Intégration sur un intervalle quelconque

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

23 novembre 2024

Objets étudiées : Les fonctions numériques continues par morceaux sur un intervalle I.

Dans ce chapitre, les fonctions étudiées sont des *fonctions numériques*, c'est à dire des fonctions de variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une généralisation aux fonctions de variable réelle à valeurs dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sera proposée ultérieurement.

Objectif : Intégration sur un intervalle.

En MPSI, nous avons défini la notion d'intégrale de Riemann pour des fonctions $\mathcal{C}_m$ sur un segment $[a,\ b]$. Dans ce chapitre, nous allons étendre cette définition à des fonctions $\mathcal{C}_m$ sur un intervalle I.

Une intégrale de la forme $\displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t$ avec I ouvert ou semi-ouvert sera appelée $\left\{\begin{array}{l} \textit{intégrale impropre} \\ \text{ou} \\ \textit{intégrale généralisée} \end{array}\right.$.

Analogie : Avec les séries numériques

Par analogie avec la CVG et la CVA des séries numériques, nous allons définir dans ce chapitre les notions :

- d'*intégrale convergente* sur un intervalle quelconque I qui donne un sens numérique à des intégrales du type

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$$

- d'*intégrabilité* d'une fonction f sur I qui nous permettra :
  - $\to$ de justifier la convergence d'une intégrale sur un intervalle
  - $\to$ d'appliquer le théorème d'échange $\sum \leftrightarrow \sum$ vu plus tard.
  - $\to$ d'étudier les intégrales à paramètre vues plus tard.

L'analogie avec les séries numériques s'applique pour de nombreuses notions :

Série numérique	$\longleftrightarrow$	Intégrale généralisée
Série convergente	$\longleftrightarrow$	Intégrale convergente
Série absolument convergente	$\longleftrightarrow$	Fonction intégrable
Convergence par comparaison de SATP	$\longleftrightarrow$	Convergence par comparaison de fonctions positives
Propriétés des séries convergentes	$\longleftrightarrow$	Propriétés des intégrales convergentes
Séries de références	$\longleftrightarrow$	Intégrales de référence

Les points forts :

- La principale nouveauté (et difficulté !) réside dans la justification de la convergence ou de l'intégrabilité.
- La convergence des intégrales ayant été établie, les propriétés des intégrales impropres et leur mode de calcul restent semblables à ceux des intégrales de Riemann.

Structure du chapitre :

- On commence par définir les notions de :

  → Fonction continue par morceaux sur un intervalle
  → CONVERGENCE d'une intégrale impropre $\int_I f$
  → INTEGRABILITE d'une fonction C_m sur l'intervalle I

- On établit les méthodes de justification de $\left\{\begin{array}{l}\text{la convergence}\\ \text{l'intégrabilité}\end{array}\right.$ par comparaison de f° positives.
- On présente les fonctions de référence permettant d'étudier $\left\{\begin{array}{l}\text{la convergence}\\ \text{l'intégrabilité}\end{array}\right.$.
- On présente enfin les méthodes usuelles de CALCUL (au sens large) d'une intégrale impropre :

  → Avec un programme Python
  → Avec les intégrales partielles : par encadrement ou calcul d'une primitive
  → Avec un changement de variable
  → Avec une intégration par partie.

Table des matières

Questions de cours à maîtriser pour les colles :

- Pourquoi une f° dont l'intégrale converge sur un voisinage de $+\infty$ ne tend pas forcément vers 0 ? Que dire de sa limite si elle existe ?
- Justification de la semi-convergence de l'intégrale de Dirichlet
- Etude de la convergence d'une intégrale au voisinage de $+\infty$ par étude de la suite $S(x_n)$ - Exemple
- Etude de la convergence des intégrales de Dirichlet

1 Convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_I f$

Dans toute cette partie :

- I est un intervalle de la forme $I =]]a,\ b[[$ avec $a,\ b \in \overline{\mathbb{R}}$.
- les fonctions sont des fonctions numériques de la forme $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. **Définitions** :

Rappel : Fonction continue par morceaux sur un segment $[a,\ b]$.

DÉFINITION : **Fonction continue par morceaux sur I**

On dit qu'une fonction numérique est continue par morceaux (C_m) sur un intervalle I lorsqu'elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

Exemple : La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est C_m sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Pour de telles fonctions, il est alors possible de définir la notion d'intégrale impropre sur I.

DÉFINITION : **Intégrale généralisée ou impropre**.

Soit f continue par morceaux sur I.

Lorsque I n'est pas un segment, $\displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t$ est appelée une *intégrale impropre* ou *généralisée*.

A ce stade, $\int_I f(t)\ \mathrm{d}t$ est une simple notation dont le sens n'a pas encore été établi.

Autre notation

Pour $I =]]a,\ b[[$, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{]]a,\ b[[} f(t)\ \mathrm{d}t$ est souvent également notée :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

⚠ Notation ambiguë qui ne précise pas la nature de l'intervalle

2. **Convergence** :

Comme les séries numériques, les intégrales impropres (généralisées) peuvent-être convergente ou divergente.

DÉFINITION : **Convergence de** $\int_{[a,\ b[} f$ *On dira que* b *est « la borne à problème »* .

Pour f une fonction numérique C_m sur $I = [a,\ b[$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \bar{\mathbb{R}}$.

- On dit que $\int_{[a,\ b[} f$ *converge* lorsque :

$$\boxed{\text{La somme partielle } S(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ admet une limite finie } l \in \mathbb{K} \quad \text{lorsque} \quad x \to b^-}$$

- Cette limite l est appelée la *valeur de l'intégrale* et est notée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_{[a,\ b[} f(t)\,\mathrm{d}t$$

Lorsque $I =]a,\ b]$*, on dit que* $\int_{]a,\ b]} f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge lorsque* $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *admet une limite finie en* a^+.

Notation ambiguë

Contrairement au cours sur les séries qui distinguent les notations

$$\sum u_n \text{ pour la série numérique} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \text{ pour la somme de cette série}$$

la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ représente à la fois l'intégrale généralisée et sa valeur en cas de convergence.

Pour lever toute ambiguïté, la première chose à faire sera de vérifier la convergence de l'intégrale.

Dessin (avant / après) :

Notation

Lorsque $b < a$, la notation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne la valeur $-\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t$.

Interprétation graphique : Pour les fonctions positives, $\int_I f$ est l'aire d'une surface non bornée.

Définition : Somme et Reste partiels d'une intégrale convergente

Pour une fonction f, continue par morceaux sur $[a, b[$.
Par analogie avec les séries numériques :

- $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelée la *somme partielle* de l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Et lorsque $\int_{[a,\ b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge :

  $R(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est appelé le *reste partiel* de l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b[} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Si $I =]a,\ b]$, la somme partielle est définie par $S(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et le reste partiel par* $R(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

Dessin

Proposition : Limite nulle du reste partiel

Lorsque $\int_{[a,\ b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = S(x) + R(x) \qquad \text{et donc} \qquad R(x) \xrightarrow[x\to b^-]{} 0$$

Preuve : On écrit $\displaystyle\int_a^X f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^X f(t)\,\mathrm{d}t$, puis on fait $x \to b^-$.

Méthode 1 : Etude de la convergence d'une intégrale par calcul de primitive

Pour étudier la convergence de $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $I = [a,\ b[$.

- On commence par vérifier que f est $\mathcal{C}^0$ sur $[a,\ b[$.
- On calcule $S(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$ et on étudie la limite de $S(x)$ lorsque $x \to b^-$.

Exercice : 1

(♡) Etudier la convergence et si elles existent, déterminer les valeurs de :

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha \neq 1$	$\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ pour $\alpha \neq 1$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln(t)\ \mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_0^{1} \ln(t)\ \mathrm{d}t$

$\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\ \mathrm{d}t$ pour $\alpha > 0$	

Les résultats démontrés ci-dessus sont à connaître parfaitement car il s'agit d'intégrales de référence.

Exercice : 2

($*$) Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ telle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.
Etudier la limite en $+\infty$ de :

$$\varphi(x) = \int_x^{2x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

PROPOSITION : **Invariance de la nature par modification d'une borne**

Soit f une fonction C_m sur $[a,\ b[$.
Si $c \in [a,\ b[$, on a alors :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{converge}$$

Même principe si $I =]a,\ b]$.

Preuve : Facile.

- *Cela signifie que la CVG de $\int_{[a,\ b[} f(t)\ \mathrm{d}t$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de b.*
  On pourra alors dire qu'on étudie la convergence de l'intégrale « au voisinage de b ».
- *Vous avez bien sûr observé l'analogie avec le fait que la CVG d'une série ne dépend pas des premiers termes.*

Définition : Convergence de $\displaystyle\int_{]a,\ b[} f$

Pour f une fonction numérique C_m sur $I =]a,\ b[$ avec $a,\ b \in \bar{\mathbb{R}}$.
On prend $c \in]a,\ b[$ quelconque.

- On dit que « $\displaystyle\int_{]a,\ b[} f$ *converge* » lorsque : $\begin{cases} \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t \text{ admet une limite } l_1 \in \mathbb{K} \text{ lorsque } x \to b^- \\ \displaystyle\int_y^c f(t)\,\mathrm{d}t \text{ admet une limite } l_2 \in \mathbb{K} \text{ lorsque } y \to a^+ \end{cases}$.
- La somme $l_1 + l_2$ est appelée la *valeur de l'intégrale* et est également notée :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ou} \quad \int_a^b f \quad \text{ou} \quad \int_{]a,\ b[} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On vérifie facilement que la CVG de l'intégrale et la valeur $l_1 + l_2$ ne dépendent pas du c choisi.

Méthode pour étudier la convergence de $\displaystyle\int_{]a,\ b[} f$

- On commence par vérifier que f est bien C_m sur $]a, b[$
- On vérifie la convergence au voisinage de a^+ (cad sur un intervalle de la forme $]a, c]$)
- On vérifie la convergence au voisinage de b^- (cad sur un intervalle de la forme $[c, b[$)

Exemples : Etudier la convergence et déterminer (en cas de convergence) les valeurs des intégrales suivantes :

$\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}t$	$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Limite de $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$

En cas de convergence de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on a : $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

⚠ La réciproque est fausse !

On a $\displaystyle\int_{-x}^{x} t\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \in \mathbb{R}$ et pourtant $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} t\,\mathrm{d}t$ diverge.

La déconnection des 2 études de convergence en a^+ et en b^- est donc indispensable.

Méthode : Etude de la CVG de $\displaystyle\int_{]a,\ b[} f(t)\,\mathrm{d}t$ avec une primitive

Si on connaît F une primitive de f :

- On pourra effectuer le calcul suivant :

$$\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_x^y = F(y) - F(x) \quad \text{puis vérifier que} \quad \begin{cases} F(y) \to l_1 \in \mathbb{K} \text{ en } b^- \\ F(x) \to l_2 \in \mathbb{K} \text{ en } a^+ \end{cases}$$

- Lorsqu'on demande de vérifier la CVG et de calculer l'intégrale, on peut directement écrire :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$$

Exemple : Le calcul direct $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = \left[\ \arctan t\ \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$ prouve également la CVG de l'intégrale.

Exemple : Etudier la convergence et calculer la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{9+t^2} - \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Définition : Intégrale faussement généralisée

Soit f une fonction C_m sur $[a,\ b[$ avec $b \in \mathbb{R}$.
Si f est prolongeable par continuité en b (cad admet une limite finie en b^-),
on dit que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{est} \quad \textit{faussement généralisée}$$

Une intégrale faussement généralisée est CONVERGENTE !

Exemples : $\displaystyle I = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle J = \int_1^2 \frac{\ln(t)}{1-t}\,\mathrm{d}t$ sont faussement généralisées.

3. **Cas des fonctions continues**

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue.
Dans ce cas, la fonction f admet des primitives sur I et on notera F l'une d'entre elles.

Proposition : Caractérisation de la convergence

$$\int_{[a,\ b[} f(t)\,\mathrm{d}t \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) \text{ admet une limite finie en } b^-.$$

Preuve : Immédiat puisque $\displaystyle S(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\ F(t)\ \right]_a^x = F(x) - F(a)$.

Méthode d'étude de convergence lorsqu'on dispose d'une primitive F

On pourra alors $\left\{\begin{array}{l}\text{justifier la CVG de l'intégrale}\\ \text{calculer l'intégrale}\end{array}\right.$ en écrivant :

$$\boxed{\int_{[a,\ b[} f(t)\ \mathrm{d}t \quad = \quad \left[\ F(t)\ \right]_a^{b^-} \quad = \quad \lim_{t\to b^-} F(t) - F(a)}$$

Même principe si $I =]a,\ b]$ ou si $I =]a,\ b[$.

Proposition : Régularité du reste et de la somme

Soit f **continue** sur $[a,\ b[$ telle que $\displaystyle\int_{[a,\ b[} f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

- La somme $S : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\ b[$ et $\forall x \in [a,\ b[,\quad S'(x) = f(x)$
- Le reste $R : x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\ b[$ et $\forall x \in [a,\ b[,\quad R'(x) = -f(x)$

Attention, les résultats sont inversés lorsque $I =]a, b]$

Preuve : Immédiat en exprimant $S(x)$ et $R(x)$.

Formule de dérivation d'un reste ou d'une somme

Lorsque la fonction f est continue, on a :

$$\forall x \in [a,\ b[,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t\Big) = -f(x) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t\Big) = f(x)$$

4. **Propriétés**

Proposition : Linéarité

Lorsque 2 des 3 intégrales convergent, la 3ième converge et on a : $\displaystyle\int_I (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$

Preuve : Immédiat avec les sommes partielles.

L'ensemble des fonctions dont l'intégrale converge sur I forme un sev de l'ensemble des f° $\mathcal{C}_m$ sur I.

Ne jamais écrire des horreurs du style

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(t+1)}\ \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\ \mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+1}$$

La première intégrale converge tandis que les deux dernières divergent !

Proposition : **Autres propriétés usuelles**

Pour deux fonctions f et g continues par morceaux sur $I =][a,\ b][$ telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent :

- Chasles : Lorsque $c \in I$, on a $\displaystyle\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.
- Positivité : $\begin{cases} f \geq 0 \\ a < b \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f \geq 0$ $\quad (\displaystyle\int_a^b f \leq 0 \quad \text{si} \quad a > b)$
- Croissance : $\begin{cases} f \leq g \\ a < b \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$ $\quad (\displaystyle\int_a^b f \geq \int_a^b g \quad \text{si} \quad a > b)$
- Intégrale nulle : Lorsque $\displaystyle\int_I f = 0$ avec $\begin{cases} f \text{ continue sur } I \\ f \text{ de signe constant sur } I \end{cases}$ alors $f = 0$ sur I.

Preuve : Souvent par simple passage à la limite.

Exercice : 3

($\heartsuit$) Montrer que $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} fg$ est un produit scalaire sur l'ensemble des f° continues de carré intégrable sur $\mathbb{R}$.

5. **Cas particulier des fonctions complexes** :

Ici la fonction $f : I \to \mathbb{C}$ est continue par morceaux sur $I \subset \mathbb{R}$.

Nous verrons dans un chapitre ultérieur, la généralisation des résultats suivants à des fonctions réelles à valeurs dans un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Comme pour les fonctions réelles, la définition de la convergence d'une fonction complexe, utilise la limite de la somme partielle. Mais on préfèrera utiliser la caractérisation suivante.

Théorème : **Caractérisation de la convergence**

$$\int_I f \text{ converge} \iff \int_I \mathrm{Re}(f) \quad \text{et} \quad \int_I \mathrm{Im}(f) \text{ convergent}$$

On a alors : $\displaystyle\int_I f = \int_I \mathrm{Re}(f) + i \int_I \mathrm{Im}(f)$

Preuve : Avec la caractérisation de la limite d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Remarque : pour prouver la convergence de $\displaystyle\int_I f$, on vérifiera plutôt l'intégrabilité de f sur I. (vu plus loin)

Corollaire : $\displaystyle\int_I f$ converge $\Rightarrow \displaystyle\int_I \bar{f}$ converge et dans ce cas : $\displaystyle\int_I \bar{f} = \overline{\int_I f}$.

Preuve : Avec la caractérisation précédente.

Exercice : 4

($*$) Convergence et calcul de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(\omega t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(\omega t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

2 Intégrabilité d'une fonction f sur un intervalle I

1. **Définition**

Dans cette partie, par analogie avec les séries absolument convergentes, on définit la notion d'intégrablité d'une fonction C_m sur un intervalle I.

DÉFINITION : **Intégrabilité**

On dira que f est *intégrable* sur I lorsque : $\begin{cases} f \text{ est continue par morceaux sur } I \\ \displaystyle\int_I |f| \text{ converge} \end{cases}$.

Attention à l'utilisation des termes

- La terme « convergente » s'applique à une intégrale : « $\int_a^b f$ est convergente »
- La terme « intégrable » s'applique à une fonction : « f est intégrable sur I »

Remarques :

- Lorsque « f est intégrable sur $[a, b[$ » on dit également que « $\int_{[a,b[} f$ est *absolument convergente* ».
- Lorsque f est de signe constant, l'intégrabilité de f sur I est équivalente à la convergence de $\int_I f$.
  Plutôt que dire « l'intégrale convergence », il est alors usuel de dire que « f est intégrable sur I ».

Exemple : Une fonction C_m sur $[a,\ b]$ est intégrable sur $[a,\ b]$ car sa valeur absolue est également C_m sur $[a,\ b]$.

Exercice : 5

($*$) Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables :

• $t \mapsto \dfrac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t^2+1}$ sur $\mathbb{R}^+$	
• $t \mapsto \dfrac{e^{it}}{t^2}$ sur $[1,\ \infty[$	

Notation : $L_1(I,\ \mathbb{K})$ **et** $L_2(I,\ \mathbb{K})$

- L'ensemble des fonctions intégrables sur I est noté $L_1(I,\ \mathbb{K})$.
- L'ensemble des fonctions de carré intégrables sur I est noté $L_2(I,\ \mathbb{K})$.

Ce sont des sev de $\mathcal{C}_m(I,\ \mathbb{K})$.

♡ *Prouver l'intégrabilité d'une fonction revient à prouver la convergence de l'intégrale d'une fonction positive. Pour cela, nous disposons des mêmes techniques que pour l'étude de la convergence d'une série, à savoir les théorèmes de comparaison : "$\leq$", "o", "O" et "$\sim$" ?*

PROPOSITION : **Décalage en** 0

Pour f comtinue par morceaux sur $]a, b[$:
- f est intégrable en a ssi $t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0
- f est intégrable en b ssi $t \mapsto f(b-t)$ est intégrable en 0

Exemple : Etudier l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ sur $]a,\ b]$.

2. **Etude de la convergence de l'intégrale d'une fonction positive**

Les théorèmes d'étude de convergence ci-dessous sont analogues à ceux portant sur la convergence des SATP.

Remarque : Lorsque $\displaystyle\int_a^b f$ diverge avec f positive, on pourra noter $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$.

THÉORÈME : **Théorème de comparaison pour les fonctions positives**

Pour f et g, deux fonctions C_m sur $[a,\ b[$, $]a,\ b]$ ou $]a,\ b[$ avec : $0 \leq f \leq g$

- $\displaystyle\int_a^b g$ converge $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b f$ converge.
- $\displaystyle\int_a^b f$ diverge $\Rightarrow$ $\displaystyle\int_a^b g$ diverge.

Preuve : Sur $[a,\ b[$: Les applications $t \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ et $t \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$ sont croissantes.

⚠ *Comme pour les séries numériques, n'oubliez pas de vérifier la positivité de ces fonctions !*
Nous savons que pour les séries numériques : CVA $\Rightarrow$ CVG.
Qu'en est-il pour l'intégrabilité ?

THÉORÈME : **Intégrable** $\Rightarrow$ **Convergence.**

$$f \text{ est intégrable sur } I \quad \Rightarrow \quad \int_I f \text{ converge.}$$

Dans ce cas on a alors : $\displaystyle\left|\int_I f\right| \leq \int_I |f|$.

Preuve : La démonstration est analogue à celle utilisée pour les séries numériques.

- Pour f à valeurs réelles :
  On décompose $f = f^+ - f^-$ avec f^+ et f^- deux fonctions C_m positives définies par...
  On a alors $|f| = f^+ + f^-$ et d'après le théorème de majoration, $\int_I f^+$ et $\int_I f^-$ convergent...
- Pour f à valeurs complexes : $|\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$ et $|\operatorname{Im}(f)| \leq |f|$...

La majoration s'obtient par passage à la limite.

Corollaire : **Passage à un équivalent**

Soit f et g continues par morceaux sur $[a,\ b[$.

$$f(x) \underset{b^-}{\sim} g(x) \geq 0 \quad (\text{ou} \leq 0) \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f \quad \text{et} \quad \int_a^b g \text{ sont de même nature.}$$

Remarques :

- Comme pour les séries numériques, n'oubliez pas de vérifier que l'équivalent est de signe constant !
- Pour prouver la convergence de l'intégrale, on utilisera plutôt le corollaire suivant.

Corollaire : **Intégrabilité par comparaison**

Pour une fonction f continue par morceaux sur $[a, b[$.
Quand on a au voisinage de b :

- $f(t) \sim g(t)$ avec g intégrable au voisinage de b, alors f est intégrable au voisinage de b.
- $f(t) = O(g(t))$ avec g intégrable au voisinage de b, alors f est intégrable au voisinage de b.
- $f(t) = o(g(t))$ avec g intégrable au voisinage de b, alors f est intégrable au voisinage de b.

L'intégrabilité de f ainsi obtenue par d'en déduire que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge.

Exercice : 6

$(*)$ Nature des intégrales impropres suivantes :

• $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t$ lorsque $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} l > 0$	
• $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+1}\ \mathrm{d}t$	
• $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t}\ \mathrm{d}t$	
• $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t^2+1}{e^{2t}}\ \mathrm{d}t$	

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$	
• $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$	
• $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{t})}{t}\,\mathrm{d}t$	
• $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{te^{-t^2}}{1+e^{-t}}\,\mathrm{d}t$	
• $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+t}{1+t^3}\,\mathrm{d}t$	
• $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t^3)}}$	
• $\displaystyle\int_0^{1} \ln^2 t\,\mathrm{d}t$	

Exercice : 7

$(*)$ Montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{\frac{1+i}{t}}}{t^2}\,\mathrm{d}t$ et de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-2it}{(t^2-i\sin t)^2}\,\mathrm{d}t$.

DÉFINITION : **Intégrale semi-convergente**.

Lorsque $\displaystyle\int_I f$ converge mais que f n'est pas intégrable sur I on dit que $\displaystyle\int_I f$ est semi-convergente.

Analogie avec la semi-convergence des séries numériques.

Exemples : Nous verrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor t\rfloor}}{t}\,\mathrm{d}t$ sont semi-convergentes.

3. **Opérations sur l'intégrabilité**

Proposition : Combinaison linéaire

Une combinaison linéaire de fonctions intégrables sur I est intégrable sur I

Preuve : Facile.

On note habituellement $L^1(I,\ \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions intégrables sur I.
C'est un $\mathbb{K}$-ev sur lequel $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire.

Proposition : Intégrabilité du produit de deux fonctions

- ⚠ On ne sait rien de la convergence du produit de 2 fonctions intégrables.
- ♡ En revanche, le produit fg est intégrable lorsque f^2 et g^2 le sont !

Preuve :

- En prenant $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \times \frac{1}{\sqrt{t}}$ sur $[0,\ 1]$.
- D'après l'inégalité $|fg| \leq \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$.

Notation : $L^2(I,\ \mathbb{R})$

L'ensemble des fonctions de carré intégrable sur I est noté $L^2(I,\ \mathbb{R})$.
$\mathcal{C}_m(I,\ \mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(I,\ \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ que l'on peut munir du produit scalaire usuel : $\langle f, g\rangle = \int_I fg$.

Proposition : Intervalle

- f intégrable sur $I \Rightarrow f$ intégrable sur $J \subset I$.
- f intégrable sur $]a,\ b[\iff f$ intégrable sur $]a,\ c]$ et sur $[c,\ b[$ (pour $c \in]a,\ b[$ arbitraire)

4. **Intégrabilité et limite en $+\infty$**

Pour f, une fonction continue par morceaux sur $[a,\ +\infty[$.

Proposition : Si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \neq 0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Preuve :

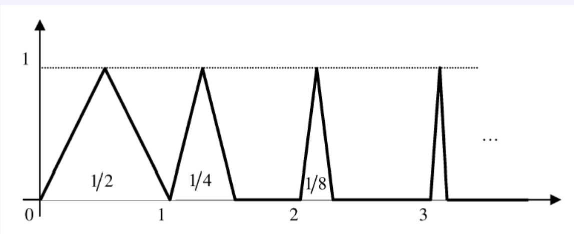
- Lorsque f est réelle ... facile
- Lorsque f est complexe, on considère la partie réelle ou la partie imaginaire.

Attention : Il n'y a pas de CN de convergence en $+\infty$

Contrairement à l'intuition (qui provient du cours sur les séries numériques), on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \quad \not\Rightarrow \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Contre-exemple :



D/ La somme partielle S étant croissante, sa limite est celle de $S(n) = \int_0^n f$.

Ainsi, $\int_0^{+\infty} f$ converge et pourtant f ne tend pas vers 0.

Retenons la méthode utilisée dans le contre-exemple précédent :

Méthode lorsque f est positive

La suite $\left(\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t\right)_n$ et l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

D/ Par application de la limite monotone à S et caractérisation séquentielle.

3 Les fonctions intégrables de référence

La justification de la convergence d'une intégrale (ou l'intégrabilité d'une fonction) à l'aide des théorèmes de comparaison précédents, nous conduit à introduire des fonctions de référence dont l'intégrabilité est connue.

1. **Intégrales de Riemann** :

Les propositions suivantes se démontrent par simple calcul.

Proposition : **Au voisinage de $+\infty$**

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha > 1.$$

Compte-tenue de la positivité, on a donc « $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ intégrable au voisinage de $+\infty$ ssi $\alpha > 1$ ».

Intuitivement : Il faut que $\alpha > 1$ pour que la convergence de $\frac{1}{t^\alpha}$ vers 0 soit assez rapide.

Exemples : $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{1,00001}}$ convergent tandis que $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ divergent.

Exercice : 8

($*$) Déterminer la nature des intégrales suivantes :

• $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$	

• $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$	
• $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\ln(t+1)}$	

PROPOSITION : Au voisinage de 0^+ (ou 0^-)

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1$$

Compte-tenue de la positivité, on a donc $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable au voisinage de 0^+ (ou 0^-) ssi $\alpha < 1$.

Preuve : Simple calcul.

Exemples :

- Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^{0.999}}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ convergent tandis que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ divergent.
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ diverge dans tous les cas !

PROPOSITION : Au voisinage de a^+ (ou a^-)

$$\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha} \text{ converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha < 1$$

Compte-tenue de la positivité, on a donc $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable au voisinage de a^+ (ou a^-) ssi $\alpha < 1$.

Preuve : Simple calcul ou par décalage en 0.

Exemple : L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$ converge tandis que $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-t}$ diverge.

---

2. **Les fonctions exponentielle et logarithme** :

PROPOSITION : La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ ssi $\alpha > 0$.

Preuve : Simple calcul.

Intuitivement : Il y a convergence car $e^{-\alpha t}$ tend « très rapidement » vers 0 en $+\infty$.

Exemple : Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{te^t}$ est intégrable sur $[1,\ +\infty[$.

PROPOSITION : La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable au voisinage de 0^+.

Preuve : Simple calcul.

Exemple : Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+e^t}$ est intégrable sur $]0,\ 1]$.

3. **Méthode d'étude de la nature d'une intégrale** :

Schéma d'étude de CVG d'une intégrale

- On commence par vérifier la continuité par morceaux de la fonction de façon à identifier la ou les bornes à problème.

$$\boxed{\bullet\ t \mapsto f(t) \text{ est } C_m \text{ sur } [a,\ b[}$$

- On recherche un équivalent au voisinage de la borne à problème b étudiée.

$$\boxed{\bullet \text{ Etude en } b^- \ :\ f(t) \sim g(t) \quad \text{au voisinage de } b^-}.$$

On regarde alors si cet équivalent est de signe constant, puis s'il est intégrable.
On repère en particulier le cas où l'intégrale étudiée est faussement impropre.

Intégrabilité de l'équivalent

Si l'équivalent $g(t) > 0$ obtenu ne permet pas de conclure directement, on s'intéresse à la limite de $t^\alpha g(t)$ au voisinage de a en choisissant α judicieusement selon que l'on veut montrer la convergence ou la divergence de l'intégrale.

- En $a = 0$:
  - $\rightarrow$ Pour montrer la CVG on montrera que $t^\alpha u(t) \xrightarrow[t\to a]{} 0$ en choisissant $\alpha < 1$
  - $\rightarrow$ Pour montrer la DIV on montrera que $0 \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq u(t)$ au voisinage de 0 avec un $\alpha > 1$
- En $a = +\infty$:
  - $\rightarrow$ Pour montrer la CVG on montrera que $t^\alpha u(t) \xrightarrow[t\to a]{} 0$ en choisissant $\alpha > 1$
  - $\rightarrow$ Pour montrer la DIV on montrera que $0 \leq \frac{1}{t^\alpha} \leq u(t)$ au voisinage de 0 avec un $\alpha < 1$

Exercice : 9

$(*)$ **Entraînement** : Etudier la nature des intégrales généralisées suivantes :

- $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}\,\mathrm{d}t$ • $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\cos t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ • $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t}{t}\,\mathrm{d}t$ • $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 - 1}$ • $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t-1}{\ln t}\,\mathrm{d}t$

Voir l'exercice 28 de la banque CCINP.

4 Méthodes de transformation d'une intégrale impropre

Idée : Pour calculer ou étudier la convergence d'une intégrale, il est souvent utile de commencer par la transformer par l'une des 3 techniques usuelles suivantes.

- à l'aide d'une primitive F
- à l'aide d'un changement de variables $u = \varphi(t)$
- à l'aide d'une intégration par partie

---

1. **A l'aide d'une primitive** : Pour les fonctions f continues sur I

Méthode de transformation avec une primitive F de f sur $]a,\ b[$

On peut justifier la convergence de $\displaystyle\int_I f$ et la CALCULER en :

- Pour $I = [a,\ b[$: on calcule $S(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t = F(x) - F(a)$ puis on fait $x \to b$.
- Pour $I =]a,\ b[$: on calcule $S(x, y) = \displaystyle\int_x^y f(t)\ \mathrm{d}t = F(y) - F(x)$ puis on fait $y \to b$, puis $x \to a$.

Exemple : Calculer $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t(t+1)}$.

Remarque : L'utilisation d'une primitive permet en général de CALCULER la valeur de l'intégrale. Malheureusement, dans la plupart des cas, une telle primitive est impossible à obtenir.

---

2. **Par changement de variable** : Pour les fonctions f continues par morceaux sur $]\alpha,\ \beta[$.

Théorème : **Changement de variable**

Lorsque $\varphi :]a,\ b[\to \mathbb{R}$ est $\begin{cases} \text{de classe } \mathcal{C}^1 \\ \text{strictement monotonne} \end{cases}$.

$$\int_\alpha^\beta f(u)\ \mathrm{d}u \text{ converge} \iff \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \quad \text{avec} \begin{cases} \varphi(t) \xrightarrow[t\to a^+]{} \alpha \\ \varphi(t) \xrightarrow[t\to b^-]{} \beta \end{cases}$$

En cas de convergence on a alors : $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(u)\ \mathrm{d}u = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t$.

Preuve :
$\Rightarrow$ En découpant l'intégrale en 2, en effectuant un changement de variable sur les sommes partielles puis en passant à la limite.
$\Leftarrow$ Même chose avec le changement de variables φ^{-1}.

Méthode d'étude de convergence par changement de variable

On peut utiliser un changement de variable pour justifier la convergence d'une intégrale :

$$\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\ \mathrm{d}t \text{ converge} \quad \Rightarrow \quad \int_\alpha^\beta f(u)\ \mathrm{d}u \text{ converge}$$

Remarques : ♡

- **Sur la régularité** : Lorsque le changement de variable est usuel, on pourra l'appliquer sans vérifier les hypothèses de régularité.

- **Sur la convergence** : Il est inutile de vérifier la convergence de l'intégrale avant d'effectuer un changement de variable : si le calcul aboutit, c'est que l'intégrale converge.

- **Sur la mise en oeuvre** : Pour appliquer le changement de variable, il est inutile d'apprendre la formule ci-dessus. On retiendra seulement sa mise en oeuvre présentée ci-dessous.

Mise en oeuvre d'un changement de variable

- On pose $u = \varphi(t)$ sur $]a,\ b[$.
- On calcule alors $\mathrm{d}u = \varphi'(t)\ \mathrm{d}t$.
- "Sous réserve de convergence", on remplace alors :
  - → t et $\mathrm{d}t$ dans l'intégrale initiale
  - → les bornes a et b par les valeurs α et β correspondantes (on peut faire un tableau !)
- On en déduit :
  - → la convergence ou la divergence de l'intégrale
  - → un transformation voire la valeur de l'intégrale initiale en cas de convergence

On peut également poser $t = \varphi(u)$ et procéder de la même façon...

Applications usuelle du changement de variable

On effectue un changement de variable lorsque :

- On souhaite prouver la convergence ou calculer une intégrale :

  Exemple : Convergence et valeur de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}\ \mathrm{d}t$.

- On souhaite transformer les bornes d'une intégrale :

  Exemple : Prouver que $\displaystyle\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t}\ \mathrm{d}t = \int_0^{\pi} (-1)^n \frac{\sin(t)}{t+k\pi}\ \mathrm{d}t$.

- On souhaite éliminer une variable dans une intégrale :

  Exemple : Prouver que $\displaystyle\int_0^1 \sin(xt^2)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin(u^2)\ \mathrm{d}u$.

Corollaire : **Changement de variable et intégrabilité**

Avec les hypothèses précédentes :

$$f \text{ intégrable sur }]\alpha,\ \beta[\iff f\circ\varphi.\varphi' \text{ intégrable sur }]a,\ b[$$

Preuve : On applique le résultat précédent à $\|f\|$ en utilisant le fait que φ' est de signe constant.

Exemple : Sous réserve de convergence, lorsque f est impaire, on a : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Preuve :

Exercice : 10

$(*)$ Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 0$. $\quad (u = \frac{1}{t})$

Preuve :

Remarque : Contrairement à ce que laissent penser les exemples précédents, les changements de variable aboutissent rarement au calcul de l'intégrale étudiée. Le plus souvent, ils permettent uniquement de la transformer en une autre intégrale plus simple à étudier.

---

3. **Par Intégration par parties** :

THÉORÈME : **Integration par parties**

Si u et v sont $\mathcal{C}^1$ sur $]a,\ b[$ et $\boxed{u.v \text{ converge en } \left\{\begin{array}{l} a^+ \\ b^- \end{array}\right.}$ alors :

$$\int_a^b u'v \text{ et } \int_a^b uv' \text{ sont de même nature} \quad \text{et si elles convergent : } \int_a^b u'v = [\ uv\ ]_{a^+}^{b^-} - \int_a^b uv'$$

Preuve : Immédiat en considérant $\int_x^y u'v + uv'$.

Remarques : ♡

- **Sur la régularité de u et v** : On pourra se dispenser de vérifier le caractère $\mathcal{C}^1$ des fonctions u et v choisies.
- **Sur la nature des 2 intégrales** : La convergence du terme $[u(t)v(t)]_a^b$ assure que les deux intégrales sont de même nature.
- **Sur la convergence** : On peut effectuer une IPP avant de connaître la convergence d'une intégrale. Le fait que le calcul aboutisse prouve naturellement cette convergence.
- **Plus généralement** : Dans une IPP, la convergence de 2 des 3 termes justifie la convergence du 3ème.

Méthode de mise en oeuvre d'une IPP

- On introduit proprement les fonctions u et v.
- On vérifie la convergence de $u(t)v(t)$ en a^+ et b^-.
- "Sous réserve de convergence", on applique la formule. On en déduit :
  - → la CVG ou la divergence de l'intégrale initiale
  - → une transformation voire la valeur de l'intégrale initiale si convergence

Exercice : 11

$(*)$ Calculer $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Méthode

On peut utiliser une IPP pour étudier la nature d'une intégrale.

Exemple : Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque : La primitive v doit parfis être choisie judicieusement.

Exercice : 12

$(**)$ Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t$.

IPP naturelle : En prenant $u = \ln t$ et $v' = \frac{1}{(1+t)^2}$ puis $v = \frac{-1}{1+t}$, le produit uv ne converge pas en 0...

IPP partielle : On effectue une IPP sur $[x,\ 1]$ puis on fait $x \to 0^+$...

IPP rusée : On effectue une IPP mais en prenant pour primitive $v = 1 - \frac{1}{1+t}$ (RUSE usuelle !!).

♡ Morale de l'exercice : Dans une IPP, la meilleure primitive à choisir n'est pas toujours la plus simple !!

Exercice : 13

$(*)$ Etudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{it^2}\,\mathrm{d}t$.

Il vous faudra peut-être 3 essais avant de trouver la bonne IPP...

5 Calcul d'une intégrale convergente sous Python

Nous allons présenter les méthodes sur un exemple en nous intéressant à $I = \int_2^5 \ln t \, dt$.

- **<u>Définition de la fonction</u>** :

```
from math import log           # importation de la fonction logarithme népérien
f = lambda x : log(x)          # création de la fonction f à intégrer
```

- **<u>Méthode 1</u>** : Le plus simple!!

  Avec la fonction `quad()` de `scipy.integrate`

```
from scipy.integrate import quad        # Importation de la fonction
print(quad(f,2,5))

# Réponse : (3.6608952010506113, 4.06441014294613e-14)
```

La réponse est donnée en première composante, la deuxième composante donne un majorant de l'erreur.

- **<u>Méthode 2</u>** : Avec la méthode des rectangles

Dessin :

```
N = 100000
a = 2
b = 5
p = (b - a)/N                              # Découpage de l'intervalle [a,b]
I = 0                                      # Valeur intitiale de l'intégrale
for k in range(0,N) : I = I + f(a + k*p)   # Calcul de l'intégrale
print(p*I)

# Réponse : 3.6608814566670653
```

- **<u>Méthode 3</u>** : Avec la méthode des trapèzes

Dessin :

Python
```
N = 100000
a = 2
b = 5
p = (b - a)/N                            # Découpage de l'intervalle [a,b]
I = 0                                    # Valeur intitiale de l'intégrale
for k in range(1,N) : I = I + f(a + k*p)      # Calcul de l'intégrale
print(p*(f(a)+f(b)+2*I)/2)

# Réponse : 3.6608952010280436
```

Cas où $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est généralisée en a ou b

On applique la même méthode en éliminant les termes $f(a)$ et $f(b)$ des formules utilisées.

Exemple : Adapter les programmes précédents pour calculer $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

6 Comparaison de la convergence « Série $\longleftrightarrow$ Intégrale »

Rappel de l'encadrement d'une somme partielle

Soit f une fonction $\begin{cases} C_m \\ \text{décroissante} \end{cases}$ sur $[n_0-1,\ +\infty[$.

Pour tout $n \geq n_0$:

$$\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \leq \quad \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \quad \leq \quad \int_{n_0-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$$

On a l'encadrement opposé lorsque la fonction est croissante au lieu de décroissante.

Preuve : Par sommation des encadrements $f(k) \leq \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leq f(k-1)$ de $\begin{cases} n_0 \text{ à } n \\ n_0+1 \text{ à } n+1 \end{cases}$.

Application à la recherche d'un équivalent

On démontre ainsi que :

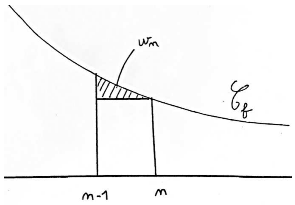
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n\ln(k)} \sim \ln(\ln n)$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$
- $\displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{n^a} \sim \frac{1}{(a-1)n^{a-1}}$

Exercice : 14

(♡) Lorsque f est C_m et décroissante sur $[n_0,\ +\infty[$, montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} f(n)$ et $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Exercice : 15

(♡) On suppose f positive, continue par morceaux et décroissante vers 0 sur $\mathbb{R}^+$.



1. Montrer que la série $\sum w_n$ de terme général $w_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n)$ converge.
2. En déduire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} = 2\sqrt{n} + \alpha + o(1)$.

7 Musculation

1. **Etude de convergence via l'étude d'une série** :

Le problème : On souhaite étudier la converge en $+\infty$ de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Il s'agit donc d'étudier la limite de $S(x) = \displaystyle\int_0^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$.

La méthode : On pose $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to +\infty$ et on étudie la convergence de la suite $(S(x_n))$.

Comme $S(x_n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$, on est ramené à étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$.

La question : Mais l'étude de cette série permet-elle de déterminer la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$?

Contre-exemple : ⚠ La méthode ne marche pas pour $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t$ en posant $x_n = 2n\pi$.

Dans certains cas, cette méthode semble pourtant intéressante à envisager.

Exemple 1 : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t$.

En posant $x_n = n\pi$ on parvient à éliminer les valeurs absolues. $\quad (u = t - k\pi)$

$$S(n\pi) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin(t)|}{t}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_0^{\pi} (-1)^k \frac{\sin(u)}{u+k\pi}\,\mathrm{d}t.$$

Exemple 2 : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

En posant $x_n = n$ on parvient à éliminer les parties entières.

$$S(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^3}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{k}{t^3}\,\mathrm{d}t$$

(a) **Cas d'une fonction f positive**.

Dans ce cas, la somme partielle S est croissante et $S(x)$ et $S(x_n)$ ont donc la même limite.
La méthode est alors légitime.

Rappels : Caractérisation séquentielle de la limite

- La caractérisation séquentielle de la limite nous dit que

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \bar{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall (x_n) \to +\infty,\ f(x_n) \to l$$

- En particulier : Lorsque f est croissante, on a par limite monotone :

$$\begin{cases} x_n \to +\infty \\ f(x_n) \to l \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l$$

D/ Une fonction croissante admet une limite en $+\infty$.

Exemple : Etudier la convergence et calculer $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\lfloor t \rfloor}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

(b) **Pour prouver la convergence d'une intégrale**.

Dans ce cas, la méthode s'applique également en prenant certaines précautions.

Exemple : On souhaite prouver la convergence de $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor t \rfloor}}{t}\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver la convergence de la suite $(S(n))$ vers une limite $l \in \mathbb{R}$.

On souhaite alors prouver que $S(x)$ tend également vers l en $+\infty$.

2. Prouver que $S(x) - S(\lfloor x \rfloor)$ tends vers 0.

3. En déduire la convergence de I.

2. **Intégrales de Bertrand** : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$

THÉORÈME : $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ converge $\iff$ $\alpha > 1$ ou $\begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta > 1 \end{cases}$.

Preuve :

- Méthode 1 : Comme pour les séries de Bertrand, on traite les différents cas : $\alpha < 1$, $\alpha > 1$ et $\alpha = 1$...
- Méthode 2 : Avec les séries de Bertrand et le théorème de comparaison « intégrale $\longleftrightarrow$ série ».

Il faut savoir refaire la méthode 1 car les intégrales de Bertrand ne sont pas au programme.

Exemples : Que dire de la convergence de : • $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}\ln^2 t}$ • $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ • $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln^2(t)}$?

---

3. **Semi convergence de l'intégrale de Dirichlet** : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

Nous allons voir dans cette partie que l'intégrale de Dirichlet est semi-convergente.
Nous traiterons également quelques questions qui reviennent fréquemment lors des concours.

PROPOSITION : **Formule prouvant la convergence**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\,\mathrm{d}u$$

Preuve : On fait une IPP en choisissant une primitive judicieuse et on termine le calcul en posant $u = \frac{t}{2}$.

COROLLAIRE : **Convergence de l'intégrale de Dirichlet**

L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Preuve : Facile...

Remarque : Il est possible de démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$, mais ça, c'est une autre histoire...

Proposition : La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[0,\ +\infty[$.

Preuve : **A connaître absolument ! !**

- On décompose $I_n = \int_0^{n\pi} |\frac{\sin t}{t}|\, \mathrm{d}t$ avec la relation de Chasles sur les segments $[k\pi,\ (k+1)\pi]$.
- Un changement de variable permet de ramener les bornes à $[0,\ \pi]$.
- On minore alors chacune des intégrales par $\frac{2}{\pi(k+1)}$ pour conclure que $I_n \to +\infty$.
- On conclut avec le théorème de la limite monotone en remarquant que $x \mapsto \int_0^{x} |\frac{\sin t}{t}|\, \mathrm{d}t$ est croissante.