Réduction Algébrique

—

Polynômes annulateurs

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

29 novembre 2024

Dans ce chapitre, nous allons voir que l'étude des polynômes annulateurs d'une matrice ou d'un endomorphisme nous donne en particulier des informations sur :

- Leur spectre (Les valeurs propres d'un endomorphisme sont parmi les racines des polynômes annulateurs)
- Leur diagonalisabilité (un endomorphisme est diagonalisable ssi il annule un polynôme simplement scindé)
- Leur trigonalisabilité (un endomorphisme est trigonalisable ssi il annule un polynôme scindé)

Questions de cours à maîtriser pour les colles :

- Les racines du polynôme minimal sont exactement les valeurs propres de u
- Lemme de décomposition des noyaux
- Deux endomorphismes diagonalisables commutent si et seulement si ils admettent une base commune de vecteurs propres
- CNS de diagonalisabilité à l'aide d'un polynôme annulateur
- CNS de trigonalisabilité à l'aide d'un polynôme annulateur
- Définition, propriétés et dimension des sev caractéristiques d'un endomorphisme trigonalisable

Table des matières

1 Polynôme en un endomorphisme/matrice

Dans cette partie :

- E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque
- $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$
- $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$
- $P,\ Q,\ R \in \mathbb{K}[X]$

Définition : Lorsque $P = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k$ et $u \in \mathcal{L}(E)$, on note :

- $P(u) = \sum_{k=0}^{N} a_k u^k \quad \in \mathcal{L}(E)$ ⚠ La constante a_0 du polynôme devient $a_0\,\mathrm{id}_E$
- $P(A) = \sum_{k=0}^{N} a_k A^k \quad \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ⚠ La constante a_0 du polynôme devient $a_0 I_n$

Notation : Image de x par $P(u)$

⚠ L'image de $x \in E$ par l'endomorphisme $P(u)$ est notée $P(u)(x)$ ou $[P(u)](x)$.
Il ne faut donc surtout pas écrire $\cancel{P(u(x))}$ qui a un tout autre sens.

Théorème Fondamental :

$$\begin{array}{ccccc} \varphi_u & : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & & P & \mapsto & P(u) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} \varphi_A & : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ & & P & \mapsto & P(A) \end{array}$$ sont des morphismes d'algèbre.

En particulier :

- $(\lambda P + \mu Q)(u) = \lambda P(u) + \mu Q(u)$
- $(P \times Q)(u) = P(u) \times Q(u)$
- $(\lambda P + \mu Q)(A) = \lambda P(A) + \mu Q(A)$
- $(P \times Q)(A) = P(A) \circ Q(A)$

Preuve : Non démontré car ennuyeux...

Conséquence : On peut remplacer X par A ou u dans toute relation polynômiale. ⚠ à la constante

Exemples :

- $PQ + R = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} P(u) \circ Q(u) + R(u) = \tilde{0}_E \\ P(A)Q(A) + R(A) = \tilde{0}_n \end{array} \right.$
- $P = (X+a)(X+b) \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} P(u) = (u + a\,\mathrm{id}_E) \circ (u + b\,\mathrm{id}_E) \\ P(A) = (A + aI_n)(A + bI_n) \end{array} \right.$

Corollaire : **Commutativité de deux polynômes en** $\left\{ \begin{array}{l} u \\ A \end{array} \right.$

En général, les endomorphismes et les matrices ne commutent pas.

Cependant, lorsque $P,\ Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\left\{ \begin{array}{l} u \in \mathcal{L}(E) \\ A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \end{array} \right.$, on a : $\left\{ \begin{array}{l} P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) \\ \\ P(A)Q(A) = Q(A)P(A) \end{array} \right.$.

Remarque : le symbôle ≪ ∘ ≫ est en général ommis : $P(u) \circ Q(u)$ sera plus rapidement noté $P(u)Q(u)$.

DÉFINITION : **Polynôme d'endomorphisme/matriciel**

On dit que :

- v est un *polynôme en l'endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(E)$ lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $v = P(u)$.
- B est un *polynôme en la matrice* $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ lorsqu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = P(A)$.

Notations : $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ **et** $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$

$\mathbb{K}[u]$ et $\mathbb{K}[A]$ sont deux sous-algèbres COMMUTATIVES de $\mathcal{L}(E)$ et de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Ce sont, respectivement, les plus petites sous-algèbres de $\mathcal{L}(E)$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ contenant u et A.

PROPOSITION : Lorsque $u \circ v = v \circ u$: Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Im} P(u) \\ \ker P(u) \end{array} \right.$ sont stables par v.

En particulier $\operatorname{Im} P(u)$ et $\ker P(u)$ sont stables par u.

Preuve : v et $P(u)$ commutent et on peut donc appliquer un théorème connu.

Exemple : ♡ Lorsque $u \circ v = v \circ u$, les sous-espace propres de u sont stables par v.

PROPOSITION : **Lien entre polynôme d'endomorphisme et polynôme matriciel**

Lorsque $\left\{ \begin{array}{l} e \text{ est une base de } E \\ u \in \mathcal{L}(E) \\ A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \end{array} \right.$, on a : $\operatorname{Mat}_e(u) = A \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Mat}_e P(u) = P(A)$.

Preuve : Car l'application Mat_e est linéaire.

---

2 Polynômes annulateurs

1. Définition - Exemples :

DÉFINITION : **Polynôme annulateur**

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un polynôme annulateur de $\left\{ \begin{array}{l} u \\ A \end{array} \right.$ lorsque $\left\{ \begin{array}{l} P(u) = \tilde{0}_E \\ P(A) = 0_n \end{array} \right.$.

2. Exemples de polynômes annulateurs non nuls :

- Homothéties.
- Projecteurs et des symétries
- Endomorphisme nul
- Endomorphismes nilpotents.
- $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $u^3 = 2u - 3\,\mathrm{id}_E$
- $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$
- $A = \operatorname{Diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
- $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A^p = I_n$
- $A = \operatorname{Diag}(A_1, \ldots, A_p)$

Nous verrons que le polynôme caractéristique de $\left\{\begin{array}{l} u \\ A \end{array}\right.$ *est annulateur de* $\left\{\begin{array}{l} u \\ A \end{array}\right.$ *, cad* $\left\{\begin{array}{l} \chi_u(u)=\tilde{0} \\ \chi_A(A)=0_n \end{array}\right.$ *.*

- Unicité : NON car si P est annulateur, alors PQ l'est aussi.

- Existence :

NON en dimension infinie *la dérivation dans* $\mathbb{K}[X]$.

OUI en dimension finie.

3. L'ensemble des polynômes annulateurs

Nous venons de voir qu'en dimension finie, cet ensemble n'est pas réduit à $\{0\}$.
Que peut-on dire de plus ?

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Idéal des polynômes annulateurs**

L'ensemble des polynômes anulateurs est $\left\{\begin{array}{l} \text{un sev} \\ \text{un idéal} \end{array}\right.$ de $\mathbb{K}[X]$.

En particulier : $P(u)=\tilde{0} \quad \Rightarrow \quad \forall Q \in \mathbb{K}[X],\ QP(u)=\tilde{0}$ (Idem pour les matrices).

Preuve : Pas de difficulté.

Remarque : Ce n'est pas un sous-anneau car il ne contient par l'élément neutre 1 pour la multiplication.

THÉORÈME : **Définition du polynôme minimal**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul, admettant un polynôme annulateur non nul.

Il existe un unique polynôme Π_u tel que :
- Π_u est unitaire et annulateur de u
- Π_u divise tout polynôme annulateur de u.

Ce polynôme est appelé le *polynôme minimal* de u. (il n'est pas constant !)

Preuve : L'ensemble I des polynômes annulateur de u est un idéal de l'anneau principal $\mathbb{K}[X]$.
Il existe donc un unique Q tel que $I = Q.\mathbb{K}[X]$ avec Q unitaire.

Remarque :
- Le polynôme minimal est également parfois noté μ_u

- On définit de façon analogue le polynôme minimal d'une matrice.
- C'est le plus petit polynôme annulateur unitaire en terme de degré.

PROPOSITION : Toute matrice et tout endomorphisme en dimension finie admet un polynôme minimal.

Preuve : Lorsque $\dim E = n$, on a $\dim \mathcal{L}(E) = n^2$ et donc la famille $(\mathrm{id}_E,\ u,\ u^2,\ \ldots,\ u^{n^2})$ est liée.

PROPOSITION :
- Lorsque $A = \mathrm{Mat}_e(u)$, on a $\Pi_u = \Pi_A$.
- Lorsque A et B sont semblables, on a $\Pi_A = \Pi_B$

Preuve : u et A ont le même ensemble de polynômes annulateurs.

Méthode : Pour déterminer le polynôme minimal de $u \in \mathcal{L}(E)$

- Pour commencer, nous avons besoin d'un polynôme annulateur P non nul :
  → Qui nous donne une idée du degré de Π_u : $\deg \Pi_u \leq \deg P$
  → Qui nous permet de limiter le champ d'étude : Π_u est parmi les diviseurs de P
- On teste alors les diviseurs en commençant par ceux de plus bas degré.

Nous verrons plus loin qu'il est possible de déterminer directement le polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable.

Exemple : Déterminer le polynôme minimal $\left\{\begin{array}{l}\text{d'une symétrie}\\ \text{d'une projection}\end{array}\right.$ non triviales.

4. Polynômes annulateurs et valeurs propres : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$

LEMME : λ valeur propre de $\left\{\begin{array}{l} u \in \mathcal{L}(E) \\ A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \end{array}\right. \Rightarrow P(\lambda)$ est valeur propre de $\left\{\begin{array}{l} P(u) \\ P(A) \end{array}\right.$.

Preuve : Facile en prenant un vecteur propre de u associé à λ.

Remarque : La démonstration précédente prouve également que $E_\lambda(u) \subset E_{Q(\lambda)}(Q(u))$.

COROLLAIRE :
Les valeurs propres de $\left\{\begin{array}{l} u \\ A \end{array}\right.$ sont PARMI les racines de tout polynôme annulateur de $\left\{\begin{array}{l} u \\ A \end{array}\right.$.

Preuve : Conséquence immédiate du lemme précédent en remarquant que $\mathrm{Sp}(\tilde{0}) = \{0\}$.

⚠ *Toutes les racines d'un polynôme annulateur ne sont pas nécessairement des valeurs propres !*

Exemples :

- Les valeurs propres d'une projection sont parmi les racines de $X^2 - X$.
- Les valeurs propres d'une symétrie sont parmi les racines de $X^2 - 1$.
- 0 est la seule valeur propre d'un endomorphisme nilpotent.

THÉORÈME : **Valeurs propres et racines du polynôme minimal**

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Les valeurs propres $\left\{ \begin{array}{l} \text{de } u \\ \text{de } A \end{array} \right.$ sont exactement les racines du polynôme minimal $\left\{ \begin{array}{l} \text{de } u \\ \text{de } A \end{array} \right.$.

Preuve :

- Nous avons vu que les valeurs propres sont parmi les racines de Π_u car Π_u est annulateur.
- Supposons que Π_u admette une racine $\lambda \in \mathbb{C}$ qui n'est pas valeur propre.
  On a alors $\Pi_u = (X - \lambda)Q(X)$ et donc $(u - \lambda\, \mathrm{id}_E) \circ Q(u) = \tilde{0}$.
  $u - \lambda\, \mathrm{id}_E$ étant inversible, on a $Q(u) = \tilde{0}$ ce qui contredit la définition de Π_u.

COROLLAIRE : **Cas d'un endomorphisme diagonalisable**

Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, avec $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, \ \dots, \ \lambda_p\}$, on a :

$$\Pi_u(X) = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\dots(X - \lambda_p)$$

Preuve : Ce polynôme est bien annulateur de u et c'est celui de plus petit degré dont les racines sont les valeurs propres de u.

Exercice : 1

($\heartsuit$) Soit $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice d'un projecteur.

Déterminer les valeurs propres potentielles de $\varphi \ : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & MP + PM \end{array}$.

Preuve : On recherche un polynôme annulateur de degré 3 en calculant $\varphi^3(M)$.

Exercice : 2

($\heartsuit$) Que pouvez-vous dire de $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 = I_3$?

- Spectre ?

  Preuve : $X^3 - 1 = (X - 1)(X - j)(X - j^2)$ est annulateur de A et donc $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, j, j^2\}$.
  Mais comme $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, alors $\mathrm{Sp}(A) \subset \{1\}$.
  Or A est de taille impaire donc A admet une vp et donc $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.

- Inversibilité ?

  Preuve : On a $A^3 = I_3$ donc $A.A^2 = I_3$ et donc A est inversible d'inverse A^2.

- Trace et déterminant ?

Preuve : Nous savons que :

$\mathrm{Tr}(A)$ est la somme des valeurs propres complexes comptées avec leur ordre de multiplicité.

$\det(A)$ est le produit des valeurs propres complexes comptées avec leur ordre de multiplicité.

→ Cas où 1 est la seule valeur propre complexe : $\mathrm{Tr}(A) = 3$ et $\det(A) = 1$

→ Sinon, j ou j^2 est valeurs propre complexe.
Mais comme $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$, alors elles sont toutes les 2 valeurs propres.
Ainsi A admet 3 valeurs propres complexes distinctes et est donc diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.
De plus $\mathrm{Tr}(A) = 1 + j + j^2 = 0$ et $\det(A) = 1.j.j^2 = j^3 = 1$

Remarque : La connaissance d'un polynôme annulateur peut donc apporter de nombreuses informations.

5. Théorème de Cayley-Hamilton : Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Théorème Fondamental : **Cayley-Hamilton**

Le polynôme caractéristique $\left\{\begin{array}{l}\text{de } u\\ \text{de } A\end{array}\right.$ est annulateur $\left\{\begin{array}{l}\text{de } u\\ \text{de } A\end{array}\right.$

Preuve :
- Cas d'une matrice diagonalisable : Pas de difficulté.
- Cas général : NON exigible ! !
  On prouve facilement ce théorème dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ par densité de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ et continuité de $M \mapsto P(M)$.

Une démonstration complète est proposée dans la feuille de TD.

Exemple : Ce théorème confirme que $P = X^2 - \mathrm{Tr}(A)X + \det A$ est un polynôme annulateur de $A \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$.

Corollaire : **Degré du polynôme minimal**

- Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ différente de λI_n, nous avons : $2 \leq \deg \Pi_A \leq n$.
- Pour $u \in \mathcal{L}(E)$ différent de $\lambda\,\mathrm{id}_E$ avec $\dim E = n$, nous avons : $2 \leq \deg \Pi_u \leq n$.

Preuve : Π_A divise χ_A qui est de degré n.

Remarque : Si nous savons que $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A)) = p$ alors nous avons plus précisément : $p \leq \deg \Pi_A \leq n$.

Exercice : 3

(♡) Montrer, lorsque $\dim E < +\infty$, que l'inverse de $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$ est un polynôme en u.

Exercice : 4

(♡) Montrer qu'en dimension finie, tout $u \in \mathcal{L}(E)$ admet une droite ou un plan vectoriel stable.

Preuve : Avec un polynôme annulateur...
Soit χ_u le polynôme caractéristique de u.

- On peut décomposer $\chi_u = P_1P_2\dots P_m$ avec P_k irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.
- Puisque $\chi_u(u) = 0$, alors $P_1(u)\circ P_2(u)\circ\dots\circ P_m(u) = 0$ et donc l'un des $P_k(u)$ n'est pas injectif.
  - → Si $P_k = X - \lambda$: λ est vp et si a est un vecteur propre associé, alors $\mathrm{Vect}(a)$ est stable par u.
  - → Sinon, $P_k = X^2 + pX + q$ avec $\Delta < 0$.
    Comme il existe $a \neq 0$ tel que $P_k(u)(a) = 0$, on obtient $u^2(a) + pu(a) + qa = 0$.
    On montre alors que $\mathrm{Vect}(a,\ u(a))$ est stable par u.

<u>COROLLAIRE</u> : Le polynôme minimal de $\left\{\begin{array}{l} u\in\mathcal{L}(E)\\ A\in\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\end{array}\right.$ divise le polynôme caractéristique.

Preuve : Le polynôme minimal divise tout polynôme annulateur de u.

Cela restreint le champ d'investigation pour déterminer le polynôme minimal.

<u>COROLLAIRE</u> : **Forme du polynôme minimal lorsque χ_u est scindé**

Lorsque $\chi_u(X) = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_1)^{m_1}...(X-\lambda_r)^{m_r}$ alors Π_u est de la forme :

$$\Pi_u = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_1)^{\alpha_1}...(X-\lambda_r)^{\alpha_r} \quad \text{avec} \quad \forall k\in[\![1,r]\!],\ 1\le \alpha_k\le m_k$$

6. <u>Applications du polynôme minimal ou d'un polynôme annulateur</u>

   (a) <u>Etude de l'inversibilité d'une matrice</u> :

Méthode : Etude d'inversibilité

→ Lorsque $\left\{\begin{array}{l} P(A)=0\\ P(0)\neq 0\end{array}\right.$, la matrice A est inversible et on obtient facilement A^{-1}.

<u>Exemple</u> : $A^3+2A^2-2I_n = 0 \Rightarrow A.\dfrac{A^2+2A}{2} = I_n$ et donc A est inversible avec $A^{-1} = \dfrac{A^2+2A}{2}$

→ Lorsque A est inversible, un polynôme annulateur permet d'obtenir A^{-1}.

<u>Exemple</u> : Supposons que A est inversible avec $A^3+2A^2-A=0$.
En multipliant par A^{-1} on obtient $A^2+2A-I_n=0$ puis $A(A+2I_n)=I_n$.
On a donc $A^{-1} = A+2I_n$

   (b) <u>Calcul des puissances de A</u> :

Méthode de calcul de A^k

- On effectue la division euclidienne de X^k par Π_A :

$$X^k = \Pi_A Q_k + R_k \quad \text{et on obtient} \quad A^k = R_k(A)$$

- On détermine alors R_k grâce aux racines de Π_A.

On peut appliquer cette méthode avec un polynôme annulateur quelconque, mais le résultat obtenu est plus compliqué.

Les résultats précédents sont bien entendu également valables pour les endomorphismes.

Exemple : Déterminer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) Recherche d'une base de $\mathbb{K}[A]$:

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

THÉORÈME : **Structure de** $\mathbb{K}[A]$

Si $\deg \Pi_A = d$, alors : $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{K}[A] = \mathrm{Vect}(I_n,\ A,\ \dots,\ A^{d-1}) \\ \dim \mathbb{K} = d \end{array} \right.$.

Preuve : Facile avec la division euclidienne.

On en déduit que si $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, *alors* $\dim \mathbb{K}[A] \leq n$.

(d) Divers : La donnée d'un polynôme annulateur permet également :

- D'avoir des informations sur les valeurs propres potentielles
- De conclure à la diagonalisabilité / trigonalisabilité (Voir la partie suivante...)
- ...

Voir l'exercice 91 de la banque CCINP.

3 Application des polynômes annulateurs à la réduction

La dimension de E est de nouveau FINIE et on prendra $u \in \mathcal{L}(E)$.

- Nous verrons que si un polynôme annulateur vérifie certaines propriétés (scindé ou scindé simple) alors on peut en déduire que u est trigonalisable ou diagonalisable.
- Ces théorèmes ne peuvent être démontrés qu'après avoir vérifié le lemme de décomposition des noyaux.
- Nous terminerons par la décomposition de Dunford, qui permet de justifier l'existence d'une base dans laquelle un endomorphisme trigonalisable admet une matrice particulièrement simple.

1. Décomposition des noyaux :

THÉORÈME : **Décomposition des Noyaux** :

Lorsque $P_1,\ P_2 \in \mathbb{K}[X]$ avec $P_1 \wedge P_2 = 1$ et $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$P = P_1 P_2 \quad \Rightarrow \quad \ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$$

Lorsque P est annulateur de u, cela donne : $E = \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$.

Bien entendu, nous avons le même résultat pour les matrices.

Preuve : La théorème de Bezout appliqué à P_1 et P_2 permet de
- Montrer que la somme est directe
- Montrer que $\ker P(u) \subset \ker P_1(u) \oplus \ker P_2(u)$

Théorème : **Généralisation de la décomposition des noyaux**

Lorsque $P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n \in \mathbb{K}[X]$ sont premiers entre eux 2 à 2, on a :

$$P = P_1P_2\ldots P_n \quad \Rightarrow \quad \ker P(u) = \ker P_1(u) \oplus \cdots \oplus \ker P_n(u)$$

Lorsque P est annulateur de u, cela donne : $E = \ker P_1(u) \oplus \cdots \oplus \ker P_n(u)$.

Preuve : Par récurrence.

A noter !
- Ce résultat est très intéressant car, appliqué à un polynôme annulateur, il nous donne une décomposition de E en sev stables et supplémentaires.
- Ce résultat est utilisé en fin de chapitre pour établir la décomposition de Dunford.

Corollaire : **Application à un polynôme annulateur**

Lorsque P est un polynôme annulateur de u et scindé de la forme $P = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$, on a :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker(u - \lambda_k \,\mathrm{id}_E)^{\alpha_k}$$

Exemple : On retrouve le fait que les sev caractéristiques des projecteurs et des symétries sont supplémentaires.

Exercice : 5

(♡) **Un résultat utile pour prouver l'unicité de la décomposition de Dunford**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ annulateur de u tel que $\begin{cases} P = P_1P_2 \\ P_1 \wedge P_2 = 1 \end{cases}$.

Le théorème de décomposition des noyaux nous dit alors que : $E = \ker(P_1(u)) \oplus \ker(P_2(u))$.
Montrer que les deux projecteurs associées à cette décomposition sont des polynômes en u.

Preuve :
- Nous avons $P_1Q_1 + P_2Q_2 = 1$ d'après bezout, et évaluant en u : $\mathrm{id}_E = P_1(u)Q_1(u) + P_2(u)Q_2(u)$.
- Pour tout $x \in E$, nous avons donc $x = P_1(u)Q_1(u)(x) + P_2(u)Q_2(u)(x)$ avec :

$$\begin{cases} P_1(u)Q_1(u)(x) \in \ker(P_2(u)) \\ P_2(u)Q_2(u)(x) \in \ker(P_1(u)) \end{cases}$$

- Les projecteurs associées à la décomposition sont $\begin{cases} p = P_1(u)Q_1(u) \\ q = P_2(u)Q_2(u) \end{cases}$, des polynômes en u.

Voir les exercices 62 et 93 de la banque CCINP.

2. Caractérisation de la diagonalisabilité :

Théorème : **Caractérisation de la diagonalisabilité** (pour un endomorphisme)

$$\begin{aligned}(i)\ u \text{ diagonalisable} &\iff (ii)\ u \text{ annule un polynôme scindé à racines simples.}\\ &\iff (iii)\ \Pi_u \text{ est scindé à racines simples}\end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons alors : $\Pi_u = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$.

Un polynôme scindé à racines simples est dit "simplement scindé"

Bien entendu, nous avons le même résultat pour les matrices.

Preuve :

- $(i) \Rightarrow (ii)$: Facile matriciellement en prenant $P = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X-\lambda)$.
- $(ii) \Rightarrow (iii)$: Immédiat car Π_u divise tout polynôme annulateur.
- $(iii) \Rightarrow (i)$: On applique le lemme de décomposition des noyaux.

Méthode : Diagonalisabilité et polynôme annulateur

- Pour montrer que A (ou u) est diagonalisable :
  - $\rightarrow$ on peut regarder si on dispose d'un polynôme annulateur simplement scindé.
  - $\rightarrow$ on peut rechercher un polynôme annulateur
- Sachant que $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable :
  On peut en déduire que $\Pi_u = (X-\lambda_1)\dot{(}X-\lambda_p)$ où $\mathrm{Sp}(u)\{\lambda_1, \ldots,\ \lambda_p\}$.

Exemples : Les endomorphismes suivants sont diagonalisables

- Les symétries et les projecteurs, dont la transposition matricielle.
- $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^p = \mathrm{id}_E$ lorsque E est un $\mathbb{C}$-ev.
- $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^2 + 2u - 3\,\mathrm{id}_E = \tilde{0}$.

Exercice : 6

($\heartsuit$) Montrer que $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & MP+PM \end{array}$ est diagonalisable lorsque $P^2 = P$.

Preuve : Nous avons constaté précédemment que $\varphi^3 = 3\varphi^2 - 2\varphi$.

Exercice : 7

($\heartsuit$) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\begin{cases} u^2 \text{ est diagonalisable} \\ 0 \notin \mathrm{Sp}(u) \end{cases}$ et E est un $\mathbb{C}$-ev.
Montrer que u est diagonalisable.

Preuve :

Exercice : 8

($*$) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $A^2 + I_n = 0$.

1. A est-elle diagonalisable ?

Preuve :
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$: $P = X^2+1$ est annulateur donc Π_A divise X^2+1 qui est irréductible et donc $\Pi_A = X^2+1$.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$: $P = (X-i)(X+i)$ est un polynôme annulateur simplement scindé.

2. Donner la trace et le déterminant de A.

Preuve : On raisonne dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ afin de tenir compte des valeurs propres complexes.
- A est diagonalisable d'après la caractérisation précédente et $\mathrm{Sp}(A) \subset \{-i, i\}$.
- A admet au moins une valeur propre complexe i ou $-i$ car A est trigonalisable dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On peut également discuter selon la forme du polynôme annulateur.
- Comme les valeurs propres de A sont conjuguées deux à deux de même ordre de multiplicité, alors : $\mathrm{Sp}(A) = \{-i, i\}$ chacune d'ordre $\frac{n}{2}$.
- Nous avons donc $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda$ et $\det(A) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \lambda$ comptées avec leur ordre de multiplicité.
- D'où la trace et le déterminant.

Exercice : 9

($*$) Soit u un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{R}$-ev E de dimension n tel que $(\mathrm{id}_E,\ u,\ \dots,\ u^{n-1})$ est libre. Montrer que u possède n valeurs propres distinctes.

<u>Lemme</u> : Si F est stable par u alors le polynôme minimal de u_F divise le polynôme minimal de u.

Preuve : Le polynôme minimal de u est annulateur de u_F.

<u>Théorème</u> : **Transfert de diagonalisabilité aux endomorphismes induits**

Lorsque F est stable par u

$$u \text{ diagonalisable} \quad \Rightarrow \quad u_F \text{ diagonalisable.}$$

Preuve : Π_{u_F} divise Π_u qui est scindé simple.
On peut également travailler avec un polynôme annulateur simplement scindé !

Exercice : 10

($*$) Soit $A_1 \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$ et $A_2 \in \mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$ et $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que si A est diagonalisable alors A_1 et A_2 le sont.
   Comment utiliser la contraposée de ce résultat ?

A condition de pouvoir justifier ce résultat, il pourra être utilisé dans les raisonnements.

2. On suppose ici que $A_3 = 0$.
   Montrer alors la réciproque de la proposition précédente.

3. Que dire de Π_{A_1}, Π_{A_2} et Π_A lorsque $A_3 = 0$?

Voir l'exercice 88 de la banque CCINP.

Exercice : 11
(♡♡) **Endomorphismes co-diagonalisables**

Montrer que si u et v $\begin{cases} \text{commutent} \\ \text{sont diagonalisables} \end{cases}$, alors il existe une base commune de vecteurs propres.

On dit que u et v sont co-diagonalisables.

Preuve :
- u est diagonalisable et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $E_\lambda(u)$ est stable par v.
- $E_\lambda(u)$ admet donc une base de vecteurs propres de v (qui sont également vecteurs propres de u)

Donner la traduction matricielle de ce résultat.

Exercice : 12
(♡) **Les sev stables d'un endomorphisme diagonalisable**

Les sev stables par $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable sont ceux qui admettent une base de vecteurs propres.

Preuve :
$\Rightarrow$ Si F est stable par u, alors u_F est diagonalisable.
Or, les vecteurs propres de u_F sont également des vecteurs propres de u.
$\Leftarrow$ Immédiat.

3. Trigonalisabilité :

   (a) Caractérisation de la trigonalisabilité :

Théorème Fondamental : Caractérisation polynômiale de la trigonalisabilité

(i) u trigonalisable $\iff$ (ii) u annule un polynôme scindé de $\mathbb{K}[X]$ (par exemple χ_u)
$\iff$ (iii) le polynôme minimal Π_u est scindé dans $\mathbb{K}[X]$

Preuve : Seule l'implication $(iii) \Rightarrow (i)$ pose problème.
On applique la décomposition des noyaux à $\Pi_u = \prod_{k=1}^{m}(X-\lambda_k)^{\alpha_k}$:

- L'endomorphisme induit par u sur N_{λ_k} s'écrit $u_k = \lambda_k \,\mathrm{id}_{N_{\lambda_k}} + n_k$ avec n_k nilpotent car $n_k^{\alpha_k} = \tilde{0}$.
- On sait qu'il existe une base de N_{λ_k} dans laquelle la matrice de n_k est triangulaire supérieure.
- En concaténant ces bases, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de u est triangulaire.

Corollaire : **Version matricielle**

- Caractérisation :

$$(i)\ A \text{ trigonalisable} \iff (ii)\ A \text{ annule un polynôme scindé de } \mathbb{K}[X] \quad (\text{par exemple } \chi_A)$$
$$\iff (iii) \text{ le polynôme minimal } \Pi_A \text{ est scindé dans } \mathbb{K}[X]$$

- Et : Toute matrice trigonalisable $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est semblable à une matrice triangulaire de la forme :

$$\begin{pmatrix} B_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & B_p \end{pmatrix} \quad \text{avec pour tout } k \in [\![1,p]\!], \quad B_k = \begin{pmatrix} \lambda_k & \times & \times \\ 0 & \ddots & \times \\ 0 & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Preuve : En concaténant des bases de trigonalisation des u_k qui sont bien trigonalisables car ils annulent le même polynôme scindé que u (canoniquement associé à A).

La réduction d'une matrice trigonalisable peut encore être améliorée grâce à la réduction de Jordan (HP !).

Méthode : Pour trigonaliser une matrice A

A partir d'un polynôme annulateur scindé (par exemple χ_A), on détermine la forme de la matrice semblable triangulaire T. On recherche alors une base de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle T est la matrice de u.

Exemple : Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ sachant que $\chi_A(X) = (X-6)(X-3)^2$.

Réponse : D'après le théorème précédent, A est semblable à une matrice de la forme $T = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & \alpha \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.
La décomposition de Jordan (HP) assure que l'on peut choisir $\alpha = 1$.
On vérifie que c'est le cas et on détermine au passage la valeur de α en introduisant u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Méthode : Pour prouver la trigonalisabilité

On peut rechercher un polynôme annulateur scindé (éventuellement χ_u ou χ_A).

Exercice : 13
($\heartsuit$) **Trigonalisabilité des matrices symétriques réelles**.

La preuve de leur diagonalisabilité sera vue en fin d'année. (théorème spectral)
En attendant, nous pouvons toujours commencer par prouver qu'elles sont trigonalisables.

Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Prouver que la matrice $I + S^2$ est inversible.

2. En introduisant un polynôme annulateur de S, prouver que S est trigonalisable.

(b) Les sous-espaces caractéristiques :

Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'aux endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisables.

χ_u est alors scindé et de la forme : $\chi_u = \prod_{k=1}^{r}(X-\lambda_k)^{m_k}$.

Définition : **Sous-espaces caractéristiques de u.**

D'après Cayley-Hamilton, le lemme de décomposition des noyaux nous donne alors :

$$E = \bigoplus_{k=1}^{r} \ker(u-\lambda_k\,\mathrm{id}_E)^{m_k}$$

Les sev $N_{\lambda_k} = \ker(u-\lambda_k\,\mathrm{id}_E)^{m_k}$ sont appelés les *sev caractéristiques* de u.

Exemple : Les sous-espaces caractéristiques de $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont $\left\{ \begin{array}{l} N_1 = \ker(u-\mathrm{id}_E) \\ N_2 = \ker(u-2\,\mathrm{id}_E)^3 \end{array} \right.$.

Remarque : L'intérêt des sous-espaces caractéristiques réside essentiellement dans le fait que :
- ils sont stables
- ils sont supplémentaires dans E
- les endomorphismes induit par u sur chacun d'eux se décompose de façon intéressante.

Proposition : **Propriétés des sous-espaces caractéristiques**

- Les sous-espaces caractéristiques $N_{\lambda_k} = \ker(u-\lambda_k\,\mathrm{id}_E)^{m_{\lambda_k}}$ sont STABLES par u.
  On pourra noter u_k les endomorphismes induits par u sur les sev N_{λ_k}.
- Ils sont SUPPLEMENTAIRES : $E = \bigoplus_{k=1}^{m} N_{\lambda_k}$.
  La connaissance des u_k suffit donc à caractériser u.
  La matrice de u obtenue dans une base adaptée à cette supplémentarité est donc diagonale par blocs.

Preuve :
- La stabilité est immédiate par commutativité de deux polynômes d'endomorphismes.
- La supplémentarité est immédiate avec le lemme de décomposition des noyaux.

Proposition : Propriété de u_k induit par u sur N_{λ_k}

- $\mathrm{Sp}(u_k) = \{\lambda_k\}$.
- Plus précisément, nous avons $u_k = d_k + n_k$ où $\begin{cases} d_k = \lambda_k \,\mathrm{id}_{N_{\lambda_k}} \\ n_k \text{ est nilpotent} \end{cases}$.

Preuve :
- Le polynôme $(X-\lambda_k)^{m_k}$ annule u_k donc u_k est trigonalisable et admet λ_k pour seule valeur propre.
- Il suffit de remarquer que $n_k = u_k - \lambda \,\mathrm{id}_{N_{\lambda_k}} \in \mathcal{L}(N_{\lambda_k})$ est nilpotent car $n_k^{m_{\lambda_k}} = \tilde{0}$.

C'est en concaténant des bases de trigonalisation des n_k que nous obtenons une base de trigonalisation de u.

Proposition : Sev caractéristiques et polynôme minimal

Lorsque $\Pi_u = \displaystyle\prod_{k=1}^{r} (X-\lambda_k)^{\alpha_k}$, nous avons également :

$$N_{\lambda_k} = \ker(u - \lambda_k \,\mathrm{id}_E)^{\alpha_k}$$

On préfèrera cependant la définition $N_{\lambda_k} = \ker(u-\lambda_k \,\mathrm{id}_E)^{m_k}$ obtenue à l'aide de χ_u.

Preuve :
On remarque que les $\ker(u-\lambda_k \,\mathrm{id}_E)^{\alpha_k}$ sont supplémentaires et $\ker(u-\lambda_k \,\mathrm{id}_E)^{\alpha_k} \subset N_{\lambda_k}$.

Remarque : Les projecteurs spectraux *(Voir l'épreuve d'écrit CCINP-2023-Math2-MP)*

- Les projecteurs p_k sur N_k parallèlement à $\bigoplus_{i\neq k} N_i$ sont appelés les *projecteurs spectraux*.
- On démontre que ce sont des polynômes en u. (Ecrit CCINP-MP 2023)

Preuve : Avec le théorème de Bezout appliqué aux polynômes $(X-\lambda_k)^{m_k}$ et $Q_k = \frac{\chi_u}{(X-\lambda_k)^{m_k}}$.

Exercice : 14
$(*)$ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable.
Montrer que les sev propres et les sev caractéristiques de u sont confondus.

Preuve :

Proposition : Dimension d'un sev caractéristique

La dimension du sev caractéristique associé à $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ est égale à l'ordre de multiplicité de λ.

En d'autres termes : $\dim N_{\lambda_k} = m_{\lambda_k}$.

Preuve : Notons $\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (\lambda - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$, $N_k = \ker(u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{m_{\lambda_k}}$, $d_k = \dim N_k$ et $u_k = u_{N_k}$.

- La décomposition des noyaux nous donne $E = \bigoplus_{k=1}^{p} N_k$.

  En se plaçant dans une base adaptée, on obtient alors la décomposition $\chi_u = \prod_{k=1}^{p} \chi_{u_k}$

- Recherchons alors χ_{u_k}.
  Comme $(X - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$ annule u_k, alors u_k est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(u_k) = \{\lambda_k\}$.
  On en déduit que $\chi_{u_k}(X) = (X - \lambda_k)^{d_k}$.

- Nous obtenons ainsi deux expressions pour χ_u qui nous donnent : $\prod_{k=1}^{p} (\lambda - \lambda_k)^{d_k} = \prod_{k=1}^{p} (\lambda - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$.
  Par unicité de la décomposition en polynômes irréductibles on en déduit que $d_k = m_{\lambda_k}$.

Exemple : Lorsque $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ nous avons $\left\{ \begin{array}{l} \dim(N_{-1}) = 1 \\ \dim(N_2) = 3 \end{array} \right.$.

Preuve : Vérifier ces résultats en déterminant N_1 et N_2.

Exercice : 15
(♡) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{C}$-ev de dimension finie.
Montrer que les sev propres et les sev caractéristiques de u sont confondus ssi u est diagonalisable.

Preuve :

(c) Bilan :

Bilan : Lorsque χ_u est scindé

En notant $\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (\lambda - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$.

- u est trigonalisable.
- E est somme directe des sous-espaces caractéristiques $N_{\lambda_k} = \ker(u - \lambda_k \operatorname{id}_E)^{m_{\lambda_k}}$ de u.
- On peut également obtenir les sev caractéristiques à l'aide du polynôme minimal Π_u.
- Les sous-espaces caractéristiques N_k sont stables et de dimension : $\dim N_{\lambda_k} = m_{\lambda_k}$
- La matrice de u dans une base obtenue en réunissant des bases des N_{λ_k} est diagonale par blocs.
- u induit sur chacun des N_{λ_k} la somme d'une homothétie d_k et d'un endomorphisme nilpotent n_k.
- En concaténant des bases de trigonalisation des n_k, on obtient une base de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs triangulaires.

4. Musculation : Décomposition de Dunford (HP)

<u>Corollaire</u> : **Décomposition de Dunford**

Tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ trigonalisable s'écrit sous la forme $u = d + n$ où :

- d est diagonalisable,
- n nilpotent,
- $d \circ n = n \circ d$.

Ce résultat est également valable pour les matrices A trigonalisables.

Preuve :

- <u>Matriciellement</u> : La décomposition de E selon les sev caractéristiques nous donne une base e dans laquelle $\operatorname{Mat}_e u$ permet de conclure.
- <u>Avec les endomorphismes induits</u> : Par intuition, on définit d et n en posant $d_{N_k} = d_k$ et $n_{N_k} = n_k$ et on vérifie que ces deux endomorphismes conviennent.

<u>Méthode</u> : Pour obtenir la décomposition de Dunford de u

- On recherche les sev caractéristiques N_{λ_k} de u.
- On pose alors $d_k = \lambda_k \operatorname{id}_{N_{\lambda_k}}$ et $n_k = u_k - d_k$.
- En se plaçant dans une base adaptée à la décomposition selon les sev caractéristiques, on obtient les matrices de d et n.

<u>Lemme</u> : **Un résultat utile pour prouver l'unicité de la décomposition**

Les endomorphismes d et n obtenus précédemment dans la démonstration de Dunford sont des polynômes en u.

Cela prouve au passage que d et n commutent bien.

Preuve : Pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, notons p_k le projecteur sur N_{λ_k} parallèlement à $\bigoplus_{i \neq k} N_{\lambda_i}$.
Ces projecteurs sont appelés « projecteurs spectraux ».
On vérifie alors facilement que d et $\lambda_1 p_1 + \cdots + \lambda_1 p_q$ coïncident sur les N_k. Comme les projecteurs p_k sont des polynômes en u alors d et donc $n = u - d$ sont des polynômes en u.

<u>Proposition</u> : La décomposition de Dunford est unique.

Preuve : **Unicité de la décomposition :**
Soit d' et n' un autre couple donnant la décomposition de Dunford.
On a alors en particulier $d + n = d' + n'$ et donc $d - d' = n - n'$.

- <u>Montrons que $d - d'$ est diagonalisable</u> :
  Comme d' commute avec n' il commute avec $u = d' + n'$ et donc avec d qui est un polynôme en u.
  Comme d et d' sont diagonalisables, alors ils sont co-diagonalisables (cf exercice).
  $d - d'$ est donc diagonalisable.
- <u>Montrons que $d - d'$ est nilpotent</u> :
  Comme d et d' commutent, alors $n = u - d$ et $n' = u - d'$ commutent également.
  En notant p et q leur indice de nilpotence on a alors $(n - n')^{p+q+1} = 0$.
  $n - n'$ est donc nilpotent et comme $n - n' = d - d'$ alors $d - d'$ est nilpotent.
- <u>Conclusion</u> :
  $d - d'$ étant finalement diagonalisable et nilpotent on a $d - d' = \tilde{0}$ et donc $d = d'$ et $n = n'$.

<u>Proposition</u> : **Applications usuelles de la décomposition de Dunford :** $u = d + n$

- Le calcul de puissance d'un endomorphisme
- Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme

Voir l'épreuve d'écrit CCINP-2021-Math2-MP

Preuve :