformément (CVU) sur } I.$$

On a donc : $CVN \quad \Rightarrow \quad CVU \quad \Rightarrow \quad CVS.$

Preuve : On a bien la convergence uniforme (CVU), car pour tout t : $|R_n(t)| \leq \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_n\|_\infty \to 0.$

Remarque : Contrairement aux suites de f°, il n'est pas nécessaire d'étudier la CVS pour établir la CVU d'une série de f°.

Contre-exemple : La CVU n'implique pas la CVN !
Etudier la CVN sur $\mathbb{R}^{+*}$ et la CVU sur $\mathbb{R}^{+*}$ de la série $\sum f_n$ où $f_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{n+x}$.

CVN sur $\mathbb{R}^{+*}$	CVU sur $\mathbb{R}^{+*}$

Exercice : 10

($\heartsuit$) Etudier la convergence normale (CVN) des séries de fonctions suivantes :

1. $\sum u_n$ où $u_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{n^2+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.

2. $\sum u_n$ où $u_n(t) = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+t}$ sur $I = \mathbb{R}^+$.

Question : Comment prouver qu'une série ne converge pas normalement ?
On répond à cette question en recherchant une CN de CVN.

Proposition :

$$\sum u_n \text{ CVN sur } I \quad \Rightarrow \quad \forall (x_n) \in I^{\mathbb{N}},\ \sum |u_n(x_n)| \text{ CVG}$$

Preuve : $0 \leq |u_n(x_n)| \leq \|u_n\|_{\infty,I}$.

Méthodes pour prouver une NON-CVN sur I

Pour montrer que $\sum u_n$ ne converge pas normalement sur I, on peut :

- M1 : Montrer, en calculant ou en minorant $\|u_n\|_{\infty,I}$, que $\sum \|u_n\|_{\infty,I}$ diverge.
- M2 : Rechercher une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum |u_n(x_n)|$ diverge.

Exercice : 11

($*$) **Exercice 53 de la banque CCINP.**

Soit $0 < a < b \in \mathbb{R}$.
Etudier la convergence normale de la série $\sum \dfrac{x}{1+n^4x^4}$ sur $[a,\ b]$, sur $[a,\ +\infty[$ et sur $[0,\ +\infty[$.

CVN sur $[a,\ b]$	CVN sur $[a,\ +\infty[$	CVN sur $[0,\ +\infty[$

Après avoir présenté les divers modes de convergence d'une suite ou d'une série de fonctions, nous allons maintenant voir comment la CVU permet de prouver certaines propriétés de la somme S d'une série de fonctions $\sum f_n$.

Les applications de la CVU

Les théorèmes de transfert par CVU, présentés dans la partie suivante, vont nous permettre :

- D'étudier la régularité et les limites aux bornes de la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- D'intégrer sur un segment la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
- De proposer de nouvelles méthodes pour prouver la NON-CVU d'une suite de fonctions (u_n).

3 Transfert de bornitude, continuité et limite par CVU

Dans toute cette partie, on considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathcal{F}(I,\ \mathbb{K}))^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{I}{\overset{CVS}{\to}} u \quad \text{ou} \quad \sum u_n \underset{I}{\overset{CVS}{\to}} S$$

Ici, la CVU sur I va nous permettre :

→ de transférer la bornitude des u_n sur I à u ou à S
→ de transférer la continuité des u_n sur I à u ou à S
→ de déterminer les limites de u ou de S en un point de $\bar{I}$ à partir de celles des u_n.

1. Bornitude :

Théorème : **Transfert de bornitude par CVU** **Pour les suites**

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \underset{I}{\overset{CVU}{\to}} u \text{ avec les fonctions } u_n \text{ bornées sur } I \quad \Rightarrow \quad u \text{ est bornée sur } I$$

Preuve : Par convergence uniforme, il existe un n_0 pour lequel $|u_{n_0}(x) - u(x)| \leq 1$ pour tout $x \in I$.

Exemple : Etudier la bornitude de la limite simple de (u_n) définie par $\begin{cases} u_n(t) = \tan t \text{ sur } [0, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}] \\ u_n(t) = 0 \text{ sur }]\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$.

Que dire de la CVU de la suite (u_n) ?

A quoi sert ce théorème ?

La limite u de (u_n) étant connue en général, il n'est pas nécessaire d'utiliser ce théorème pour prouver sa bornitude. Mais alors, à quoi sert-il ?

- Il va nous servir à démontrer le théorème ci-dessous sur les séries de fonctions.
- Il permet de prouver la NON-CVU d'une suite de fonctions.
  En effet, il nous dit que si la limite simple d'une suite de f° bornées sur I n'est pas bornée alors il n'y a pas CVU sur I.

♡ Exemple : Existe-t-il une suite de fonctions polynomiales qui CVU vers $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0,\ 1]$?

Exercice : 12

$(*)$ **Exercice 13 de la banque CCINP**.

Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $\begin{cases} f_n(x) = n^3 x & \text{si } |x| \leq \frac{1}{n} \\ f_n(x) = \frac{1}{x} & \text{si } |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$.

1. Prouver que (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f à déterminer.
2. Cette convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

CVS ?
CVU ?

Théorème : **Transfert de bornitude par CVU** $\boxed{\textbf{Pour les séries}}$

$$\sum u_n \underset{I}{\overset{CVU}{\rightarrow}} S \text{ avec les fonctions } u_n \text{ bornées sur } I \quad \Rightarrow \quad S \text{ est bornée sur } I$$

Preuve : Les fonctions f_n étant bornées, les fonctions S_n le sont aussi.
On peut alors appliquer le théorème précédent à la suite (S_n).

Remarque : S n'étant en général pas connue, ce théorème en revanche sera utile pour prouver sa bornitude.

---

2. Transfert de continuité par CVU :

Lemme : **Transfert de continuité par CVU** **Pour les suites**

Lorsque $(u_n) \underset{I}{\overset{CVU}{\to}} u$ et $a \in I$:

- SI les fonctions u_n sont continues en a alors u est définie et continue en a.
- SI les fonctions u_n sont continues sur I alors u est définie et continue sur I.

Preuve : On décompose $|u(t) - u(a)| \leq |u(t) - u_n(t)| + |u_n(t) - u_n(a)| + |u_n(a) - u(a)|$.

Exemple : Etudier la continuité de la limite simple de la suite (u_n) définie sur $[0, 1]$ par $u_n(t) = t^n$.
Que dire de la CVU de la suite (u_n) ?

A quoi sert ce théorème ?

La limite u de (u_n) étant en général connue, il n'est pas nécessaire d'utiliser ce théorème pour prouver sa continuité. Mais alors, à quoi sert-il ?

- Il va nous servir à démontrer le théorème ci-dessous sur les séries de fonctions.
- Il permet de prouver la NON-CVU d'une suite de fonctions.
  En effet, il nous dit que si la limite simple d'une suite de f° continues sur I n'est pas continue alors il n'y a pas CVU sur I.

Voir aussi l'exercice 9 de la banque CCINP.

Théorème : **Transfert de continuité par CVU** **Pour les séries**

Si $\begin{cases} \text{les fonctions } u_n \text{ sont continues sur } I \\ \sum u_n \text{ CVU sur } I \end{cases}$ alors la somme $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est $\begin{cases} \text{définie} \\ \text{continue} \end{cases}$ sur I

Preuve : Si les fonctions u_n sont continues, alors les S_n le sont aussi.
On peut alors appliquer le théorème de transfert de continuité à la suite (S_n).

Exercice : 13

$(*)$ Soit la fonction f définie par $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2n+1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f est continue sur $[0, 1]$.

A quoi sert ce théorème ?

La somme d'une série de fonctions $\sum u_n$ étant en général inconnue :

- Ce théorème est indispensable pour étudier sa continuité
- Contrairement aux suites de fonctions, on ne peut pas prouver la NON-CVU de $\sum u_n$ en étudiant la non-continuité de la somme.

ATTENTION : Etude de la continuité d'une somme finie/infinie de fonctions

- Somme finie : $f = \sum_{n=0}^{N} f_n$ (avec les théorèmes généraux)

  La continuité des fonctions f_n sur I suffit à prouver la continuité de la somme f sur I.
- Somme infinie : $f = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ (avec la CVU)

  A la continuité des fonctions f_n sur I, il faut ajouter la CVU de $\sum f_n$ sur I.

---

3. Continuité par CVU sur « tout segment » :

Idée : En cas de "borne à problème" pour prouver la CVU, il est possible de prouver la continuité en se plaçant sur des "segments" qui ne contiennent pas cette borne.

Définition : **CVU sur tout "segment"**

On dit que (u_n) *CVU sur tout segment* de I vers u lorsque $u_n \underset{[a,\ b]}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} u$ pour tout $[a,\ b] \subset I$

Intérêt : La CVU sur tout segment de I suffit à prouver la continuité sur I.

Erreur Fréquente !!

⚠ Ne jamais dire : « la CVU sur tout segment de I implique la CVU sur I » !!

Contre-exemple usuel : (u_n) où $u_n(t) = t^n$ sur $[0,\ 1[$

THÉORÈME : **La CVU sur tout segment implique la continuité de la limite sur I**

$\left\{\begin{array}{l}\text{Une suite}\\ \text{Une série}\end{array}\right.$ de f° continues qui CVU sur tout segment de I converge vers une fonction continue sur I.

Preuve : Car la continuité en tout point de I entraîne la continuité sur I.

Remarque : Limitation à tout intervalle dont la réunion couvre I

Dans les cas suivants, on pourra remplacer « sur tout segment $[a, b]$ » par :

- Pour $I = \mathbb{R}$:
  → Tout segment de la forme $[-a, a]$ avec $a > 0$ lorsque $\pm\infty$ sont des « bornes à problème »
- Pour $I = \mathbb{R}^{+*}$:
  → Tout intervalle de la forme $]0,\ a]$ avec $a > 0$ lorsque $+\infty$ est la « borne à problème »
  → Tout intervalle de la forme $[a,\ +\infty[$ avec $a > 0$ lorsque 0 est la « borne à problème »

Exercice : 14

($*$) Montrer que la fonction f définie par $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{2n+1}$ est continue sur $]-1,\ 0]$.

Exercice : 15

($*$) Définition et continuité de f définie par $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{(2n+1)!}$.

4. Limite aux bornes par CVU :

La situation :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui CVS vers u sur I.
- $\sum u_n$ est une série qui CVS vers S sur I
- a est une extrémité (éventuellement infinie) de I.

L'objectif : Déterminer la limite de u ou de S en a.

LEMME : **Pour les suites (u_n)**

$$\left\{\begin{array}{l} u_n \overset{CVU}{\underset{I}{\rightarrow}} u \\ \\ u_n(t) \xrightarrow[t\to a]{} l_n \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} (l_n) \text{ converge vers } l \in \mathbb{K} \\ \\ u(t) \xrightarrow[t\to a]{} l \end{array}\right.$$

Autre nom du théorème

On peut voir ce théorème comme un théorème d'échange de limites : "la limite en a de la limite d'une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à la limite de la suite des limites en a des u_n".

$$\lim_{t\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} u_n(t)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{t\to a} u_n(t)\right)$$

On appelle donc parfois ce théorème $\boxed{\text{le théorème de la double limite}}$.

Preuve : Cette démonstration est désormais hors-programme.
Je la présente tout de même pour satisfaire la curiosité de les plus curieux d'entre-vous...

- Travail sur la suite (l_n) :
  - $\rightarrow$ On commence par vérifier que (l_n) est bornée :
    Prenons $\varepsilon = 1$.
    En appliquant la CVU, on a facilement pour $n \geq N$ et $\forall t \in I$ $|u_n(t) - u_N(t)| \leq 2$.
    On fait alors tendre $t \to a$ pour obtenir $|l_n - l_N| \leq 2$ et donc la bornitude de (l_n).
  - $\rightarrow$ On applique alors Bolzano-Weierstrass pour en extraire une suite extraite $l_{\varphi(n)} \to l_\infty$.
- On montre alors que $u(t) \xrightarrow[t\to a]{} l_\infty$:
  - $\rightarrow$ Soit $\varepsilon > 0$. On souhaite majorer $|u(t) - l_\infty|$ par ε au voisinage de a.
    On décompose : $|u(t) - l_\infty| \leq |u(t) - u_{\varphi(n)}(t)| + |u_{\varphi(n)}(t) - l_{\varphi(n)}| + |l_{\varphi(n)} - l_\infty|$.
  - $\rightarrow$ Par CVU : pour $n \geq N$ et pour tout t : $|u(t) - u_n(t)| \leq \varepsilon$ et donc $|u(t) - u_{\varphi(n)}(t)| \leq \varepsilon$.
    D'autre part, il existe un voisinage de a sur lequel, on a $|u_{\varphi(n)}(t) - l_{\varphi(n)}| \leq \varepsilon$.
    Enfin, pour $n \geq N'$, on a $|l_{\varphi(n)} - l_\infty| \leq \varepsilon$.
    On peut alors conclure...
- Enfin, on a $l_n \to l_\infty$ car (l_n) est une suite bornée avec l_∞ pour unique valeur d'adhérence.
  En effet, la valeur d'adhérence l_∞ est unique car c'est LA limite de $u(x)$ en a.

A quoi sert ce théorème ?

La limite u de (u_n) étant connue en général, il n'est pas nécessaire d'utiliser ce théorème pour déterminer ses limites aux bornes. Mais alors, à quoi sert-il ?

- Principalement : A démontrer le théorème permettant d'étudier les limites aux bornes de la somme d'une série de fonctions.
- Mais aussi : A prouver la NON-CVU d'une suite de fonctions.

$\rightarrow$ Si $\left\{\begin{array}{l} u_n \overset{CVS}{\underset{I}{\rightarrow}} u \\ u_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n \end{array}\right.$ avec (l_n) qui diverge, alors il n'y a pas CVU au $\mathcal{V}(a)$ et donc sur I.

$\rightarrow$ Si $\left\{\begin{array}{l} u_n \overset{CVS}{\underset{I}{\rightarrow}} u \\ u_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n \end{array}\right.$ avec $u(x) \to l \notin \mathbb{K}$, alors il n'y a pas CVU au $\mathcal{V}(a)$ et donc sur I.

Exemple : Montrer qu'il n'existe pas de suite de f° polynomiales qui CVU vers $f/f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0,\ 1]$.

THÉORÈME : **Pour les séries $\sum u_n$**

$$\begin{cases} \sum u_n \overset{CVU}{\underset{I}{\to}} S \\ \\ u_n(t) \xrightarrow[t\to a]{} l_n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum l_n \text{ converge vers une limite } l \in \mathbb{K} \\ S(t) \xrightarrow[t\to a]{} \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} l_n \end{cases}$$

Preuve : On applique le théorème précédent aux sommes partielles.

Autre nom du théorème

On peut voir ce théorème comme un $\boxed{\text{théorème d'échange } \lim \leftrightarrow \sum}$.

$$\lim_{t\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{t\to a} u_n(t)\right)$$

Méthodes de recherche des limites de S aux bornes de I

Pour déterminer les limites de $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ aux bornes de son ensemble de définition.

On peut envisager :

- M1 : Le théorème de limite aux bornes par CVU
- M2 : Un encadrement de $S(x)$
  → soit par des intégrales lorsque $t \mapsto u_t(x)$ est C_m et décroissante pour $t \geq n_0$
  → soit par S_0 et S_1 ou S_1 et S_2... lorsque la série vérifie le CSSA
  → soit en encadrant les termes $u_n(t)$
- M3 : D'autres méthodes rencontrées en exercice et évoquées dans l'un des documents de synthèse distribués en fin de chapitre.

Exercice : 16

(♡) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+x^2}$.

Preuve :

Exercice : 17

(♡) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

1. En utilisant le théorème de limite aux bornes par CVU.

Preuve :

2. En utilisant un encadrement simple obtenu par CSSA.

Preuve :

Méthode pour prouver la non-CVU de $\sum u_n$ sur I

Si $\sum u_n$ CVS sur $[a,\ b[$ avec $\begin{cases} u_n(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} l_n \\ \sum l_n \text{ diverge} \end{cases}$, c'est qu'il n'y a pas CVU au voisinage de b.

Exercice : 18

($\heartsuit$) Prouver que $\sum u_n$ où $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n x^n}{n}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,\ 1]$.

Preuve :

Exercice : 19

($\heartsuit$) Prouver que $\sum u_n$ où $u_n(t) = \dfrac{(-1)^n}{nt+1}$ ne converge pas uniformément sur $]0,\ 1]$.

Preuve :

Méthodes de recherche d'un équivalent de S aux bornes de I

Pour déterminer un équivalent de $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$ en x_0

On peut envisager :

- M1 : Encadrement par 2 intégrales.

  Uniquement lorsque $t \mapsto f_t(x)$ est $\begin{cases} \text{positive} \\ \text{décroissante} \end{cases}$ au $\mathcal{V}(+\infty)$.

- M2 : Lorsqu'on a une idée de la forme de l'équivalent à déterminer : $f(x) \sim \lambda u(x)$.

  On peut montrer que $\frac{f(x)}{u(x)}$ tend vers une limite finie en x_0.

  Comme $\frac{f}{u}$ est la somme de la série $\sum \frac{f_n}{u}$, on peut envisager le théorème « limite par CVU ».

  $\heartsuit$ *On peut en particulier envisager cette méthode si on pense que $f(x)$ est équivalente à $u_0(x)$, ce qui se produit lorsque la décroissance de $(u_n(x))_n$ est rapide.*

- M3 : Avec une relation fonctionnelle. (vu en exo)

Exercice : 20

(♡) **Par encadrement avec des intégrales**

Déterminer un équivalent de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ au voisinage de 1^+.

Preuve :

Exercice : 21

(♡) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2}$ est équivalente à $\frac{\pi}{2x}$ en $+\infty$.

1. **Par encadrement avec des intégrales**

   Preuve :

2. **Par conjecture de l'équivalent**

   Preuve : *Ca ne marche pas car il n'y a pas CVU de* $\sum \frac{x}{n^2+x^2}$ *sur* $[a,\ +\infty[$.

Exercice : 22

(♡) **Par conjecture de l'équivalent**

Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ à 2 termes de f définie par $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nt+1}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

On pourra étudier $g(t) = t(f(t) - 1)$ *en* $+\infty$.

Preuve :

Exercice : 23

($*$) **Par conjecture de l'équivalent**

Déterminer un développement asymptotique en $+\infty$ à 2 termes de la fonction zeta.

Preuve :

Exercice : 24

(♡) **Avec une relation fonctionnelle**

Déterminer un équivalent de f en 0 et en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$.

On admet pour gagner un peu de temps que f :

– est décroissante et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
– vérifie pour tout $x > 0$: $f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x}$.

Preuve :

4 Intégration et CVU

Idée : La convergence uniforme va nous permettre

- De passer à la limite à l'intérieur d'une intégrale de la forme $\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t$.
- De justifier un échange des symboles $\sum$ et $\int$.

Ici, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions définie et continue sur $I = [a,\ b]$

THÉORÈME : **Passage à la limite sous l'intégrale par CVU**

Lorsque $\begin{cases} (u_n) \underset{[a,\ b]}{\overset{CVU}{\to}} u \\ \text{les } u_n \text{ sont CONTINUES sur } [a,\ b] \end{cases}$ alors $\displaystyle\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t \to \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$.

Preuve : Immédiat par majoration.

Autre nom du théorème

On peut également voir ce théorème comme un $\boxed{\text{théorème d'échange limite} \leftrightarrow \text{intégrale}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \big(\lim_{n\to+\infty} u_n(t)\big)\,\mathrm{d}t$$

Remarque : Vérifions l'importance des 3 hypothèses : $\begin{cases} \text{intégration sur un segment } [a,\ b] \\ \text{continuité des } f_n \text{ sur } [a,\ b] \\ \text{CVU} \end{cases}$.

- Intégration sur un segment $[a,\ b]$: Le théorème ne s'applique donc pas lorsque les intégrales sont généralisées.

  Exemple : (u_n) définie par $u_n(t) = \dfrac{1}{n}e^{-\frac{t}{n}}$ sur $[0,\ +\infty[$.

- Continuité des u_n : Cette continuité est nécessaire pour garantir l'existence de $\displaystyle\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}t$ (par transfert $\mathcal{C}^0$)

- CVU des u_n : Le théorème ne s'applique donc pas s'il n'y a pas CVU de (u_n).

  Exemple : (u_n) définie sur $[0,\ 1]$ par $\begin{cases} u_n(x) = n - n^2x \text{ pour } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ u_n(x) = 0 \text{ pour } x \in]\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$.

Exercice : 25

($\heartsuit$) Sans calculer l'intégrale, déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t+n}{n(1+t^2)}\ \mathrm{d}t$.

Voir l'exercice 10 de la banque CCINP.

Méthode de passage à la limite dans l'intégrale par convergence dominée

Nous utiliserons plus tard le *théorème de convergence dominée* qui repose sur des hypothèses moins restrictives :
- l'intégration se fait sur un intervalle quelconque I (plus nécessairement un segment)
- la CVS suffit (plus besoin de la CVU)
- les fonctions u_n doivent être C_m (plus nécessairement continues)

THÉORÈME : **Intégration Terme à Terme (ITT) par CVU**

Lorsque $\begin{cases} \sum u_n \xrightarrow[{[a,\ b]}]{CVU} S \\ \text{les } u_n \text{ sont CONTINUES sur } [a,\ b] \end{cases}$ alors $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\ \mathrm{d}t.$

Preuve : On applique le théorème précédent à la suite (S_n).

Exemple : Montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} x^n\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Exercice : 26

($\heartsuit$) Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t})\ \mathrm{d}t$.

Preuve :

Voir l'exercice 14 de la banque CCINP.

Méthode d'ITT par intégrabilité

On utilisera plus tard le *théorème d'ITT par intégrabilité* qui repose sur des hypothèses moins restrictives :

- L'intégration se fait sur un intervalle quelconque I (plus nécessairement un segment)
- Les fonctions u_n sont seulement "intégrables" sur I (plus nécessairement continues)
- la série $\sum \int_I |u_n|$ converge (nouvelle hypothèse !)

5 Dérivation et dérivées successives par CVU

BUT : Présenter comment la CVU permet de transférer le caractère $\begin{cases} \mathcal{C}^1 \\ \mathcal{C}^p \\ \mathcal{C}^\infty \end{cases}$ des u_n à $\begin{cases} \text{la limite simple } u \\ \text{la somme } S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{cases}$.

ATTENTION : ⚠ Ce n'est pas la CVU de (u_n) ou de $\sum u_n$ qui sera nécessaire.

1. Transfert $\mathcal{C}^1$ par CVU :

Lemme : CVU de la suite des primitives

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(\varphi_n) \to \varphi$ une suite de fonctions de $\mathcal{F}(I,\ \mathbb{K})$.
On définit pour $a \in I$:

$$\Phi_n(x) = \int_a^x \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Phi(x) = \int_a^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t$$

Lorsque $\begin{cases} \varphi_n : I \to \mathbb{K} \text{ continues sur } I \\ (\varphi_n) \overset{CVU}{\to} \varphi \text{ sur tout segment de } I \end{cases}$ alors $(\Phi_n) \overset{CVU}{\to} \Phi$ sur tout segment de I.

Preuve : On considère $[\alpha,\ \beta] \subset I$ avec $a \in [\alpha,\ \beta]$.
On majore $|\displaystyle\int_a^x \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t - \int_a^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t|$ pour tout $x \in [\alpha,\ \beta]$ par $\alpha_n \to 0$.

⚠ *Ce n'est pas le théorème de passage à la limite sous l'intégrale précédente car ce lemme nous donne la CVU d'une suite de fonctions et pas seulement la CVG d'une suite numérique.*

Théorème : Transfert $\mathcal{C}^1$ par CVU $\boxed{\text{Pour les suites}}$

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions.

Lorsque $\begin{cases} u_n \text{ sont de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ (u_n) \text{ CVS vers } u \text{ sur } I \\ (u'_n) \text{ CVU sur tout segment de } I \end{cases}$ alors $\begin{cases} u \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\ (u'_n) \underset{I}{\overset{CVU}{\to}} u' \end{cases}$.

Preuve :

- On se ramène au lemme en posant $\varphi_n = u'_n$ et φ, continue sur I, la limite de (u'_n).
  On pose également $\Phi_n(x) = \displaystyle\int_a^x \varphi_n(t)\ \mathrm{d}t$ et $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x \varphi(t)\ \mathrm{d}t$.
- D'après le lemme, $\Phi_n \overset{CVU}{\to} \Phi \in \mathcal{C}^1$ sur tout SEGMENT de I.
- Or, $\Phi_n(x) = u_n(x) - u_n(a) \to u(x) - u(a) = \Phi(x)$.
- Ainsi, u est $\mathcal{C}^1$ et en dérivant on obtient $\varphi = u'$.

ATTENTION : ⚠ Ce n'est pas la CVU de (u_n) mais celle de (u'_n) qui est nécessaire.

Autre nom du théorème

On peut voir ce théorème comme un théorème d'échange « limite ↔ dérivée » :

$$\left(\lim_{n\to+\infty} u_n\right)' = \lim_{n\to+\infty} u_n'$$

Il n'existe pas de théorème prouvant seulement la dérivabilité de u.

PROPOSITION : Les mêmes hypothèses donnent aussi la CVU de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers u sur tout segment de I.

Preuve : Pour $[\alpha,\ \beta] \subset I$ et $x \in [\alpha,\ \beta]$, on a :
$|u_n(x) - u(x)| = |\Phi_n(x) + u_n(a) - \Phi(x) - u(a)| \leq |\Phi_n(x) - \Phi(x)| + |u_n(a) - u(a)|$ et donc :
$|u_n(x) - u(x)| \leq \|\Phi_n - \Phi\|_\infty + |u_n(a) - u(a)|$

• **Importance de la CVU de (u_n')**

⚠ Contrairement aux théorèmes précédents, la CVU de (u_n) ne suffit pas pour le transfert de dérivabilité.

Exemple : Pour s'en convaincre, on peut étudier la suite (u_n) définie par $u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME : **Transfert $\mathcal{C}^1$ par CVU** Pour les séries

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions qui CVS vers S sur I.

Lorsque $\begin{cases} \text{Les } u_n \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \sum u_n' \text{ CVU sur tout segment de } I \end{cases}$ alors $\begin{cases} S \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\ S' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n' \end{cases}$.

On a de plus $\sum u_n \overset{CVU}{\to} S$ sur TOUT SEGMENT de I.

Preuve : Corollaire quasi-immédiat du théorème précédent.

Autre nom du théorème

On peut voir ça comme un théorème d'échange $\sum$ ↔ dérivée :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$$

Voir l'exercice 16 de la banque CCINP.

Exercice : 27

$(*)$ Déterminer le tableau de variations de S définie par $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Preuve :

Etudier les limites aux bornes.

Preuve : Limite en 0^+ et $+\infty$:

- En 0^+ et $+\infty$: La série vérifiant la CSSA, on encadre $S_1(x) \leq S(x) \leq S_0(x)$:

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \leq S(x) \leq \frac{1}{t}$$

- En $+\infty$: Avec la CVU au voisinage de $+\infty$.

2. **Application** : Formule de l'exponentielle réelle

On définit la fonction e par $e(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Etude de la fonction e

Définition : La fonction e est définie sur $\mathbb{R}$ car la série CVS sur $\mathbb{R}$. (avec la règle de d'Alembert)

Dérivation : On note $u_n(x) = \dfrac{x^n}{n!}$.

- Les u_n sont $\mathcal{C}^1$ et $u_n'(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$
- Il est facile de montrer que $\sum u_n'$ CVU (avec la convergence normale) sur tout segment $[-a,\ a]$.
- On applique alors le théorème qui montre que :

$$e \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et pour tout } x \in \mathbb{R} : \quad e'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = e(x).$$

Conclusion : e est la solution de $y' = y$ qui vérifie $y(0) = 1$, c'est donc l'exponentielle réelle.

Théorème : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et en particulier $e = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

En MPSI vous aviez déjà démontré ce résultat grâce à l'inégalité de Taylor-Lagrange.

Remarque : L'exponentielle complexe a été définie de la même façon dans le cours sur les séries vectorielles.

3. Transfert $\mathcal{C}^p$ par CVU :

THÉORÈME : **Transfert $\mathcal{C}^p$ par CVU** Pour les suites

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions qui CVS vers u sur I et $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} \text{les } u_n \text{ sont } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \text{les suites } (u_n),\ (u_n'),\ \dots\ (u_n^{(p-1)}) \text{ CVS sur } I \\ \text{la suite } (u_n^{(p)}) \text{ CVU sur tout segment de } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \forall k \in [\![1,p]\!],\ (u_n^{(k)}) \overset{CVS}{\to} u^{(k)} \text{ sur } I \end{cases}.$$

⚠ *La CVU sur tout segment est uniquement nécessaire pour la suite $(u_n^{(p)})$.*

Preuve : Par récurrence.

Remarque : On obtient également la CVU des suites $(u_n^{(k)})$ sur tout segment de I pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$.

Autre nom du théorème

On peut voir ce théorème comme un théorème d'échange limite $\leftrightarrow$ dérivée pième :

$$\big(\lim_{n\to+\infty} u_n\big)^{(p)} = \lim_{n\to+\infty} u_n^{(p)}$$

COROLLAIRE : **Cas $\mathcal{C}^\infty$**

Pour montrer que u est $\mathcal{C}^\infty$ sur I, on montre que $(u_n^{(p)})$ CVU sur tout segment de I pour tout p.

D/ Immédiat

Application : Ces deux théorèmes sont inutiles pour les suites de fonctions car en général, la limite simple u est connue explicitement. Ils sont en revanche indispensables pour prouver les 2 théorèmes suivants sur les sommes de séries.

THÉORÈME : **Transfert $\mathcal{C}^p$ par CVU** Pour les séries

Soit $\sum u_n$ une série de fonctions que CVS vers S sur I et $p \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{cases} \text{les } u_n \text{ sont } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \sum u_n,\ \sum u_n',\ \dots\ \sum u_n^{(p-1)} \text{ CVS sur } I \\ \sum u_n^{(p)} \text{ CVU sur tout segment de } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} S \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \forall k \in [\![1,p]\!],\ S^{(k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)} \end{cases}.$$

⚠ *La CVU sur tout segment est uniquement nécessaire pour la série $\sum u_n^{(p)}$.*

Remarque : On obtient également la CVU des séries $\sum u_n^{(k)}$ sur tout segment de I pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$.

Autre nom du théorème

On peut voir ça comme un théorème d'échange $\sum \leftrightarrow$ dérivée pième :

$$\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)^{(p)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(p)}$$

Exemple : Etudier la convexité de de S définie par $S(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Preuve :

COROLLAIRE : **Cas $\mathcal{C}^\infty$**

Pour montrer que S est $\mathcal{C}^\infty$ sur I, on montrera que $\sum u_n^{(p)}$ CVU sur tout segment de I pour tout $p \in \mathbb{N}$.

D/ Immédiat

Exercice : 28

$(*)$ Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(\frac{x}{n})}{n^2}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve :

4. Application à l'étude de la fonction Zêta : Soit $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.

- Régularité :

PROPOSITION : ζ est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,\ +\infty[$ et pour tout p, nous avons : $\zeta^{(p)}(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-\ln n)^p}{n^s}$.

Preuve :

$\rightarrow$ ζ est clairement définie sur $]1,\ +\infty[$.

$\rightarrow$ On pose $u_n(s) = \frac{1}{n^s}$.
u_n est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1,\ +\infty[$ et pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on a : $u_n^{(p)}(s) = \frac{(-\ln n)^p}{n^s}$.

$\rightarrow$ Sur tout segment $[a,\ b] \subset]1,\ +\infty[$, on a $|u_n^{(p)}(s)| \leq \frac{(\ln n)^p}{n^a}$ avec $\sum \frac{(\ln n)^p}{n^a}$ converge.
Les séries $\sum u_n^{(p)}(s)$ convergent donc uniformément sur tout segment de $]1,\ +\infty[$.

- Monotonie :

PROPOSITION : La fonction ζ est strictement décroissante sur $]1,\ +\infty[$.

Preuve : Le théorème de dérivation donne : $\zeta'(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-\ln n}{n^s} < 0$.

- Convexité :

PROPOSITION : La fonction ζ est strictement convexe sur $]1,\ +\infty[$.

Preuve : Le théorème de dérivation multiple donne : $\zeta''(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^2 n}{n^s} > 0$

On peut déterminer les limites aux bornes à l'aide d'un encadrement de $\zeta(x)$ par 2 intégrales. Cependant, on présente d'autres méthodes ci-dessous.

- Etude asymptotique en $+\infty$:

Limite :

Proposition : $\zeta(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 1$

Preuve : Le théorème de la double limite ($\sum u_n$ CVU sur $[2,\ +\infty[$) donne :

$$\zeta(s) \xrightarrow[s\to+\infty]{} 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 1$$

Développement asymptotique :

Proposition : $\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + o(\frac{1}{2^s})$.

Preuve : On a $\zeta(s) - 1 = \frac{1}{2^s} + \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^s}$.
On montre alors que le reste est un $o(\frac{1}{2^s})$ soit par majoration par une intégrale soit en étudiant $2^s(\zeta(s)-1)$.

Pouvez-vous proposer une généralisation du développement asymptotique précédent ?

- Etude asymptotique en 1^+ :

Limite :

Proposition : $\zeta(s) \xrightarrow[s\to1^+]{} +\infty$

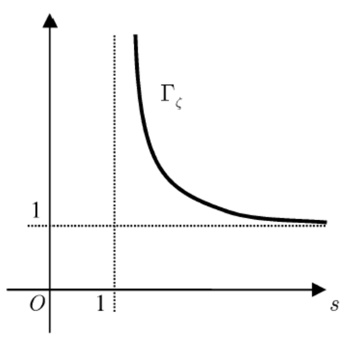
Preuve : Compte-tenu de la limite attendue, le théorème de limite par CVU ne s'applique pas.
Remarquons que par monotonie, la fonction ζ admet bien une limite en 1^+.
On minore $\zeta(s)$ par $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s}$ (pour tout n) puis passage à la limite $s \to 1^+$.

Equivalent :

Proposition : $\zeta(s) \sim \frac{1}{s-1}$ en 1^+.

Preuve : Méthode usuelle par encadrement par deux intégrales.

- Graphe :



Fonction ζ restreinte à la variable réelle

Complément : l'hypothèse de Riemann

La fonction ζ est liée aux nombres premiers par la relation suivante démontrée par Euler :

$$\forall s > 1, \quad \zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

Cette relation a permis à Riemann de donner une expression de la fonction de répartition des nombres premiers. Cette expression dépend des zéros de la fonction ζ étendue au plan complexe, qu'il faut donc tenter de déterminer.

- Il a été prouvé que les valeurs $-2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ sont des zéros de ζ étendue au plan complexe.
- L'hypothèse de Riemann prétend que les autres zéros sont tous sur la droite $x = \frac{1}{2}$.
  Cette hypothèse est encore à l'état de conjecture et un prix de 1 million de dollars attend le premier mathématicien qui permettra de la prouver ou de la contredire... A vous de jouer ! !

Voir la vidéo de la chaîne Youtube "Science étonnante" : "L'hypothèse de Riemann"