
Etude asymptotique

des Sommes $\left\{ \begin{matrix} S_n \\ S(x) \end{matrix} \right\}$ et des Restes partiels $\left\{ \begin{matrix} R_n \\ R(x) \end{matrix} \right\}$

—
Série numérique et Intégrale impropre



Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

4 décembre 2024

Pour rechercher un équivalent d'une somme partielle S_n ou d'un reste partiel R_n nous commencerons par rappeler la technique d'encadrement par des intégrales. Une autre possibilité serait de sommer la relation d'équivalence $u_n \sim v_n$ ($f(x) \sim g(x)$)... Mais a-t-on le droit de la faire?...

Plus généralement, on pose dans ce chapitre, la question suivante :

Peut-on, pour étudier le comportement asymptotique d'une somme ou d'un reste partiel :

- sommer des relations de la forme $u_n = o(v_n)$, $u_n = O(v_n)$ ou $u_n \sim v_n$?
- intégrer des relations de la forme $f(x) = o(g(x))$, $f(x) = O(g(x))$ ou $f(x) \sim g(x)$?

La réponse est "Oui!!"...

Mais uniquement lorsque certaines hypothèses (que nous allons voir) sont vérifiées!

Dans tout ce chapitre, les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Table des matières

1	Somme et Reste partiels d'une série de Riemann	2
2	Somme et Reste partiels d'une série numérique	2
3	Somme et Reste partiels d'une intégrale généralisée	5
4	Autre méthode de recherche d'un équivalent	7



1 Somme et Reste partiels d'une série de Riemann

Il faut savoir retrouver rapidement les deux résultats suivants qui seront utilisés pour l'étude asymptotique des sommes et restes partiels quelconques

PROPOSITION : Equivalent de R_n lorsque $\alpha > 1$ (CVG)

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{\alpha-1} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Preuve : On encadre $\sum_{k=n+1}^N \frac{1}{k^\alpha}$ par deux intégrales et on fait $N \rightarrow +\infty$.

En particulier : $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}$.

PROPOSITION : Equivalent de S_n lorsque $\alpha < 1$ (DIV)

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha} \sim \frac{1}{1-\alpha} \frac{1}{n^{\alpha-1}}$$

Au facteur multiplicatif près, l'équivalent de S_n et de R_n sont identiques.

Preuve : On distingue les cas où $\alpha > 0$ et $\alpha \leq 0$ et on procède à des encadrements par des intégrales.

En particulier : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \sim 2\sqrt{n}$.

PROPOSITION : Equivalent de S_n lorsque $\alpha = 1$ (DIV)

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$$

Preuve : Connue !

2 Somme et Reste partiels d'une série numérique

Idée : On peut sommer $\begin{cases} \text{des "o"} \\ \text{des "O"} \\ \text{des "~"} \end{cases}$ lorsque la série est de SIGNE CONSTANT apcr et est $\begin{cases} \text{convergente pour } R_n \\ \text{ou} \\ \text{divergente pour } S_n \end{cases}$.

1. Cas de la convergence : Dans ce cas, on s'intéresse à R_n


THÉORÈME : Étude asymptotique de R_n pour une série.

Soit $\sum v_n$ une série réelle de **SIGNE CONSTANT** (apcr) et **CONVERGENTE**.

- Si $u_n = o(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ ou encore $\sum_{k=n+1}^{+\infty} o(v_k) = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- Si $u_n = O(v_n)$ alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$ ou encore $\sum_{k=n+1}^{+\infty} O(v_k) = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k\right)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ converge et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_k$.

En d'autres termes :

Lorsque $\sum v_n$ est $\begin{cases} \text{convergente} \\ \text{de signe constant apcr} \end{cases}$, on peut sommer les différentes relations de comparaison pour R_n .

Preuve :

- Si $u_n = o(v_n)$: facile en majorant $|u_k| \leq \varepsilon v_k$ à partir d'un N .
- Si $u_n = O(v_n)$: facile en majorant $|u_k| \leq M v_k$.
- $u_n \sim v_n$: facile en écrivant $u_n = v_n + o(v_n)$.

Exemple : Que dire de $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ lorsque $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ ou lorsque $u_n = O(e^{-n})$?

Exercice : 1

(*) Donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + 1}$.

PROPOSITION : Cas où (u_n) est à décroissance rapide ($u_{n+1} = o(u_n)$)

On suppose ici que $u_{n+1} = o(u_n)$ de signe constant.

Dans ce cas, nous avons $u_n \sim u_n - u_{n+1}$ de signe constant APCR et donc :

$$R_n \sim u_{n+1}$$

Exercice : 2

(*) Donner un équivalent de $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ où (u_n) est définie par $u_n = \frac{\sqrt{n}}{n!}$.

2. Cas de la divergence : Dans ce cas, on s'intéresse à S_n


THÉORÈME : Étude de S_n pour une série.

Soit $\sum v_n$ une série réelle de **SIGNE CONSTANT** (apcr) et **DIVERGENTE**.

- Si $u_n = o(v_n)$ alors : $\sum_{k=0}^n u_k = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ ou encore $\sum_{k=0}^n o(v_k) = o\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.
- Si $u_n = O(v_n)$ alors : $\sum_{k=0}^n u_k = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$ ou encore $\sum_{k=0}^n O(v_k) = O\left(\sum_{k=0}^n v_k\right)$.
- Si $u_n \sim v_n$ alors : $\sum_{k=0}^n u_k \sim \sum_{k=0}^n v_k$.

Preuve :

- Si $u_n = o(v_n)$: en majorant $|u_k| \leq \varepsilon v_k$ à partir d'un certain rang.
- Si $u_n = O(v_n)$: même chose en remplaçant ε par M .
- $u_n \sim v_n$: facile en écrivant $u_n = v_n + o(v_n)$.

En d'autres termes :

Lorsque $\sum v_n$ est $\begin{cases} \text{divergente} \\ \text{de signe constant apcr} \end{cases}$, on peut sommer les différentes relations de comparaison pour S_n .

Exercice : 3

(*) Déterminer un équivalent des sommes partielles suivantes :

$$\bullet S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k + \sqrt{k}}$$

$$\bullet S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{2k\sqrt{k}+1}$$


Application à l'étude de la complexité d'un algorithme.

Déterminer la complexité d'un algorithme récursif dont la complexité vérifie la relation de récurrence :

$$\bullet c(n) = c(n-1) + O(n)$$

$$\bullet c(n) = c(n-1) + O(n \ln n)$$

3. Application : Démonstration du Théorème de Césaro

PROPOSITION : Lorsque $(u_n) \rightarrow L \in \mathbb{K}$, on a : $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n} \rightarrow L$.

Preuve : $(u_n) \rightarrow L \in \mathbb{K}$ s'écrit également $u_n = L + o(1)$.

$\sum 1$ étant divergente à termes positifs, on obtient par sommation : $v_n = \frac{1}{n}(L.n + o(n)) = L + o(1) \rightarrow L$.

Exercice : 4

(*) Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0, \pi[$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} = \sin u_n$.



1. Montrer que la suite (u_n) converge vers 0.
2. Rechercher un équivalent de $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2}$ et en déduire un équivalent de u_n .

Preuve :

- (u_n) est à valeurs dans $]0, \pi[$.
 (u_n) est décroissante, elle converge donc vers l tel $\sin l = l$ c'est à dire 0.
- Equivalent de u_n : Remarquons que $v_n = \frac{1}{u_{n+1}^2} - \frac{1}{u_n^2} = \dots \sim \frac{\frac{1}{3}u_n^4}{u_n^4} = \frac{1}{3}$.

On en déduit un équivalent de $\sum_{k=0}^{n-1} v_k$ puis on finit par obtenir $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$.

4. Musculation : Développement asymptotique de H_n à 3 termes

- Etape 1 : Comme on sait que $H_n = \ln n + \gamma + o(1)$, on pose $\varepsilon_n = H_n - \ln n - \gamma = o(1)$.
- Etape 2 : L'idée est d'exprimer ε_n comme la somme partielle d'une série convergente en décomposant $\ln n$.

On obtient facilement :

$$\varepsilon_n = \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right) - (\gamma - 1)$$

- Etape 3 : Comme $\varepsilon_n \rightarrow 0$, on remarque que ε_n est le reste d'une série convergente :

$$\varepsilon_n = - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \right)$$

- Etape 4 : On applique alors le théorème de sommation des équivalents

$$\text{Or, } \frac{1}{k} + \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) \sim -\frac{1}{2k^2} < 0 \quad \text{avec} \quad \sum \frac{1}{n^2} \text{ qui converge.}$$

On peut donc utiliser le théorème et on trouve $\varepsilon_n \sim \frac{1}{2n}$ et enfin :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

- Etape 5 : Vous pouvez reprendre le raisonnement précédent pour prouver que :

$$H_n = \ln n + \gamma + \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

3 Somme et Reste partiels d'une intégrale généralisée

Nous avons des théorèmes analogues à ceux de la partie précédente pour les intégrales improques.

Pour fixer les idées, on s'intéressera dans cette partie aux fonctions f :

- continues par morceaux sur $[a, b[$
- de signe constant au voisinage de b^-
- intégrables ou non intégrables sur $[a, b[$.

1. Cas de la convergence sur $[a, b[$:

Dans ce cas, on s'intéresse à $R(x) = \int_x^b f(t) dt$ au voisinage de b^-



THÉORÈME : Cas « intégrable » au voisinage de b^- .

Soit $\begin{cases} f \\ g \end{cases}$ deux fonctions C_m avec $g \begin{cases} \text{de signe constant} \\ \text{intégrable} \end{cases}$ sur $[a, b[$.

- Si $f(t) = o(g(t))$ au $\mathcal{V}(b^-)$ alors f intégrable et : $\int_x^b f(t) dt = o\left(\int_x^b g(t) dt\right)$.
- Si $f(t) = O(g(t))$ au $\mathcal{V}(b^-)$ alors f intégrable et : $\int_x^b f(t) dt = O\left(\int_x^b g(t) dt\right)$.
- Si $f(t) \sim g(t)$ au $\mathcal{V}(b^-)$ alors f intégrable et : $\int_x^b f(t) dt \sim \int_x^b g(t) dt$.

En d'autres termes : lorsque g est C_m de signe constant et intégrable sur au voisinage de b^- , on peut intégrer de x à b les différentes relations de comparaison obtenues au voisinage de b^- .

Preuve : On procède de la même façon que pour les séries convergentes.

Exemples : Equivalents de

- $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{dt}{t^3 + 1}$ en $+\infty$
- $g(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\text{th } t}{t^2} dt$ en $+\infty$
- $h(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$ en 0^+



Application à la primitivation d'un développement limité

- Lorsque f est continue en 0, on a $f(t) = f(0) + o(1)$ et donc $\int_0^x f(t) dt = f(0)x + o(x)$ au $\mathcal{V}(0)$.
- Plus généralement, dans la formule de primitivation d'un DL, on a :
D/ On a $\int_a^x o((x-a)^n) dx = o((x-a)^{n+1})$ au voisinage de a .

2. Cas de la divergence sur $[a, b[$:

Dans ce cas, on s'intéresse à $S(x) = \int_a^x f(t) dt$ au voisinage de b^- .

THÉORÈME : Cas « non intégrable » au voisinage de b^- .

Soit f et g deux fonctions C_m avec $g \begin{cases} \text{de signe constant} \\ \text{non intégrable} \end{cases}$ sur $[a, b[$.

- Si $f(t) = o(g(t))$ au $\mathcal{V}(b^-)$ alors : $\int_a^x f(t) dt = o\left(\int_a^x g(t) dt\right)$.
- Si $f(t) = O(g(t))$ au $\mathcal{V}(b^-)$ alors : $\int_a^x f(t) dt = O\left(\int_a^x g(t) dt\right)$.
- Si $f(t) \sim g(t)$ au $\mathcal{V}(b^-)$ alors : $\int_a^x f(t) dt \sim \int_a^x g(t) dt$.

En d'autres termes : lorsque g est C_m de signe constant et non intégrable sur au voisinage de b^- , on peut intégrer de a à x les différentes relations de comparaison obtenues au voisinage de b^- .

Preuve : On procède de la même façon que pour les séries divergentes.



Exemples : Equivalents de

- $\int_x^1 \frac{e^t}{t} dt$ en 0^+
- $\int_1^x \frac{\arctan t}{t} dt$ en $+\infty$
- $\int_0^x f(t) dt$ en $+\infty$
lorsque $f(t) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} l \neq 0$.

■ **Exercice : 5** ■

(♡) Trouver les équivalents en $+\infty$ et en 1^+ de $\int_1^x \frac{\ln t}{t+1} dt$.

■ **Exercice : 6** ■

(♡♡) Soit f strictement positive de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant $\frac{xf'(x)}{f(x)} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \alpha \notin \{-1, 0\}$.

Peut-on affirmer l'existence de $\int_1^{+\infty} f(t) dt$?

Preuve :

- On remarque que $\frac{f'(x)}{f(x)} \sim \frac{\alpha}{x}$ et par intégration, on en déduit que $\ln(f(x)) \sim \ln(x^\alpha)$ au $\mathcal{V}(+\infty)$.
Attention à ne pas chercher à en déduire un équivalent de $f(x)$!!
- On introduit un $\lambda > 1$ et on remarque qu'au voisinage de $+\infty$, nous avons $\frac{1}{\lambda} \leq \frac{\ln(f(t))}{\ln(x^\alpha)} \leq \lambda$.
On obtient un encadrement de $f(x)$ que l'on utilise en choisissant judicieusement la valeur de λ .
- On trouve alors qu'il y a convergence lorsque $\alpha > -1$ et divergence si $\alpha < -1$.

4 Autre méthode de recherche d'un équivalent

Pour certaines intégrales dépendant de x , les théorèmes précédents ne permettent pas de déterminer un équivalent :

- Soit parce qu'il nous est impossible de calculer l'intégrale de l'équivalent obtenu.
- Soit parce que cette intégrale n'est pas de la forme $S(x)$ ou $R(x)$.

Une IPP permet alors souvent de faire apparaître l'équivalent cherché.



Méthode de détermination d'un équivalent par IPP

- Une IPP bien choisie permet souvent d'obtenir l'équivalent cherché.
- Plusieurs IPP successives permettent alors de trouver un développement asymptotique de la fonction.



■ Exercice : 7 ■

(♡♡)

1. Prouver que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x au voisinage de $+\infty$, on a $\int_2^x \frac{dt}{\ln^n t} \sim \frac{x}{\ln^n x}$.

Preuve : Une IPP donne $\int_2^x \frac{dt}{\ln^n t} = \frac{x}{\ln^n x} - \frac{2}{\ln^n 2} + n \int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+1} t}$.
On montre alors qu'au $\mathcal{V}(+\infty)$, on a $\int_2^x \frac{dt}{\ln^{n+1} t} = o(\int_2^x \frac{dt}{\ln^n t})$.

2. En déduire un développement asymptotique de $f(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}$ à n termes au $\mathcal{V}(+\infty)$.

Preuve : Facile en conjecturant ce que donne n IPP successives.

■ Exercice : 8 ■

- (♡) Déterminer les premiers termes du développement asymptotique au $\mathcal{V}(+\infty)$ de $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t} dt$.

⚠ Il ne s'agit pas d'une somme ou d'un reste partiel.

Preuve :
Les khûbes prouveront, à l'aide du théorème de convergence dominée, que $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$

■ Exercice : 9 ■

- (♡♡) Prouver qu'au voisinage de $+\infty$, nous avons :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = e^x \left(\frac{0!}{x} + \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \cdots + \frac{(n-1)!}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right) \right)$$

Preuve : Il faut commencer par effectuer plusieurs IPP successives afin de conjecturer la forme du reste et prouver ainsi qu'il est négligeable devant la somme qui le précède.