Réduction géométrique des $\begin{cases} \text{matrices} \\ \text{endomorphismes} \end{cases}$

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

16 novembre 2024

On considère ici E un $\mathbb{K}$-ev (où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) et $u \in \mathcal{L}(E)$.
L'objectif principal de ce chapitre est de rechercher, lorsque E est de dimension finie, des bases de E dans lesquelles la matrice de u est la plus *simple* possible. L'idée étant que, plus la matrice d'un endomorphisme est simple et plus il est facile d'étudier les propriétés de cet endomorphisme.

Les notions principales abordées, pour un endomophisme ou une matrice carrée, sont celles de :

- Sev stable par $u \in \mathcal{L}(E)$
- Endomorphisme induit
- Valeurs propres
- Vecteurs propres
- Sous-espaces propres
- Polynôme caractéristique
- Diagonalisabilité
- Trigonalisabilité

Questions de cours à maîtriser pour les colles :

- Ordre de multiplicité d'une valeur propre en dimension finie.
  Lien avec la dimension du sep associé
- Les Conditions Suffisantes de diagonalisabilité / non-diagonalisabilité usuelles (+ Justifications)
- Caractérisation de la diagonalisabilité d'"un endomorphisme
- Les éléments propres d'une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ à coefficients réels
- Caractérisation de la trigonalisabilité à l'aide du polynôme caractéristique
- Applications usuelles de la diagonalisabilité : calcul de A^k, recherche du commutant de A, résolution de $P(M) = A$

Un autre chapitre est consacré à la réduction des endomorphismes et des matrices mais aborde le problème sous un angle différent en s'intéressant à leurs polynômes annulateurs.

Table des matières

1 Compléments de MPSI

1. Le calcul matriciel par blocs

Méthode : Calcul par blocs

Il est possible d'additionner et de multiplier des matrices entre elles en les découpant en blocs compatibles et en effectuant les opérations comme s'il s'agissait de coefficients.

Exemple :

Exercice : 1

($*$) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1$ si et seulement si il existe $X, Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulles tels que $A = XY^T$.

Exercice : 2

($*$) Déterminer l'inverse de la matrice $M = \begin{pmatrix} I_n & A \\ (0) & I_n \end{pmatrix}$ où $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Somme de p sous-espaces vectoriels

Définition : **Somme Directe de n sev**

Soient $F_1, \ \dots, \ F_p$ des sous-espaces vectoriels de E.

- On définit : $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_p = \{x_1 + \cdots + x_p \mid \forall k \in [\![1,p]\!], \ x_k \in F_k\}$.
- Lorsque la décomposit° d'un élément de F est unique, le sev $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_p$ s'écrit :

$$F = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$$

On dit que $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe, ce qu'on écrit $F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$

Remarque : La loi $\oplus$ est associative.

C'est une simple généralisation du cas où $p = 2$ vu en MPSI.

Remarque : ⚠ Ne pas confondre l'opération $\oplus$ avec $\cup$.

Théorème : **Caractérisation**

Soit $F = F_1 + F_2 + \cdots + F_p$.
On a :

$$F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n \iff (x_1 + \cdots + x_n = 0_E \Rightarrow x_1 = \cdots = x_n = 0_E)$$

Preuve : Facile.

Méthode : Prouver que $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$

- On suppose que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ avec les $x_k \in F_k$
- On montre alors que tous les x_k sont nuls.

♡ Exemple : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que si $\lambda_1, \ \dots, \ \lambda_p \in \mathbb{K}$ sont distincts deux à deux, les sev $\ker(u - \lambda_p \, \mathrm{id}_E)$ sont en somme directe.

Proposition :

$$\dim(F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p) = \dim F_1 + \dots \dim F_p$$

Preuve : On concatène des bases des sev F_k.

Définition : **Sev supplémentaires**

Lorsque $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ on dit que les sev F_k sont supplémentaires.

Proposition : **Sev supplémentaires**

- Caractérisation :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p \iff \begin{cases} F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p \\ \dim E = \dim F_1 + \ldots \dim F_p \end{cases}$$

- Base de E : Lorsque $E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p$ on obtient une base de E en concaténant des bases des F_k.

  La base obtenue est appelée une *base adaptée à la décomposition.*

C'est une simple généralisation du cas où $p = 2$ vu en MPSI.

2 Les bonnes propriétés des matrices diagonales

- **Rang d'une matrice diagonale** :

Proposition : Le rang d'une matrice diagonale est égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls.

Exemple : Que vaut le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

- **Produit de deux matrices diagonales par blocs** :

Lemme : Lorsque les blocs carrés A_k et B_k sont de même taille pour tout $k \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\mathrm{Diag}(A_1,\ \ldots,\ A_p)\mathrm{Diag}(B_1,\ \ldots,\ B_p) = \mathrm{Diag}(A_1B_1,\ \ldots,\ A_pB_p)$$

D/ Il suffit de poser le calcul.

Corollaire : **Polynôme en une matrice diagonale par blocs**

Lorsque $A = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} A_1 & \ldots & A_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $A^k = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} A_1^k & \ldots & A_p^k \end{pmatrix}$.
- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$: $P(A) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} P(A_1) & \ldots & P(A_p) \end{pmatrix}$.

Preuve : Par récurrence sur p.

Remarque : En particulier pour les matrices diagonales

Soit $A = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} \lambda_1 & \ldots & \lambda_k \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors :

- Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $A^k = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} \lambda_1^k & \ldots & \lambda_k^k \end{pmatrix}$.
- Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$: $P(A) = \mathrm{Diag}\begin{pmatrix} P(\lambda_1) & \ldots & P(\lambda_k) \end{pmatrix}$.

Corollaire : **Inverse d'une matrice diagonale par blocs**

Si $D = \mathrm{Diag}(B_1,\ \ldots,\ B_p)$ est inversible, alors $D^{-1} = \mathrm{Diag}(B_1^{-1},\ \ldots,\ B_p^{-1})$.

Preuve : On justifie que les B_k sont inversibles et on calcule $\mathrm{Diag}(B_1,\ \ldots,\ B_p)\mathrm{Diag}(B_1^{-1},\ \ldots,\ B_p^{-1})$.

Exemple : Donner l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- **Commutant d'une matrice diagonale** :

PROPOSITION : **Commutant d'une matrice diagonale**

Soit $\lambda_1, \ \dots, \ \lambda_p \in \mathbb{K}$ distincts 2 à 2.
Le commutant de $\Delta = \text{Diag}\left(\lambda_1 I_{n_1}, \quad \dots, \quad \lambda_p I_{n_p}\right)$ est l'ensemble des matrices de la forme :

$$M = \text{Diag}\left(M_1, \quad \dots, \quad M_p\right) \quad \text{avec} \quad \forall k \in [\![1, p]\!], \ A_k \in \mathfrak{M}_{n_k}(\mathbb{K})$$

Preuve : Par récurrence sur p en recherchant M sous la forme $M = \begin{pmatrix} M_1 & A_2 & \dots & A_p \\ B_2 & & & \\ \vdots & & M' & \\ B_p & & & \end{pmatrix}$.

Exemple : Déterminer le commutant de $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Preuve :

COROLLAIRE :
Le commutant d'une matrice diagonale à coefficients distincts est l'ensemble des matrices diagonales.

D/ Immédiat !

- **Expression polynômiale** :

PROPOSITION : Soit $\Delta = \text{Diag}\left(\lambda_1 \quad \dots \quad \lambda_n\right)$ avec les λ_k distincts deux à deux.
Toute matrice diagonale D de $\mathfrak{M}_k(\mathbb{K})$ est un polynôme en Δ.

Preuve : Avec le polynôme de Lagrange qui transforme les λ_k en les coefficients de la diagonale de D.

Exemple : Exprimer $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ comme une expression polynômiale en $\Delta = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Preuve :

Exercice : 3
(♡) Montrer que le commutant de $A = \text{Diag}(\lambda_1, \ \dots, \ \lambda_n)$ de valeurs propres simples est l'ensemble des polynômes en A.

Preuve :

- **Produit par une matrice diagonale** :

PROPOSITION : Si $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$ et

Preuve : Simple calcul.

3 Sous-espaces stables

Idée : Déterminer des sous-espaces stables supplémentaires permet d'obtenir une matrice simple de u.

1. Définition :

DÉFINITION : **Sev stable par un endomorphisme**

On dit qu'un sev F de E est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$ lorsque $u(F) \subset F$.

Exemples :

- $\{0\}$ et E sont toujours stables.
- $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$.
- Tout sev F est stable par $\tilde{0}$, $\lambda\,\mathrm{id}_E$.
- $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par la dérivation
- Le support et la direction d'une projection ou d'une symétrie sont stables par celles-ci.
- le sev des suites bornées est stable par $\varphi : (u_n) \mapsto (u_{n+1})$

Proposition : si F et G sont stables par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $\left\{ \begin{array}{l} F \cap G \\ F + G \end{array} \right.$ le sont.

Preuve :

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Cas où 2 endomorphismes commutent**

Si $uv = vu$ alors $\left\{ \begin{array}{l} \ker u \\ \mathrm{Im}\, u \end{array} \right.$ sont stables par v.

Preuve : Facile.

Notation : Lorsque $u \in \mathcal{L}(e)$, on note $u^p = u \circ u \circ \cdots \circ u$ la composée de u, p fois avec lui même.

Corollaire : Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$, $\begin{cases} F = \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)^p \\ G = \operatorname{Im}(u - \lambda \operatorname{id}_E)^p \end{cases}$ sont stables par u pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Plus généralement, nous verrons que ce théorème s'applique pour tout polynôme en u.

Preuve : u et $(u - \lambda \operatorname{id}_E)^p$ commutent.

Anticipation : Les premiers sev stables par $u \in \mathcal{L}(E)$ recherchés seront ceux de la forme $E_\lambda = \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$.

---

2. Endomorphisme induit sur un sev stable :

Définition : **Endomorphisme induit**

Lorsque F est stable par $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $u_{|F} : F \to F$ est un endomorphisme de F.
On le note alors : u_F.

u_F est appelé *l'endomorphisme induit* par u sur F

Exemples :

- $u_{\ker u} = \tilde{0}$.
- L'endomorphisme induit par la dérivation des fonctions sur $F = \operatorname{Vect}(\cos, \sin)$.
  Donner sa matrice.
- L'endomorphisme induit par une projection sur son support et sa direction.
- L'endomorphisme induit par une symétrie sur son support et sa direction.

Proposition : **Endomorphisme induit par u sur $F = \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $F = \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ est un sous-espace stable par u
- L'endomorphisme induit par u sur F est l'homothétie de rapport λ : $u_F = \lambda \operatorname{id}_F$
- Lorsque $\dim F = p$, la matrice de u_F dans n'importe quelle base f de F est :

$$\operatorname{Mat}_f u_F = \lambda I_p$$

Preuve :

Proposition : **Endomorphisme induit par u sur $F = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)^p$**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- $F = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)^p$ est un sous-espace stable par u
- L'endomorphisme induit par u sur F est la somme de l'homothétie de rapport λ et d'un endomorphisme nilpotent n :

$$u_F = \lambda\,\mathrm{id}_F + n$$

Preuve : Ce résultat n'apparaît pas explicitement dans le programme, il faut donc savoir le redémontrer.

Nous verrons en fin de chapitre qu'il existe une base f de F dans laquelle la matrice de u_F est de la forme :

$$\mathrm{Mat}_f\, u_F = \begin{pmatrix} \lambda & x_1 & \cdots & x_p \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x_q \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Théorème : **Opérations**

Si F est stable par $\left\{\begin{array}{l} u \\ v \end{array}\right.$, alors F est stable par $\left\{\begin{array}{l} \lambda u \\ u+v \\ u \circ v \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} (\lambda u)_F = \lambda u_F \\ (u+v)_F = u_F + v_F \\ (u \circ v)_F = u_F \circ v_F \end{array}\right.$

D/ Facile.

<u>*Structure*</u> *: L'ensemble des endomorphismes laissant F stable est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.*

Proposition : Noyau et image d'un endomorphisme induit

Si F est stable par u, alors : $\left\{\begin{array}{l} \ker u_F = \ker u \cap F \\ \mathrm{Im}\, u_F \subset \mathrm{Im}\, u \cap F \end{array}\right.$.

D/ Facile.

Corollaire : u injectif $\Rightarrow u_F$ injectif.

⚠ FAUX pour la surjectivité ! (C-expl : la dérivation sur $\mathbb{K}[X]$ avec $F = \mathbb{K}_n[X]$)

---

3. <u>Caractérisation matricielle en dimension finie</u> : ici $\dim E < +\infty$

Théorème : **Caractérisation matricielle d'un sev stable**

Soit F un sev de E et $u \in \mathcal{L}(E)$.
On note $e = \mathcal{B}_F @ \mathcal{B}'$ une base de E dans laquelle $\mathcal{B}_F$ est une base de F.

$$F \text{ est stable par } u \in \mathcal{L}(E) \iff \operatorname{Mat}_e u \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} A & B \\ (0) & C \end{pmatrix}.$$

On a alors : $\begin{cases} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_F} u_F = A \\ \text{la matrice } A \text{ a la dimension de } F \end{cases}$.

Preuve : Facile

♡ *On constate que dans une telle base, la matrice de u commence à se simplifier.*

Théorème : **Cas où $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$**

Soit F_1, ..., F_m des sev supplémentaires dans E : $E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$.
On note $e = \mathcal{B}_1 @ \cdots @ \mathcal{B}_m$ une base adaptée.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$F_1, ..., F_m \text{ sont stables par } u \iff \operatorname{Mat}_e u \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} A_1 & (0) & \dots & (0) \\ (0) & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & A_m \end{pmatrix}.$$

On a alors pour tout $k \in [\![1, m]\!]$: $\begin{cases} \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_k} u_{F_k} = A_k \\ \text{les blocs } A_k \text{ ont la dimension des } F_k \end{cases}$.

Preuve : Facile.

♡ *On constate que dans une telle base, la matrice de u commence <u>sérieusement</u> à se simplifier.*

<u>Définition</u> : « Réduire $u \in \mathcal{L}(E)$ » consiste à déterminer (si possible) des sev F_1, ... F_m $\begin{cases} \text{supplémentaires} \\ \text{stables par } u \end{cases}$.

A retenir !

- Pour obtenir une matrice "simple" de $u \in \mathcal{L}(E)$, on rechercher si possible des sev $\begin{cases} \text{stables} \\ \text{supplémentaires} \end{cases}$.

  $$E = F_1 \oplus \cdots \oplus F_m$$

  Dans une base e adaptée à cette décomposition, on a alors : $\operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} A_1 & (0) & \dots & (0) \\ (0) & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & (0) \\ (0) & \dots & (0) & A_m \end{pmatrix}$.

- Dans une base e de $E_\lambda = \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ on a : $\operatorname{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda \end{pmatrix}$

Rappels et objectif :

- Nous avons vu que :
  - → les sev $\ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ sont stables par u et en somme directe
  - → les endomorphismes induits par u sur les sev $\ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ sont des homothéties
- Pour réduire $u \in \mathcal{L}(E)$, il semble donc intéressant de rechercher tous les sev de la forme $\ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ différents de $\{0_E\}$.

4 Eléments Propres d'un endomorphisme

Dans cette partie, E est un $\mathbb{K}$-ev, la dimension de E est quelconque.
On considère $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Valeur propre et vecteur propre :

Idée : On recherche les sous-espaces stables de la forme $\ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ différent de $\{0_E\}$.

LEMME :

$$\ker(u - \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0_E\} \iff \exists x \neq 0,\ u(x) = \lambda x$$

Cela nous amène à définir les notions suivantes :

DÉFINITION : **Eléments propres de $u \in \mathcal{L}(E)$** :

Pour E un $\mathbb{K}$-ev et $\lambda \in \mathbb{K}$. Lorsque :

$$\boxed{E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E) \neq \{0_E\}}$$

- λ est appelée une *valeur propre de u*.

  Il s'agit des $\lambda \in \mathbb{K}$ tels qu'il existe $\begin{cases} x_0 \in E \\ x_0 \neq 0 \end{cases}$ tel que $u(x_0) = \lambda x_0$

  L'ensemble des valeurs propres de u, est appelé *le spectre* de u et est noté $\operatorname{Sp}(u)$
  Nous avons donc :
  $$\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid E_\lambda(u) \neq \{0_E\}\}$$
- Le sev $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E)$ est appelé *sous-espace propre* de u associé à la valeur propre λ.
- Les éléments non nuls de $E_\lambda(u)$ sont appelés les *vecteurs propres* de u associés à la valeur propre λ.

  Ce sont les vecteurs $\begin{cases} x \in E \\ x \neq 0 \end{cases}$ tels que $u(x) = \lambda x$.

Remarques :

- Lorsque E est un $\mathbb{R}$-ev, les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont réelles.
- Lorsque E est n EVN, pour toute valeur propre, il existe un vecteur propre associé unitaire.

Preuve :

Eléments propres

Déterminer les éléments propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ consiste à trouver :

- Les valeurs propres de u
- Les sous-espaces propres de u associés à chacune des valeurs propres

Méthode : Détermination des éléments propres en dimension infinie

On recherche $E_\lambda(u)$ en résolvant (souvent par A/S) *l'équation aux éléments propres* :

$$u(x) = \lambda x \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{K} \text{ est un paramètre}$$

- Si $E_\lambda(u) = \{0_E\}$ alors λ n'est pas valeur propre.
- Si $E_\lambda(u) \neq \{0_E\}$ alors λ est valeur propre et les sev propres sont les $E_\lambda(u)$ correspondants.

En dimension finie, on préfèrera utiliser une méthode matricielle.

Exemples : Donner les éléments propres de

- $u = \lambda \operatorname{id}_E$.

  Preuve :

- p le projecteur $\begin{cases} \text{sur } F \\ \text{parallèlement à } G \end{cases}$ non trivial

  Preuve :

- s la symétrie $\begin{cases} \text{par rapport à } F \\ \text{parallèlement à } G \end{cases}$ non triviale

  Preuve :

Exercice : 4

(♡) Déterminer le spectre d'un endomorphisme nilpotent.

Preuve :

- Analyse :

- Synthèse :

Voir l'exercice 83 de la banque CCINP.

Exercice : 5

(♡) Prouver les résultats suivants :

Endomorphismes	Sur	Spectre	Sous-Espaces Propres

$\varphi(P) = XP$	$E = \mathbb{R}[X]$	$\mathrm{Sp}(\varphi) = \emptyset$	$\emptyset$
$\varphi(f) = f'$	$E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\ \mathbb{C})$	$\mathrm{Sp}(\varphi) = \mathbb{C}$	$E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{\lambda t})$
$\varphi((u_n)) = (u_{n+1})$	{suites réelles bornées}	$\mathrm{Sp}(\varphi) = [-1,\ 1]$	$E_\lambda(\varphi) = \mathrm{Vect}((\lambda)^n)$.

En dimension infinie, un endomorphisme peut donc admettre $\begin{cases} \textit{une infinité de valeurs propres} \\ \textit{aucune valeur propres} \\ \textit{un nombre fini de valeurs propres} \end{cases}$.

Exercice : 6

(∗∗) Déterminer les éléments propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\varphi(P) = XP'$.

PROPOSITION : **Injectivité**

$$u \in \mathcal{L}(E) \text{ est injectif} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \notin \mathrm{Sp}(u)$$

La connaissance du spectre de u permet de savoir si u est injectif ou pas.

Preuve : $0 \in \mathrm{Sp}(u) \Longleftrightarrow \exists x \neq 0,\ u(x) = 0 \Longleftrightarrow \ker u \neq \{0\}$.

2. Propriétés des sous-espaces propres :

PROPOSITION : **Stabilité des sev propres**

Les sous espaces propres de u sont stables par u et $u_{E_\lambda(u)} = \lambda\,\mathrm{id}_{E_\lambda}$.

Preuve : Déjà vu !

PROPOSITION : Si $uv = vu$, alors les sous espaces propres de u sont stables par v.

Preuve : On a $(u - \lambda\,\mathrm{id}_E) \circ v = v \circ (u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ et donc $\ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ est stable par v.

♡ *Ce résultat nous sera très utile lorsqu'on cherchera à diagonaliser u et v dans une même base.*

PROPOSITION : **Les sev propres sont en somme directe**

Les sev propres de u associés à des valeurs propres 2 à 2 distinctes sont en somme directe.

$$E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$$

Preuve : Facile par récurrence sur le nombre de valeurs propres.

COROLLAIRE : **Famille de vecteurs propres - Nombre de valeurs propres**

- Une famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
- Si $\dim E = n$ alors u admet au plus n valeurs propres distinctes.

Preuve :

- Immédiat.
- Par l'absurde en utilisant la proposition précédente.

En dimension infinie il peut y avoir une infinité de valeurs propres.

A retenir

Pour un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$:

- Les sous-espaces propres de u sont les sev $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ non triviaux.
  Ils sont donc au moins de dimension 1.
- Les sous-espaces propres de u sont stables par u et en somme directe.
- L'endomorphisme induit par u sur les sous-espaces propres $E_\lambda(u)$ sont des homothéties.

Ainsi, les sep de u permettront, en dimension finie, de déterminer une base e dans laquelle la matrice de u est simple.

5 Les éléments propres en dimension finie

Nous allons voir ici que la détermination des valeurs propres d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ (ou d'une matrice) lorsque E est de dimension finie peut se faire en recherchant les racines d'un polynôme appelé le *polynôme caractéristique*.

1. Eléments propres d'une matrice carrée :

Définition : Eléments propres d'une matrice carrée A

- Valeur propre de A : tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $\boxed{\text{non nul}}$ tel que $AX = \lambda X$.
- Vecteur propre de A : tout $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ $\boxed{\text{non nul}}$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ telle que $AX = \lambda X$.
- SEV propre de A : (sep)

  On note $E_\lambda(A) = \ker(A - \lambda I_n)$ l'ensemble des solutions $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ de l'équation $AX = \lambda X$.

  $\rightarrow$ Si $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$: $E_\lambda(A) = \{0\}$
  $\rightarrow$ Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$: $E_\lambda(A) \neq \{0\}$ et $E_\lambda(A)$ est appelé le *sous-espace propre* de A associé à λ.

Important : ⚠ Les valeurs propres de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

Objectif : Cherchons une méthode de détermination des valeurs propres d'une matrice.

Théorème Fondamental : Polynôme caractéristique

Les valeurs propres de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont exactement les racines de

$$\boxed{\chi_A(X) = \det(XI_n - A) \in \mathbb{K}[X]}$$

Ce polynôme $\chi_A(X)$ est appelé le *Polynôme caractéristique* de A.

- Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ alors les valeurs propres de A sont les racines réelles de $\chi_A(X)$.
  L'ensemble de toutes les racines de $\chi_A(X)$ est alors noté : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$ (spectre complexe de A).
- Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ alors les valeurs propres de A sont toutes les racines de $\chi_A(X)$.

Preuve : Facile par équivalences successives.

Remarques :

- L'indéterminée X est souvent notée λ et le polynôme caractéristique est alors $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$.
- ⚠ On trouve encore parfois le polynôme caractéristique défini par $\chi_A(X) = \det(A - XI_n)$.

Exemple : Le polynôme caractéristique de $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 - \mathrm{Tr}(A)\lambda + \det A$.

Preuve :

PROPOSITION : Les valeurs propres d'une matrice triangulaire sont ses coefficients diagonaux.

Preuve :

PROPOSITION : **Formule approximative de $\chi_A(X)$** :

Lorsque $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(X)$ est un polynôme unitaire de degré n.
Plus précisément :

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$$

Preuve :

- Avec la formule du déterminant, on s'intéresse aux monômes $a_n X^n$ et $a_{n-1}X^{n-1}$:
  - $\rightarrow$ si $\sigma = \mathrm{id}$: on trouve $X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + ...$
  - $\rightarrow$ sinon : il y a au moins deux facteurs qui ne contiennent pas de λ.
- On regarde enfin le coefficient constant $\chi_A(0)$.

Remarques :

- une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n valeurs propres.
- une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ possède au moins une valeur propre complexe.
- une matrice de $\mathfrak{M}_{2n+1}(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre réelle.

Preuve :

Définition : **Spectre complexe d'une matrice réelle**

Une matrice réelle $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ peut également être considérée comme une matrice complexe de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On définit alors :

- Son spectre réel : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \chi_A(\lambda) = 0\}$.
  qui peut contenir jusqu'à n valeurs propres distinctes.

- Son spectre complexe : $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \chi_A(\lambda) = 0\}$.
  qui contient n valeurs propres *comptées avec leur ordre de multiplicité*.

Proposition : **Trace et déterminant de A**

Notons $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \ \dots, \ \lambda_n\}$ où les valeurs propres sont comptées avec leur ordre de multiplicité. Nous avons alors :

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \quad \text{et} \quad \det A = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k$$

Preuve : On sait que pour un polynôme P scindé unitaire, on a $P(X) = X^n - \sigma_1 X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \sigma_n$.

Exercice : 7

(♡) **Matrices compagnons**

Montrer que $P = \lambda^n - a_{n-1}\lambda^{n-1} - a_{n-2}\lambda^{n-2} - \cdots - a_0$ est le polynôme caractéristique de :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & a_0 \\ 1 & 0 & & \vdots \\ & \ddots & \ddots & a_{n-2} \\ (0) & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Idée : Faire apparaitre $-a_0 - a_1\lambda - a_2\lambda^2 - \dots$ en position $(1, n)$ par OEL.

Preuve : $L_1 \leftarrow L_1 + \lambda L_2 + \cdots + \lambda^{n-1} L_{n-1}$ puis on développe par rapport à la première ligne.

Méthode : Recherche des éléments propres de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

- Valeurs propres : On détermine le polynôme caractéristique de A.
  Les valeurs propres sont alors les racines de $\chi_A(X)$ dans $\mathbb{K}$

- Sous-espaces propres : Pour une valeur propre λ.
  On détermine alors $E_\lambda(A)$ en résolvant l'équation $AX = \lambda X$ par la méthode de GAUSS

Exemples : Recherche des éléments propres de :

- $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Preuve :

- $B = \begin{pmatrix} 0 & & (1) \\ & \ddots & \\ (1) & & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Preuve :

Exercice : 8

(♡) **Localisation des valeurs propres**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Localisation 1 : On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de la norme $\|.\|$ définie par $\|M\| = \sup\limits_{1\leq i\leq n} \sum\limits_{j=1}^{n} |m_{ij}|$.

   Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset B_f(0,\ \|A\|)$.

2. Localisation 2 : Montrer qu'il existe $i \in [\![1, n]\!]$ tel que : $\quad |\lambda - a_{i,i}| \leq \sum\limits_{j\neq i} |a_{i,j}|$.

   On pourra considérer i tel que $|a_i| = \|X\|_\infty$ ou X est un vecteur propre associé à λ.

3. Application : Localiser les valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{C}$?

Proposition : **Transposée et matrice semblable**

- Une matrice A et sa transposée A^T ont le même polynôme caractéristique.
  Elles ont donc les mêmes valeurs propres.
- Deux matrices semblables A et $B = P^{-1}AP$ ont le même polynôme caractéristique.
  Elles ont donc les mêmes valeurs propres.

Preuve : Simples calculs.

2. Eléments propres d'un endomorphisme :

Rappel : 2 matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.

DÉFINITION : **Polynôme caractéristique d'un endomorphisme** :

Soit e une base quelconque de E.
On appelle *polynôme caractéristique de* u le polynôme :

$$\chi_u(X) = \det(X \operatorname{id}_E - u)$$

Il s'agit du polynôme caractéristique de $\operatorname{Mat}_e(u)$ dans une base e quelconque de E.

Formule approximative : $\chi_u(X) = X^n - \operatorname{Tr}(u) X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det u$.

Exemples :

- $\chi_{\lambda \operatorname{id}_E}(X) = (X - \lambda)^n$.

- Polynôme caractéristique d'un projecteur.

Preuve :

- Polynôme caractéristique d'une symétrie.

Preuve :

THÉORÈME : **Valeurs propres de u**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev.
Les valeurs propres de u sont exactement les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$.

Preuve : $\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \iff \ker(u - \lambda \operatorname{id}_E) \neq 0 \iff \det(u - \lambda \operatorname{id}_E) = 0$.

Remarques :

- Un endomorphisme d'un ev de dimension n possède au plus n valeurs propres.
- Un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-ev possède au moins une valeur propre complexe
- Un endomorphisme d'un $\mathbb{R}$-ev de dimension impaire possède au moins une valeur propre réelle

THÉORÈME : **Comparaison des sous-espaces propres d'un endomorphisme et de sa matrice**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On pose e une base de E et on note $A = \operatorname{Mat}_e u$.

Alors : Les sous-espaces propres $\left\{ \begin{array}{l} \text{de } u \\ \text{de } A \end{array} \right.$ sont égaux à l'isomorphisme canonique près.

Preuve : $x \in E_\lambda(u) \iff X \in E_\lambda(A)$

Méthode : Recherche des éléments propres en dimension finie

En dimension finie, la détermination des éléments propres d'un endomorphisme se fait matriciellement.

- On choisit (judicieusement) une base de E et on détermine la matrice A de u dans cette base.
- On détermine les éléments propres de A
- On en déduit les éléments propres de u.

Exemples : Déterminer matriciellement les éléments propres :

- d'un projecteur non trivial

Preuve :

- d'une symétrie non triviale (la transposition matricielle, la conjugaison d'un complexe, d'une matrice...)

Preuve :

- de la dérivation dans $\mathbb{K}_n[X]$

Preuve :

3. Multiplicité d'une valeur propre :

Objectif : Montrer que l'ordre de multiplicité d'une valeur propre donne une idée de la dimension du sep associé.

(a) Rappels : Sur les polynômes

- Ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme

Définition : *(à remplir !)*

Théorème : **Caractérisation** *(à remplir !)*

- On dit qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est :

→ *scindé* : lorsqu'il se décompose en produit de polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$: $P(X) = \lambda.\prod_{i=1}^{p}(X - a_i)^{\alpha_i}$.

→ *simplement scindé* : lorsqu'il est scindé à racines simples.

Rappel : Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé.

(b) Ordre de multiplicité d'une valeur propre

DÉFINITION : **Ordre de multiplicité d'une valeur propre**

On appelle *ordre de multiplicité de la valeur propre* λ_0 l'ordre de multiplicité de la racine λ_0 dans le polynôme caractéristique.

Cet ordre de multiplicité est noté $m_{\lambda_0}(u)$ ou $m_{\lambda_0}(A)$.

Exemples :

- Pour $X_u(X) = (X-2)^3X^2$, $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ est valeur propre d'ordre } 3 \\ \lambda_2 = 0 \text{ est valeur propre d'ordre } 2 \end{cases}$.
- Pour $A = \begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$, λ est valeur propre d'ordre 2 et μ d'ordre 1.
- Pour $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$, on dit que les vp de A sont les λ_k *comptées avec leur ordre de multiplicité.*

  Cela sous-entend que les λ_k ne sont pas nécessairement distinctes.

PROPOSITION : **Somme des ordres de multiplicité**

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: La somme des ordres de multipl. des valeurs propres de A est inférieure ou égale à n. Il y a égalité si et seulement si χ_A est scindé.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: La somme des ordres de multipl. des valeurs propres de A est n. On dit que A admet n valeurs propres *comptées avec leur ordre de multiplicité.*

Preuve : Immédiat !

(c) Multiplicité et dimension des sous-espaces propres :

LEMME : **Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit**

Soit F un sev stable par u
Le polynôme caractéristique de u_F DIVISE le polynôme caractéristique de u.

$$\chi_{u_F} \text{ divise } \chi_u$$

Preuve : On calcule le polynôme caractéristique de u en se plaçant dans une base adaptée à F.

COROLLAIRE : Dimension des sev propres

$$1 \leq \dim E_\lambda(u) \leq m_\lambda(u)$$

Autrement dit : si $\chi_u(\lambda) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k}$ alors pour tout $k \in [\![1, p]\!]$: $1 \leq \dim E_{\lambda_k}(u) \leq \alpha_k$.

Preuve : Nous savons que $\chi_{u_{E_\lambda(u)}} = (X - \lambda)^{n_\lambda}$ (avec $\dim E_\lambda(u) = n_\lambda$) et que $\chi_{u_{E_\lambda(u)}}$ divise χ_u.

♡ En particulier : Si λ est une valeur propre simple, alors $\dim E_\lambda(u) = 1$

4. Rang et dimension des sep

PROPOSITION : Rang et dimension des sep

Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$.

- Si $\mathrm{rg}(u) = p$ alors $\dim E_0(u) = n - p$ et donc $m_0(u) \geq n - p$.
- Si $\mathrm{rg}(u - \lambda \,\mathrm{id}_E) = p$ alors $\dim E_\lambda(u) = n - p$ et donc $m_\lambda(u) \geq n - p$.

Ces résultats sont particulièrement intéressants lorsque $p = 1$ ou 2.

Exercice : 9

$(*)$ Recherche rapide des valeurs propres de $A = \begin{pmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ où $a,\ b \in \mathbb{K}$ distincts.

1. Montrer que $a + (n-1)b$ est valeur propre de A.

Preuve :

2. Etudier le rang de la matrice $A + (b-a)I_n$ en déduire que $a - b$ est valeur propre d'ordre $(n-1)$ de A.

Preuve :

3. Conclure.

Preuve :

RUSES : Pour trouver rapidement le spectre de A

RUSE 1 : Lorsque la somme des coefficients de chaque ligne vaut α :

α est valeur propre de A associée au vecteur propre $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

RUSE 2 :

- Si $\operatorname{rg}(A + \alpha I_n) = 1$ alors $\begin{cases} \dim E_\alpha(A) = n-1 \\ -\alpha \in \operatorname{Sp}(A) \\ A \text{ admet au plus une seule valeur propre distincte de } -\alpha \end{cases}$.

- Si $\operatorname{rg}(A + \alpha I_n) = 2$ alors $\begin{cases} \dim E_\alpha(A) = n-2 \\ -\alpha \in \operatorname{Sp}(A) \\ A \text{ admet au plus 2 valeurs propres distinctes de } -\alpha \end{cases}$.

RUSE 3 : Lorsqu'il ne reste plus qu'une ou deux valeurs propres à trouver, on utilise la formule

$$\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}_{\mathbb{C}}(A)} \lambda = \operatorname{Tr}(A)$$

Les valeurs propres étant ici comptées avec leur ordre de multiplicité.

Question : Et si ce sont les sommes des éléments de chaque colonne qui sont égales ?

Preuve :

Voir l'exercice 69 de la banque CCINP pour une application d'une des ruses précédentes.

5. Valeurs propres complexes d'une matrice REELLE :

THÉORÈME : **Eléments propres complexes d'une matrice REELLE**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$:

- Valeurs propres :
  - $\rightarrow$ les valeurs propres complexes (non réelles) de A sont deux à deux conjuguées.
  - $\rightarrow$ Les ordres de multiplicité des valeurs propres λ et $\bar{\lambda}$ de A sont égaux.
- Sous espaces propres :
  - $\rightarrow$ Les sev propres $E_\lambda(A)$ et $E_{\bar{\lambda}}(A)$ sont de même dimension.
  - $\rightarrow$ On obtient une base de l'un en prenant le conjugué d'une base de l'autre.

Preuve :

- Avec la caractérisation de l'ordre de multiplicité ou la décomposition de χ_A en polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

- L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E_\lambda(A) & \longrightarrow & E_{\bar{\lambda}}(A) \\ x & \longmapsto & \bar{x} \end{array}$ est bijective et vérifie $\varphi(x + \lambda y) = \varphi(x) + \bar{\lambda}\varphi(y)$.
  On montre alors qu'elle transforme une base de $E_\lambda(A)$ en une base de $E_{\bar{\lambda}}(A)$.

Exemple : Déterminer les sev propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Preuve :

6 Diagonalisabilité

Ici, on se place dans le cas où E est de dimension finie et on étudie $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. Endomorphisme diagonalisable :

Définition : Endomorphisme diagonalisable

On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est *diagonalisable* lorsqu'il existe une base e telle que $\mathrm{Mat}_e\, u$ est diagonale.
e est alors appelée *base de diagonalisation.*

Les coefficients diagonaux de $\mathrm{Mat}_e\, u$ *sont les valeurs propres de* u.

Exemples : les homothéties, les projecteurs et les symétries vectorielles sont diagonalisables.

Preuve :

Théorème : Première caractérisation de la diagonalisabilité

$$u \text{ est diagonalisable} \iff \text{il existe une base de vecteurs propres.}$$

Preuve : Facile !

Corollaire : Endomorphismes n'ayant qu'une unique valeur propre

Soit φ un endomorphisme qui admet α pour seule valeur propre.
On a :

$$\varphi \text{ est diagonalisable} \iff \varphi = \alpha\, \mathrm{id}_E$$

A savoir démontrer.

Preuve :

CS de NON-diagonalisabilité : Endomorphisme qui admet une seule valeur propre
Si u admet une unique valeur propre et n'est pas une homothétie, alors u n'est pas diagonalisable

Exercice : 10
$(*)$ L'application "dérivation" sur $\mathbb{R}_n[X]$ est-elle diagonalisable ?

Preuve :

Voir l'exercice 59 de la banque CCINP.

2. Une première Condition Suffisante de diagonalisabilité :

Proposition : Cas où u admet n valeurs propres distinctes

Soit E de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Alors : u possède n valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ u est diagonalisable.

Les sous espaces propres de u sont alors des droites vectorielles.

Preuve : Facile car dans ce cas, il existe une base de vecteurs propres.

En d'autres termes, si χ_u est simplement scindé, alors u est diagonalisable.

Exercice : 11

$(*)$ Montrer que l'endomophisme φ de $\mathbb{K}_n[X]$ défini par $\varphi(P) = nXP - (X^2-1)P'$ est diagonalisable.

Preuve : On se place dans la base de Taylor $\{1,\ (X-1),\ \dots, (X-1)^n\}$.

3. Caractérisation de la diagonalisabilité :

Théorème Fondamental : Caractérisation avec les sep

$$u \in \mathcal{L}(E) \text{ est diagonalisable} \iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u) = E$$

$$\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(u) = \dim E \quad \heartsuit$$

Preuve :

- $(i) \Rightarrow (ii)$: On a montre facilement que $E \subset \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.
- $(ii) \Rightarrow (i)$: On construit une base de diagonalisation et réunissant les bases des sev propres.
- $(ii) \iff (iii)$: $F = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} E_\lambda(u)$ vérifie $F \subset E$ et $\dim F = \dim E$.

Exercice : 12

$(\heartsuit)$ Etudier la diagonalisabilité de l'endomorphisme φ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = M + \mathrm{Tr}(M) I_n$.

Preuve :

Théorème Fondamental : Caractérisation avec les ordres de multiplicité

$$u \text{ diagonalisable} \iff \begin{cases} \chi_u \text{ scindé dans } \mathbb{K} \\ m_\lambda(u) = \dim E_\lambda(u) \quad \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u) \end{cases}.$$

Preuve : En utilisant le fait que u est diagonalisable $\iff \displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(u) = \dim E$

Méthode : Deux CS de NON-diagonalisabilité

- χ_u n'est pas scindé $\Rightarrow$ u n'est pas diagonalisable.
- $\exists \lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ telle que $\dim E_\lambda(u) < m_\lambda(u)$ $\Rightarrow$ u n'est pas diagonalisable.

Exemple : L'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ de polynôme caractéristique $\chi_u = X^3 + X$ n'est pas diagonalisable.

Remarque : ⚠ Ce n'est pas parce que χ_u est scindé que χ_u est diagonalisable.

Preuve : Il suffit de prendre l'endomorphisme de dérivation sur $\mathbb{R}_2[X]$.

(a) Matrice diagonalisable :

Ici on s'intéresse à une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition : Matrice diagonalisable :

- On dit que A *diagonalisable* lorsque A est semblable à une matrice diagonale D.
- *Diagonaliser* une matrice A signifie rechercher les matrices $\begin{cases} D \text{ diagonale} \\ P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \end{cases}$ telles que $D = P^{-1}AP$.

Remarque : Comme $\chi_A = \chi_D$, les coefficients diagonaux de la matrice D sont les valeurs propres de A.

Exemple : Montrer que : A diagonalisable $\Rightarrow$ A^T diagonalisable.

Preuve :

Proposition : Lien entre matrice et endomorphisme

Lorsque $A = \mathrm{Mat}_e\, u$, on a : A diagonalisable $\iff$ u diagonalisable.

Preuve : Avec la formule de changement de base pour un endomorphisme.

Méthode : Diagonalisabilité de $u \in \mathcal{L}(E)$

On étudiera la diagonalisabilité de u en étudiant celle de sa matrice dans une base e de E choisie judicieusement.

Théorème Fondamental : Caractérisation de la diagonalisabilité d'une matrice

$$A \text{ diagonalisable} \iff \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} E_\lambda(A) = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$
$$\iff \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim E_\lambda(A) = n$$
$$\iff \begin{cases} \chi_A \text{ est scindé} \\ \forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A),\ m_\lambda(A) = \dim E_\lambda(A) \end{cases}$$

Preuve : Par transfert des caractérisations de la diagonalisabilité d'un endomorphisme via l'isomorphisme canonique.

Méthode : Trois CS de non-diagonalisabilité d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

- χ_A n'est pas scindé $\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable.
- $\exists \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ telle que $\dim E_\lambda(A) < m_\lambda(A)$ $\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable.
- $\mathrm{Sp}(A) = \{\alpha\}$ avec $A \neq \alpha I_n$ $\Rightarrow$ A n'est pas diagonalisable.

Voir l'exercice 70 de la banque CCINP pour la réduction d'un polynôme matriciel.

Exemples :

i. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

Preuve :

ii. Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ n'est pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ ou $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$.

Preuve :

Méthodes Montrer qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ **est diagonalisable**

- M1 : On regarde si A est symétrique réelle *(voir chapitre de fin d'année)*
- M2 : On vérifie que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = n$

Exercice : 13

$(*)$ Montrer que $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

- En appliquant les ruses usuelles avec le rang.
- En remarquant que A est la matrice d'une symétrie.
- En remarquant que A est symétrique réelle. (vu plus tard...)

Preuve :

Exercice : 14

(♡) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\operatorname{rg} A = 1$.
Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\operatorname{Tr} A \neq 0$.

Preuve : On traite séparément les cas où $\operatorname{Tr}(A) = 0$ et où $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$.

Exercice : 15

($*$) Soit $a,\ b \in \mathbb{C}^*$ tels que $|a| \neq |b|$ et $A = \begin{pmatrix} a & b & a & \dots & b \\ b & a & b & \dots & a \\ a & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & a & b & \dots & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2n}(\mathbb{R})$ (avec $n \geq 2$).

On remarquera que A est constituée d'une alternance de a et de b.

1. Montrer que 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.

   Preuve :

2. En déduire que A est diagonalisable.
   On pourra proposer 2 vecteurs associés à des valeurs propres distinctes non nulles.

   Preuve :

Proposition : **Une condition suffisante de diagonalisabilité**

A possède n valeurs propres distinctes (χ_A simplement scindé) $\quad\Rightarrow\quad$ A est diagonalisable.

Ses sous espaces propres sont alors des droites vectorielles.

Voir l'exercice 67 de la banque CCINP pour une étude dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$.

CS de diagonalisabilité : Cas d'une matrice triangulaire

A est triangulaire avec des coefficients diagonaux distincts 2 à 2 $\Rightarrow$ A est diagonalisable.

Exemples BILAN : Dire si les matrices suivantes sont diagonalisables

- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{K}$
- $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Voir l'exercice 72 de la banque CCINP pour une matrice de rang 1 ou 0.

Exercice : 16

($**$) Déterminer les valeurs $z \in \mathbb{C}$ pour lesquelles la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est diagonalisable.

Preuve :

A retenir : Quelques CS très utiles

- χ_A non scindé $\Rightarrow$ A non diagonalisable.
- Il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ tel que $\dim E_\lambda(A) < m_\lambda(A)$ $\Rightarrow$ A non diagonalisable.
- $A = \begin{pmatrix} \alpha & & & \\ 0 & \ddots & T & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$ avec $T \neq 0$ $\Rightarrow$ A non diagonalisable.

- $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distinctes $\Rightarrow$ A diagonalisable.
- A est une matrice symétrique réelle $\Rightarrow$ A diagonalisable (cf fin d'année !).
- A annule un polynôme scindé simple $\Rightarrow$ A diagonalisable (cf prochain chapitre !).

7 Diagonalisation

1. Diagonaliser une matrice A :

DÉFINITION : Diagonaliser une matrice

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

Diagonaliser A consiste à déterminer $\begin{cases} P = (C_1\ C_2\ \dots C_n) \text{inversible} \\ D = \mathrm{Diag}(a_1, \dots,\ a_n) \end{cases}$ telles que $A = PDP^{-1}$

- Analyse : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable.

  On note $\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_p$ ses valeurs propres distinctes et $m_1, \ \ldots, \ m_p$ leur ordre de multiplicité.

  Il existe alors $\begin{cases} P = (C_1 \ C_2 \ \ldots C_n) \text{inversible} \\ D = \text{Diag}(a_1, \ldots, \ a_n) \end{cases}$ telles que : $A = PDP^{-1}$.

  → A et D étant semblables, A et B on le même spectre et les valeurs propres on le même ordre de multiplicité. Les coefficients a_k de D sont donc les valeurs propres de A comptées avec leur ordre de multiplicité.

  → De plus, nous avons $AP = PD$ et donc $(AC_1 \ AC_2 \ \ldots AC_n) = (a_1C_1 \ a_2C_2 \ \ldots a_nC_n)$.
  On remarque alors que les vecteurs colonnes de P sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres de A.

  → Enfin, P est inversible donc la famille $(C_1, \ \ldots, \ C_n)$ est une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

- Synthèse :

  → Prenons D sous la forme $D = \text{Diag}(\lambda_1 I_{m_1}, \ \ldots, \ \lambda_p I_{m_p})$.

  → Prenons $P = (C_1, \ \ldots, \ C_n)$ où $(C_1, \ \ldots, \ C_n)$ est une base de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ obtenue en concacténant les bases des sep $E_{\lambda_k}(A)$

  → On obtient bien alors :
  $$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} D \text{ diagonale} \\ P \text{ inversible} \end{cases}$$

Méthode classique : Diagonalisation d'une matrice

Pour cela :

- On détermine les valeurs propres de A :
  - Soit en calculant χ_A.
  - Soit en utilisant les ruses présentées précédemment.
- On détermine les sous-espaces propres $E_\lambda(A)$
- On s'assure alors de la diagonalisabilité de A en vérifiant que $\displaystyle\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim E_\lambda(u) = n$
- On en déduit alors les matrices D et P recherchées comme indiqué précédemment.

Exemples : Diagonaliser les matrices suivantes :

- $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Preuve :

2. Diagonaliser un endomorphisme u :

DÉFINITION : Diagonaliser un endomorphisme

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme diagonalisable.

Diagonaliser u consiste à déterminer une base e de vecteurs propres de u de telle sorte que :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \mathrm{Diag}(\lambda_1 I_{m_1},\ \ldots,\ \lambda_p I_{m_p})$$

Méthode classique : Diagonalisation d'un endomorphisme

Pour cela :

→ On choisit une base e de E et on diagonalise la matrice $A = \mathrm{Mat}_e\, u$.

→ On obtient la base de vecteurs propres cherchée à partir des bases de $E_\lambda(A)$ obtenues.

Exemples : Diagonaliser les endomorphismes suivants :

- $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ P & \mapsto & 2XP - (X^2-1)P' \end{array}$

Preuve :

- $u : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Preuve :

- $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \mapsto & f + f' \end{array}$ avec E le $\mathbb{C}$-ev $\mathrm{Vect}(\cos,\ \sin)$.

Preuve :

Exercice : 17

(♡) Diagonaliser l'endomorphisme $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM - MA \end{array}$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

8 Les applications de la diagonalisation

L'idée : Il est plus simple de travailler avec des matrices diagonales qu'avec des matrices quelconques.

1. Calcul des puissances d'une matrice A :

Méthode : Puissance pième de A

- On diagonalise la matrice A : $A = PDP^{-1}$
- On a alors $A^p = PD^pP^{-1}$ avec D^p qui est connue

Exemple : Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

Preuve :

Application : Le calcul de A^n permet d'étudier les suites linéaires récurrentes emboitées.

Exercice : 18

$(*)$ Soit (u_n), (v_n) et (w_n) vérifiant les relations de récurrences suivantes : $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n + v_n - w_n \end{cases}$.

A quelle condition sur u_0, v_0 et w_0 les 3 suites sont-elles convergentes ?

Preuve :

2. Recherche du commutant d'une matrice diagonalisable :

Méthode : Commutant de A

- On diagonalise la matrice A : $A = PDP^{-1}$.
- On remarque que $AB = BA \iff DB' = B'D$ avec $B' = P^{-1}BP$ (changement d'inconnue).
- On détermine le commutant de D (connu !) et on en déduit immédiatement celui de A.

Exercice : 19

$(*)$ CCINP n° 73 : Déterminer le commutant de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Preuve :

Exercice : 20

(♡) Montrer que le commutant d'une matrice A diagonalisable à valeurs propres distinctes deux à deux est l'ensemble des polynômes en A.

Preuve :

3. Résolution d'une équation matricielle :

Méthode : Equation matricielle : $P(M) = A$

Pour cela :

- On diagonalise la matrice A qui intervient dans l'équation : $A = QDQ^{-1}$
- On obtient alors $P(M) = A \iff P(N) = D$ avec $N = Q^{-1}MQ$ pour nouvelle inconnue.
- Une analyse rapide montre que l'inconnue N commute avec D ce qui nous donne la forme de N. On résout alors $P(N) = D$ par équivalences successives.

Exercice : 21

($*$) Déterminer les racines carrées de $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Preuve :

Exercice : 22

($*$) Résoudre dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ l'équation $M^2 + M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Preuve :

4. Divers : La diagonalisation peut également servir à démontrer de nombreuses propriétés

- Montrer que si deux matrices à valeurs propres simples sont diagonalisables avec la même matrice de passage, alors l'une est une fonction polynômiale de l'autre.

  Preuve :

- Montrer que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{rg}(A^k) = \mathrm{rg}(A)$.

Preuve :

Remarque : Lorsque $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est quelconque, on a $\ker A^k \subset \ker A^{k+1}$ et donc $\mathrm{rg}(A) \geq \mathrm{rg}(A^k)$.

- Déterminer le spectre de $P(A)$ lorsque A est diagonalisable et $P \in \mathbb{K}[X]$.

Preuve :

- Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$ avec u diagonalisable.
  Montrer que si les sev propres de u sont stables par v alors $uv = vu$.

Preuve : On montre que $uv = vu$ sur chaque sep de u.

5. Autres applications usuelles vues plus tard :

→ Calculer l'exponentielle d'une matrice A.
→ Rechercher des sev stables par un endomorphisme.
→ Résoudre un système différentiel linéaire.
→ Etudier une Chaîne de Markov

9 Trigonalisabilité

Ici E est encore un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

L'idée : Lorsqu'un endomorphisme (ou une matrice) n'est pas diagonalisable, à défaut de pouvoir le diagonaliser, nous allons voir qu'il est parfois possible (lorsque son polynôme caractéristique est scindé) de le (ou la) trigonaliser.

Parmi les applications usuelles, nous utiliserons la trigonalisation pour montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ *est connexe par arcs.*

1. Les bonnes propriétés des matrices triangulaires :

Même si les matrices triangulaires ne présentent pas autant d'avantages que les matrices diagonales, elles vérifient cependant les propriétés intéressantes suivantes.

PROPOSITION : **Structure**

On pourra noter $T_n^+(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Structure : $(T_n^+(\mathbb{K}), +, \times, .)$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve : Pas de difficulté avec la caractérisation des sous-algèbres.

- Si $A=\begin{pmatrix} B_1 & X & \dots & X \\ 0 & B_2 & X & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \dots & 0 & B_p \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} C_1 & X' & \dots & X' \\ 0 & C_2 & X' & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X' \\ 0 & \dots & 0 & C_p \end{pmatrix}$ par blocs, alors $AB=\begin{pmatrix} B_1C_1 & X" & \dots & X" \\ 0 & B_2C_2 & X" & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X" \\ 0 & \dots & 0 & B_pC_p \end{pmatrix}$.

Preuve :

- Plus généralement :

Si $A=\begin{pmatrix} B_1 & X & \dots & X \\ 0 & B_2 & X & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \dots & 0 & B_p \end{pmatrix}$ par blocs, alors pour tout $k\in\mathbb{N}^*$ on a $A^k=\begin{pmatrix} B_1^k & X_k & \dots & X_k \\ 0 & B_2^k & X_k & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X_k \\ 0 & \dots & 0 & B_p^k \end{pmatrix}$.

Preuve : Corollaire immédiat de la propriété précédente

Remarque : Plus généralement, pour tout $P\in\mathbb{K}[X]$ on a $P(A)=\begin{pmatrix} P(B_1) & X_k & \dots & X_k \\ 0 & P(B_2) & X_k & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X_k \\ 0 & \dots & 0 & P(B_p) \end{pmatrix}$.

- Si $A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & X & \dots & X \\ 0 & \lambda_2 & X & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_p \end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ alors $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1} & X' & \dots & X' \\ 0 & \frac{1}{\lambda_2} & X' & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X' \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\lambda_p} \end{pmatrix}$.

Preuve :

On a bien entendu les mêmes propriétés si on remplace "supérieur" par "inférieur".

2. Endomorphismes et matrices trigonalisables :

DÉFINITION : **Endomorphisme trigonalisable**

On dit qu'un endomorphisme est trigonalisable lorsqu'il existe une base (appelée *base de trigonalisation*) dans laquelle sa matrice est triangulaire.

Un endomorphisme diagonalisable est également trigonalisable, mais on préfèrera bien sûr le diagonaliser !

PROPOSITION : Toute matrice triangulaire supérieure est semblable à une matrice triangulaire inférieure.

Preuve : Il suffit d'inverser l'ordre des vecteurs de la base.

On se ramènera donc systématiquement à une matrice triangulaire supérieure.

DÉFINITION : $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable lorsque A est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

THÉORÈME : **Transfert**

Lorsque $A = \mathrm{Mat}_e(u)$, on a : « A trigonalisable » $\iff$ « u trigonalisable »

PROPOSITION : Soit e une base de E.

e est une base de trigonalisation (supérieure) de u $\iff$ $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_k)$ est stable par u

Preuve : Facile.

Remarque : le premier vecteur d'une base de trigonalisation est un vecteur propre de u
Ainsi, un endomorphisme ou une matrice dont le spectre est vide ne sera pas trigonalisable.

Exemple : La matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas trigonalisable dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

---

3. Caractérisation :

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Caractérisation de la trigonalisabilité** :

$$A \text{ trigonalisable} \iff \chi_A \text{ est scindé}$$

Preuve :
- $\Rightarrow$ Facile.
- $\Leftarrow$ Par récurrence sur n :
  - $\rightarrow$ On montre que A_{n+1} est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & B \\ 0 & A_n \end{pmatrix}$
  - $\rightarrow$ On applique l'HR à la matrice A_n puis on prend $P_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P_n \end{pmatrix}$ pour matrice de passage.

COROLLAIRE :

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Toute matrice de } \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \\ \text{Tout endomorphisme d'un } \mathbb{C}\text{-ev de dimension finie} \end{array}\right. \text{ est trigonalisable.}$$

Méthode lorsque $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$

Lorsqu'un exercice précise que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ ou que $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{C}$-ev, il faut penser immédiatement que A et u sont trigonalisables et utiliser cette propriété pour reformuler la question de l'exercice.

Remarque : Lorsque $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable

- $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = \{\lambda^{-1} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ (si A est inversible)
- $\mathrm{Sp}(\bar{A}) = \{\bar{\lambda} \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$
- $\mathrm{Sp}(A^k) = \{\lambda^k \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ (pour tout $k \in \mathbb{N}$)
- $\mathrm{Sp}(P(A)) = \{P(\lambda) \mid \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}$ (pour tout $P \in \mathbb{K}$)

Preuve :

COROLLAIRE : Pour F stable par $u \in \mathcal{L}(E)$: u trigonalisable $\Rightarrow$ u_F trigonalisable

Preuve : Car χ_{u_F} divise χ_u qui est scindé.

Remarque : Nous verrons plus tard qu'on a également : u diagonalisable $\Rightarrow$ u_F diagonalisable.

Exercice : 23

($*$) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable et F stable par u.
Montrer que F contient un vecteur propre de u.

Preuve : u_F étant trigonalisable, il admet un vecteur propre qui est également un vecteur propre de u.

PROPOSITION : **Trace de A^k**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \ \dots, \ \lambda_n\}$. (comptées avec leur ordre de multiplicité !)

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $\mathrm{Tr}(A^k) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k$

Preuve : Immédiat par trigonalisation.

On a bien entendu une propriété analogue pour les endomorphismes de E.

Exercice : 24

($\heartsuit$) **Utilisation de** $\mathrm{Tr}(A)$ **et de** $\mathrm{Tr}(A^2)$.

1. Déterminer le spectre de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & (1) & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

   Preuve :

2. Déterminer le spectre de $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

   Preuve :

Exercice : 25

($**$) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\mathrm{Tr}(A^m) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$.

Montrer que les valeurs propres de A sont de module strictement inférieur à 1.

A un moment donné, on pourra penser à effectuer une récurrence.

Preuve :

Remarque : La pratique de la trigonalisation n'est plus un objectif du programme.

Exemple de trigonalisation : Montrer que $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Preuve :

Exercice : 26

(♡) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Preuve :

Exercice : 27

(♡) Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1-n \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On commencera par vérifier que $A^2 = 0_n$.

Preuve :

Voir l'exercice 75 de la banque CCINP pour une application à la résolution d'un système différentiel.

4. Nilpotence :

Définition : Endomorphisme nilpotent ou matrice nilpotente. (Voir le cours sur les anneaux !)

Exemples de matrices nilpotentes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$	$E_{i,j}$ avec $i \neq j$	$J_n = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$

Exemple : La dérivation sur $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme nilpotent.

Proposition : Transfert

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E de dimension finie et $A = \mathrm{Mat}_e(u)$, on a :

$$u \text{ nilpotent} \iff A \text{ nilpotente}$$

Lemme : Spectre et Polynôme caractéristique

- Si $u \in \mathcal{L}(E)$ est nilpotent alors $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.
- Si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente alors $\begin{cases} \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = \{0\} \\ \chi_A(X) = X^n \end{cases}$.

  Idem pour un endomorphisme nilpotent en dimension finie.

Preuve : Soit u d'ordre de nilpotence p.

- Soit λ une valeur propre, alors il existe $x \neq 0$ etl que $u(x) = \lambda x$.
  On a alors facilement $u^p(u) = \lambda^p x$ et donc $\lambda = 0$.
- Comme $u^{p-1} \neq \tilde{0}$, alors il existe x tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$.
  Comme $u^p(x) = 0$, on en déduit que 0 est valeur propre de u.

Théorème Fondamental : Caractérisation de la nilpotence pour les matrices

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

$$A \text{ nilpotente} \iff A \text{ est semblable à } \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on en déduit que $A^n = 0$ et donc que l'indice de nilpotence d'une matrice est majoré par la taille de A.

Preuve :

$\Leftarrow$ La matrice est bien nilpotente.

$\Rightarrow$ On remarque que $\chi_A(X) = X^n$ qui est scindé et donc u est trigonalisable.

Remarques :

- Pour savoir si une matrice A de taille 2 est nilpotente, il suffit de calculer A^2.
- Pour un endomorphisme nilpotent en dimension finie, il existe donc une base dans laquelle sa matrice a la forme ci-dessus.