Topologie des EVN

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

10 décembre 2024

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On se place dans un $\mathbb{K}$-ev normé $(E, \|.\|)$.

But du chapitre : Dans ce chapitre, nous allons définir dans $(E, \|.\|)$, les notions topologiques de base indispensables pour définir les notions de voisinage d'un point, de limite et de continuité d'une fonction VECTORIELLE, à savoir :

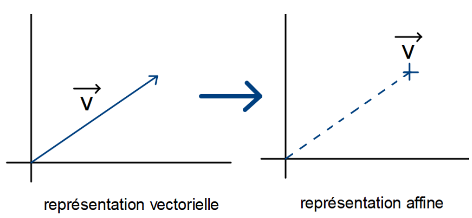
- L'intérieur, l'adhérence et la frontière d'une partie de E.
- Les notions de partie ouverte et de partie fermée de E.
- La notion de densité.

Remarque : Toutes les notions introduites dans ce cours sont inchangées par passage d'une norme à une norme équivalente. En particulier lorsque nous serons en dimension finie, il ne sera pas nécessaire de préciser la norme utilisée.

Table des matières

Illustrations graphiques

La visualisation des notions topologiques est plus éloquente si on considère E comme un espace affine et donc les vecteurs comme des points.



1 Voisinage, Intérieur, Adhérence et Frontière

Nous allons dans cette partie donner une définition des notions :

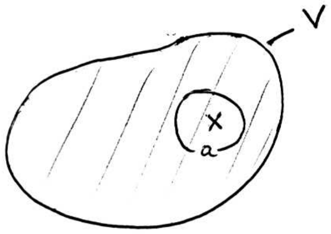
- de *voisinage* d'un point a de E.
- d'*intérieur* ($\overset{\circ}{X}$), d'*adhérence* ($\bar{X}$) et de *frontière* (∂X) d'une partie X de E.

Ces notions nous permettront dans une deuxième partie de définir les notions $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'}\textit{ouvert} \\ \text{de } \textit{fermé} \end{array} \right.$ de E.

1. Voisinage d'un point :

DÉFINITION : Voisinage d'un point

On dira qu'une partie $V \subset E$ est un voisinage d'un point $a \in E$ lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $B(a,\ \alpha) \subset V$.



Définition dans $\mathbb{R}$:

On dira que $X \subset \mathbb{R}$ est un voisinage de $a \in \mathbb{R}$ lorsqu'il existe $\alpha > 0$ tel que $]a - \alpha,\ a + \alpha[\subset X$.
On étend cette définition aux voisinages de $\pm\infty$ qui ne sont pourtant pas des points de $\mathbb{R}$.

Exemples :

- Un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ est un voisinage de chacun de ses points.
- La boule $B(a,\ \alpha)$ est un voisinage de son centre $a \in E$.
- Les intervalles centrés en a sont des voisinages de $a \in \mathbb{R}$.
- Tout voisinage de $a \in \mathbb{R}$ contient des rationnels et des irrationnels.

♡ *En pratique, lorsqu'on voudra se placer au voisinage d'un point $a \in E$, nous considèrerons une boule de centre a ou un intervalle centré en a lorsque $E = \mathbb{R}$.*

PROPOSITION : Calculs sur les voisinages

- Une partie qui contient un voisinage de a est aussi un voisinage de a.
- Une réunion de voisinages de a est également un voisinage de a.
- Un intersection finie de voisinages de a est un voisinage de a.

⚠ FAUX dans le cas d'une intersection infinie :

L'intersection des voisinages $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left] -\frac{1}{n},\ \frac{1}{n} \right[\quad = \quad \{0\}$ n'est pas un voisinage de 0

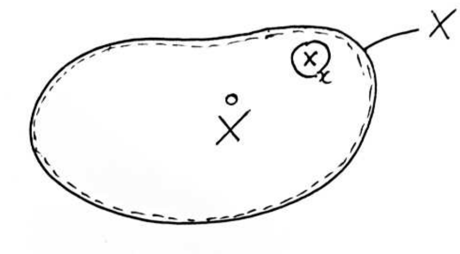
2. Intérieur d'une partie :

Intérêt de la notion : On pourra effectuer une étude locale en un point intérieur en se plaçant sur un voisinage.

Définition : Intérieur d'une partie :

On dit que $a \in E$ appartient *à l'intérieur* de X lorsqu'il existe une boule de centre a incluse dans X.
Cela revient à dire que X est un voisinage de a.
On dit aussi que a est un *point intérieur* à X.

L'ensemble des points intérieurs à X est appelé *l'intérieur de* X est est noté $\mathring{X}$.



Si on imagine la partie comme une patate, on obtient l'intérieur de cette partie en enlevant la peau.

Remarque : $\mathring{X} \subset X$ et $\mathring{\mathring{X}} = \mathring{X}$.

Méthodes pour prouver que $A = B$

- Méthode usuelle : Par double inclusion.
- Méthode adaptée : on démontre que $\begin{cases} x \in A \Rightarrow x \in B \\ x \notin A \Rightarrow x \notin B \end{cases}$

Méthode pour déterminer l'intérieur de X

- On conjecture que $\mathring{X} = A$ en utilisant le fait que $\mathring{X} \subset X$.
- $\supset$: On montre que tout élément de A appartient à $\mathring{X}$.
- $\subset$: On montre que tout élément de X n'appartenant pas à A n'appartient pas à $\mathring{X}$.

Exemples :

- Intérieur de $\emptyset$, de E et d'un singleton.
- Intérieur d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Intérieur de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
- Intérieur du demi-plan complexe $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$...
- Intérieur d'une boule (ouverte ou fermée) et d'une sphère.

Exercice : 1

(♡) Déterminer l'intérieur d'un sev strict d'un evn E.

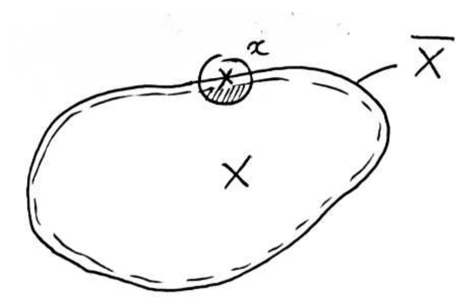
3. Adhérence d'une partie :

Intérêt : Un point de l'adhérence pourra être approché aussi près que l'on veut pas des points de la partie.

Définition : **Adhérence :**

On dit que $a \in E$ appartient à *l'adhérence* de X lorsque pour tout $\alpha > 0$, $\mathcal{B}(a, \alpha) \cap X \neq \emptyset$.
Cela revient à dire que tout voisinage de a rencontre X.
On dit alors que a est un *point adhérent* à X.

L'ensemble des points adhérents à X est appelé *l'adhérence* de X et est notée $\bar{X}$.
On convient que $\overline{\emptyset} = \emptyset$



Si on imagine la partie comme une patate, on obtient l'adhérence de cette partie en rajoutant la peau qui a été enlevée.

Remarque : $X \subset \bar{X}$ et $\overline{\bar{X}} = \bar{X}$.

Méthode : Pour déterminer $\bar{X}$

- On conjecture que $\bar{X} = A$ en sachant que $X \subset \bar{X}$
- $\supset$: On montre que tout élément de A appartient à $\bar{X}$.
- $\subset$: On montre que tout élément n'appartenant pas à A n'appartient pas à $\bar{X}$.

Exemples :

- Adhérence de $\emptyset$, de E et d'un singleton.
- Adhérence d'un intervalle de $\mathbb{R}$
- Adhérence de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$
- Adhérence du demi-plan complexe $\mathcal{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$
- 0 est adhérent à $\mathbb{C}^*$
- Adhérence d'une boule (ouverte ou fermée).

Proposition : **Complémentaire de l'adhérence et de l'intérieur**

$$C_E\bar{A} = \overset{\circ}{C_E A} \quad \text{et} \quad C_E(\mathring{A}) = \overline{C_E A}$$

Preuve :

- Par équivalences successives en justifiant proprement la 3ème équivalence :

$$a \in C_E\bar{A} \Longleftrightarrow a \notin \bar{A} \Longleftrightarrow \exists \alpha > 0,\ B(a,\ \alpha) \cap \bar{A} = \emptyset \Longleftrightarrow \exists \alpha > 0,\ B(a,\ \alpha) \subset C_E A \Longleftrightarrow a \in \overset{\circ}{C_E A}$$

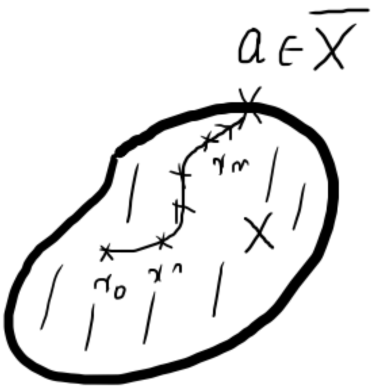
- L'autre s'en déduit par passage au complémentaire puis substitution de A par $C_E A$.

Théorème Fondamental : **Caractérisation séquentielle des points adhérents**

Soit X une partie non vide de E.
On a :

$$a \in \bar{X} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (x_n) \in X^{\mathbb{N}},\ (x_n) \to a$$

Preuve : Facile par double implication.



Exemples :

- Si X est une partie non vide majorée de $\mathbb{R}$, alors $\sup(X)$ est adhérent à X.
- La matrice $\tilde{0}_p$ est adhérente à $\mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$. D/ $M_n = \frac{1}{n} I_n$.
- L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même centre et rayon.

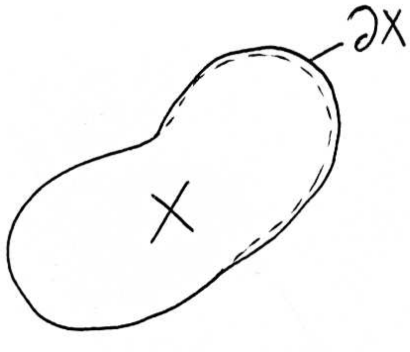
Exercice : 2
$(*)$ *Tiré de l'exercice 44 de la banque CCINP.*

Soient A et B deux parties non vides d'un evn E.
1. Montrer que $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$.
2. Montrer que $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ puis que l'inclusion réciproque est fausse.
3. Montrer que $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Exercice : 3
$(*)$ *Tiré de l'exercice 34 de la banque CCINP.*

Soit A une partie non vide d'un evn E.
1. Montrer que si A est un sev de E alors $\bar{A}$ est également un sev de E.
2. Montrer que si A est une partie convexe de E alors $\bar{A}$ est également une partie convexe de E.

4. Frontière :



♡ Il s'agit des points de E qui sont « *au bord* » de X, c'est à dire qui peuvent être approchés à la fois par une suite d'éléments de X et à la fois par une suite d'éléments de $C_E X$.

Définition : On appelle *frontière* d'une partie X de E :

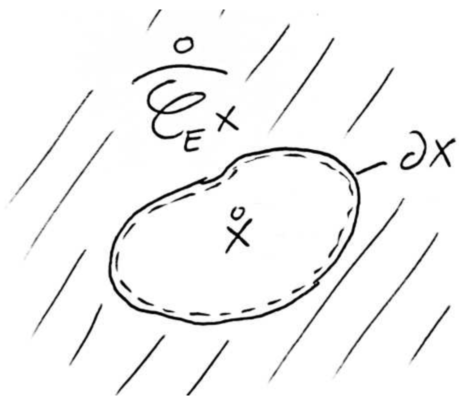
$$\boxed{\partial X = \bar{X} \backslash \mathring{X}} \quad \text{ou encore} \quad \boxed{\partial X = \bar{X} \cap \overline{C_E X}}.$$

Preuve : On utilise le fait que $A \backslash B = A \cap C_E B$.

Si on imagine la partie comme une patate, la frontière de la partie correspond à la peau.

Remarques :

- $\{\mathring{X},\ \delta X\}$ forme une partition de $\bar{X}$.
- $\{\mathring{X},\ \delta X,\ \mathring{C_E X}\}$ forme une partition de E.



Exemples :

- Frontière de E de $\emptyset$ et d'un singleton.
- Frontière d'un intervalle de $\mathbb{R}$.
- Frontière de $\mathbb{Q}$.
- Frontière des demi-plans complexes $\mathcal{P}_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$ et $\mathcal{P}_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) > 0\}$.
- Frontière d'une boule (ouverte ou fermée), d'une sphère.

Proposition :

- Egalité entre la frontière d'un ensemble et celle de son complémentaire : $\partial X = \partial(C_E X)$
- Liens algébriques entre X, $\mathring{X}$, ∂X et $\bar{X}$: $\bar{X} = \begin{cases} X \cup \partial X \\ \mathring{X} \cup \partial X \end{cases}$ et $\mathring{X} = \begin{cases} X \backslash \partial X \\ \bar{X} \backslash \partial X \end{cases}$.

Preuve :

- Immédiat en utilisant le fait que $\partial X = \bar{X} \cap \overline{C_E X}$.
- Par calcul direct de $X \cup \partial X$ et de $X \backslash \partial X$.

2 Parties ouvertes et parties fermées

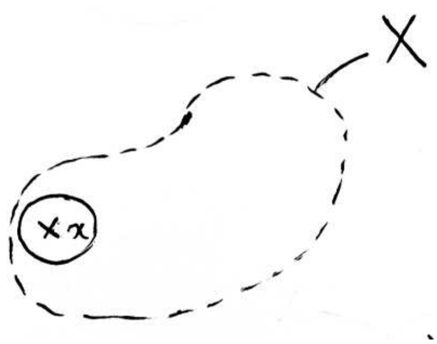
Nous savons que certains théorèmes portant sur les fonctions réelles ne s'appliquent que sur des intervalles ouverts (recherche des extrema d'une fonction dérivable) ou des segments (théorème des bornes atteintes de Weierstrass).
De même et plus généralement, certains théorèmes portant sur les fonctions vectorielles ne s'appliqueront que sur les parties ouvertes ou fermées. D'où l'importance de définir ces deux notions et d'étudier leurs propriétés.

Nous sommes toujours dans E un espace vectoriel normé.

1. Parties ouvertes :

Définition : **Partie ouverte**

Une partie de E est dite ouverte lorsqu'elle est voisinage de chacun de ses points (ou bien VIDE).



* Exemples :

- $\emptyset$ et E sont des ouverts.
- L'intérieur d'une partie est un ouvert.
- dans $\mathbb{R}$, les intervalles ouverts sont des ouverts.
- Une boule ouverte est un ouvert.

Proposition : X est un ouvert $\iff$ $X = \overset{\circ}{X}$

Remarque : Lorsque X est un ouvert, on a : $\partial X \cap X = \emptyset$.

Exercice : 4

$(*)$ Montrer que la notion d'ouvert est invariante par passage à une norme équivalente.

Méthode : Pour montrer que A n'est pas un ouvert

$$A \text{ n'est pas un ouvert } \iff \exists a \in A,\ \forall r > 0,\ B(a,r) \cap \mathcal{C}_E A \neq \emptyset$$

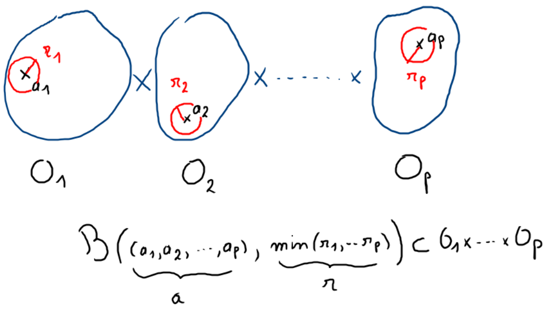
- On choisit donc judicieusement un élément $a \in A$.
- On recherche une suite (x_n) d'éléments de $\mathcal{C}_E A$ qui converge vers a

Exercice : 5

(∗) Prouver que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un ouvert.

PROPOSITION : **Opérations dur les ouverts**

- Une réunion (FINIE ou INFINIE) de parties ouvertes est un ouvert.
- Une intersection :
  → FINIE d'ouverts est un ouvert.
  → INFINIE d'ouverts n'est pas forcément un ouvert. ⚠ $\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*}]\frac{1}{n},\ \frac{1}{n}[= \{0\}\right)$
- Un produit cartésien d'ouverts est un ouvert de l'espace vectoriel normé produit.



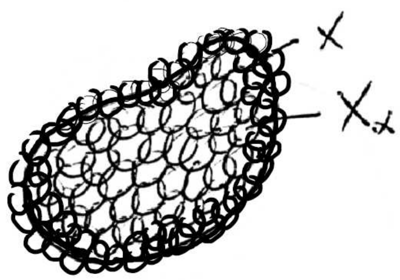
Cette proposition donne de nouvelles méthodes pour prouver qu'un ensemble est un ouvert :

Exemples :

- $]a,\ b[\times]c,\ d[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
- Une réunion d'intervalles ouverts est un ouvert.
- $\overset{\circ}{X}$ est le plus grand ouvert inclus dans X.
  C'est également la réunion de tous les ouverts inclus dans X.

Preuve :
- On suppose qu'il existe un plus grand ouvert et on montre qu'il est inclus dans $\overset{\circ}{X}$.
- On peut également montrer que $\overset{\circ}{X}$ est la réunion de l'ensemble des ouverts inclus dans X.

- Lorsque $X \subset E$, la partie $X_\alpha = \bigcup_{x\in X} B(x,\ \alpha)$ est un ouvert contenant X.



Méthodes pour prouver qu'une partie A est ouverte

Plutôt qu'utiliser la définition, on montre plutôt :

- Que A est une intersection finie, une réunion ou un produit cartésien d'ouverts
- Que le complémentaire de A est un fermé (voir ce qui suit)
- ♡ Que A est l'image réciproque d'un ouvert par une fonction continue (voir un prochain chapitre)

2. Parties fermées :

DÉFINITION : On dit qu'une partie est fermée lorsque son complémentaire est ouvert.

Remarque : ⚠ *Une partie non fermée n'est pas forcément une partie ouverte :* $]0,\ 1]$.

Exemples :

- $\emptyset$ et E sont des fermés.
- Les intervalles fermés de $\mathbb{R}$ sont des fermés, ainsi que $[a,\ +\infty[$ et $]-\infty,\ a]$.
- L'adhérence d'une partie est un fermé.
- Une boule fermée est un fermé.

PROPOSITION : X est fermée $\iff$ $X = \bar{X}$

Preuve : Par passage au complémentaire.

Remarque : Lorsque X est fermée, on a : $\partial X \subset X$.

Exercice : 6

$(*)$ *Tiré de l'exercice 45 de la banque CCINP.*

Soit A une partie non vide d'un evn E. On pose pour tout $x \in E$, $d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.

1. Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Rightarrow x \in \bar{A}$.
2. Application :

   On suppose que A est un fermé et que $\left\{ \begin{array}{l} \forall x,\ y \in E \\ \forall t \in [0,\ 1] \end{array} \right.$, $d_A(tx + (1-t)y) \leq t d_A(x) + (1-t) d_A(y)$.

   Montrer que A est une partie convexe.

PROPOSITION : **Opérations sur les fermés**

- Une intersection (FINIE ou INFINIE) de fermés est un fermé.
- Une réunion :
  - $\rightarrow$ FINIE de fermés est un fermé.
  - $\rightarrow$ INFINIE de fermés n'est pas forcément un fermé. ⚠ $\left(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} [0,\ 1 - \dfrac{1}{n}] = [0,\ 1[\right)$.
- Le produit cartésien de fermés est un fermé de l'espace vectoriel normé produit.

Preuve :

- Par passage au complémentaire pour les 2 premiers points
- Par caractérisation séquentielle pour le produit cartésien

Exemples :

- $[a,\ b] \times [c,\ d]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

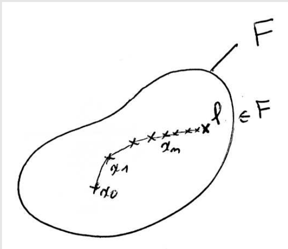
- ∂X est une partie fermée car $\partial X = \bar{X} \cap \overline{C_E X}$.

- $\bar{X}$ est l'intersection de tous les fermés contenant X.
  C'est donc le plus petit fermé contenant X.

Preuve : Soit F un fermé qui contient X. On montre que $\bar{X} \subset F$ en passant au complémentaire.

Théorème Fondamental : Caractérisation séquentielle des parties fermées

Soit F une partie de E.



F est un fermé $\iff$ la limite de toute suite convergente d'éléments de F est dans F.

Preuve : Par double contraposée :

$\Rightarrow$ Soit $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a \notin F$.
Tout voisinage de a rencontre F ce qui prouve que $C_E F$ n'est pas un ouvert et donc que F n'est pas un fermé.

$\Leftarrow$ Supposons que F n'est par un fermé, alors $\mathcal{C}_E F$ n'est pas un ouvert.
Il existe alors $a \in \mathcal{C}_E F$ tel que $\forall \alpha > 0,\ B(a,\ \alpha) \cap F \neq \emptyset$.
On construit alors une suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que $(x_n) \to a \notin F$.

Exemples : On prouve facilement avec la caractérisation séquentielle que :

- Les singletons sont des parties fermées et donc toute partie finie est un fermé.
- Les boules fermées sont des parties fermées.
- Les sphères sont des fermés.

Méthodes pour prouver qu'une partie A est fermée

Plutôt qu'utiliser la définition, on montre plutôt :

- Que A est une intersection, une réunion finie ou un produit cartésien de fermés
- Que toute suite convergente d'éléments de A a sa limite dans A
- Que A est l'image réciproque d'un fermé par une fonction continue (voir un prochain chapitre)

Exercice : 7

$(*)$ Prouver que la courbe de la fonction exponentielle est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Exemple : La distance entre deux fermés disjoints peut-être nulle.
Par exemple les courbes de $x \mapsto \frac{1}{x}$ et $x \mapsto x$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice : 8

$(*)$ Prouver que l'ensemble des matrices stochastiques est un fermé de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Méthodes pour prouver que...

- A n'est pas un fermé, on montre qu'il existe une suite convergente de $A^{\mathbb{N}}$ dont la limite n'est pas dans A.
- A n'est pas un ouvert, on montre que $\mathcal{C}_E A$ n'est pas un fermé en montrant qu'il existe une suite convergente de $(\mathcal{C}_E A)^{\mathbb{N}}$ dont la limite n'est pas dans $\mathcal{C}_E A$.

Exercice : 9

(♡) Prouver que l'ensemble des matrices diagonalisables n'est ni un fermé ni un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

3. Petits résultats complémentaires : Topologie des sev de E

- Montrer que E est le seul sev ouvert de E.

  Preuve : On considère F un sev ouvert de E et on remarque que $0_E \in F$.

- Lorsque E est de dimension finie, les sev F de E sont des fermés.

  Preuve : Avec la caractérisation séquentielle en prenant une base de E adaptée à F.

- Lorsque E est de dimension infinie :

  → les sev de dimension finie sont des fermés. (vu plus tard !)
  → un sev de dimension infinie n'est pas forcément un fermé.

  Par exemple, le sev des suites presque nulles de l'ensemble des suites réelles bornées muni de :

$$\|(u_n)\| = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|u_n|}{2^n}$$

  Preuve : Avec les suites $(u_n)^k$ de terme général $u_n^k = 1$ pour $0 \leq n \leq k$ puis $u_n^k = 0$ pour $n > k$.

3 Topologie relative

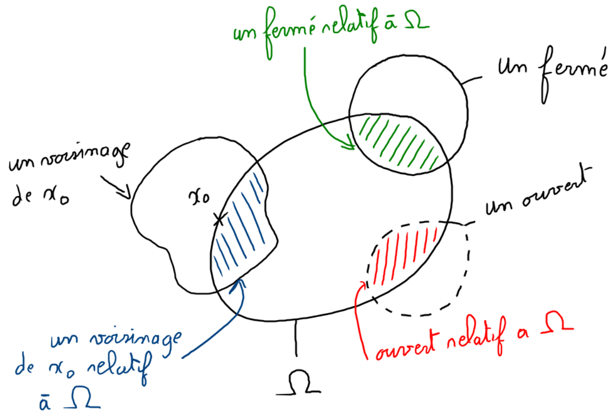
Soit X une partie de E.

Dans le chapitre sur la continuité des fonctions vectorielles (définies sur $X \subset E$), nous ferons appel aux notions de *voisinage relatif* d'un élément de E ainsi que d'*ouvert relatif* et de *fermé relatif* à la partie X.
L'idée est de restreindre les notions topologiques précédentes à la partie X en prenant leur intersection avec X.

Soit $a \in E$ et $X \subset E$

DÉFINITION :

- On appelle *voisinage de a relatif à X* l'intersection d'un voisinage de a avec X.
- On appelle *ouvert relatif à X* l'intersection d'un ouvert de E avec X.
- On appelle *fermé relatif à X* l'intersection d'un fermé de E avec X.



<u>Exemples</u> :

- $[0,\ 1[$ est :
  - $\rightarrow$ un voisinage de 0 relatif à $\mathbb{R}^+$.
  - $\rightarrow$ un ouvert relatif à $\mathbb{R}^+$
  - $\rightarrow$ un fermé relatif à $]-\infty,\ 1[$
- X est un voisinage relatif à X de tout point de X.
- $\emptyset$ et X sont des ouverts et des fermés relatifs à X.

PROPOSITION : **Caractérisation des voisinages et des ouverts relatifs à X**

- A est un voisinage de a relatif à $X \iff$ il existe $\alpha > 0$ tel que $\mathcal{B}(a,\ \alpha) \cap X \subset A$.
- A est un ouvert relatif à $X \iff A$ est un voisinage relatif à X de chacun de ses points.

THÉORÈME : **Caractérisations des fermés relatifs à X**

On a équivalence entre :

(i) F est un fermé relatif à X.
(ii) F contient les limites de SES suites convergeant dans X.
(iii) Le complémentaire de F dans X est un ouvert relatif à X.

D/ Non faite.

4 Densité

Nous avons vu en MPSI que certaines parties de $\mathbb{R}$ étaient denses dans $\mathbb{R}$: c'est le cas de $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$...
Dans cette partie, nous allons étendre cette notion à une partie d'un EVN.
Nous verrons alors qu'une propriété vraie sur un ensemble dense peut parfois se généraliser à l'espace tout entier. Pour cela, l'hypothèse de continuité sera souvent nécessaire.

Enfin, nous verrons que :

→ $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

→ L'ensemble des fonctions polynômiales (et donc l'ensemble des fonctions $\mathcal{C}^\infty$) est dense dans l'ensemble des fonctions continues sur un segment muni de l'une des 3 normes usuelles $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$. (Théorème de Stone-Weierstrass)

→ L'ensemble des fonctions en escalier est dense dans l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur un segment muni de l'une des 3 normes usuelles $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$. (Définition de l'intégrale de Riemann)

1. Définition / exemples :

DÉFINITION : On dit que $X \subset E$ est dense dans E lorsque $\bar{X} = E$.

THÉORÈME : **Caractérisations de la densité**

X est dense dans E :

- SSI : pour tout $a \in E$ et tout $\alpha > 0$, $\mathcal{B}(a,\ \alpha) \cap X \neq \emptyset$.
- SSI : pour tout $a \in E$, il existe $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \to a$.

Exemples :

- $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

Preuve :
- La suite (x_n) : $x_n = \frac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ prouve la densité de $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- La suite (x_n) : $x_n = x + \frac{\sqrt{2}}{n}$ prouve la densite de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

- $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve : A admet un nombre fini de valeurs propres donc $M_p = A - \frac{1}{p} I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ apcr.

Exercice : 10
(♡) L'image d'une partie dense de $\mathbb{R}$ par une application $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ est dense dans $f(\mathbb{R})$.

Exercice : 11
(♡♡) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

On pensera à trigonaliser la matrice A.

2. Approximation uniformes : Soit $f : [a,\ b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$.

(a) Par des fonctions en escalier : Lorsque f est continue par morceaux sur $[a,\ b]$.

Rappel : Notion de subdivision, de fonction en escalier sur un segment.

Théorème Fondamental : Toute fonction f continue par morceaux sur $[a,\ b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier.

Preuve : C'est la démonstration vue en MPSI pour définir la notion d'intégrale de Riemann.
On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

- → Cas où f est continue : On utilise le théorème de Heine qui dit que f est uniformément continue. On trouve alors une subdivision puis une fonction en escalier qui convient.
- → Sinon, on se place sur une subdivision S_k de f que l'on prolonge par continuité. On applique alors le cas 1 sur tous les segments de la subdivision et en regroupant les différentes fonctions en escalier obtenues, on obtient une fonction en escalier φ_n telle que $\|f - \varphi_n\|_{\infty,\ [a,\ b]} \leq \frac{1}{n}$.

Autrement dit : L'ensemble des f° en escalier sur $[a,\ b]$ est une partie dense de $(\mathcal{C}_m([a,\ b], \mathbb{K}),\ \|.\|_\infty)$.

Rappels :

- ⋆ lorsque $(f_n) \to f$ pour $\|.\|_2$, on dit que la convergence est quadratique ou en moyenne quadratique.
- ⋆ lorsque $(f_n) \to f$ pour $\|.\|_\infty$, on dit que la convergence est uniforme.

Exercice : 12

(♡) **Lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction C_m**

Montrer que pour toute f continue par morceaux sur $[a,\ b]$, on a : $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Lorsque f est $\mathcal{C}^1$, une IPP permet de montrer rapidement ce résultat.

Preuve :

- Si f est constante : immédiat
- Si f est en escalier : on découpe pour se ramener au cas précédent.
- Si f est continue par morceaux : Pour $\varepsilon > 0$, on introduit (u_k) en escalier telle que $\|f - u_k\|_\infty \to 0$.
On majore alors $|\int_a^b f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t| \leq \int_a^b |f(t) - u_k(t)|\,\mathrm{d}t + |\int_a^b u_k(t)e^{int}\,\mathrm{d}t| \leq ...$

Exercice : 13

(∗∗) **Approximation uniforme par des fonctions affines par morceaux**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $0 \leq k \leq n$, on pose $x_k = a + \frac{k}{n}(b - a)$.
On définit alors f_n la fonction affine par morceaux telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a $f_n(x_k) = f(x_k)$.
En utilisant l'uniforme continuité de f sur $[a,\ b]$, montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[a, b]$.

(b) Par des fonctions polynômes :

Théorème Fondamental : STONE-WEIERSTRASS

Toute fonction $f \in \mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{K})$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales.

Preuve : HP ! Fait souvent l'objet de problèmes de concours.
Voir CCINP-2016-PC pour une démonstration probabiliste utilisant les polynômes de Bernstein.

En d'autres termes : L'ensemble des f° polynomiales est dense dans $\mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{R})$ muni de $\|.\|_\infty$.

Puisque $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ sont dominées par $\|.\|_\infty$, alors le corollaire est encore vrai pour ces deux normes.

Remarques :

- Puisque les fonctions polynômiales sont $\mathcal{C}^\infty$, alors $\mathcal{C}^\infty([a,\ b],\ \mathbb{K})$ est également dense dans $\mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{K})$ normé par $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$ ou $\|.\|_\infty$.
- On peut également prouver que toute fonction C^0 sur $[a,\ b]$ est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques (séries de FOURIER). (HP)

Exercice : 14

(♡) **Lemme des moments**

Soit f continue sur $[0,\ 1]$ telle que $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)\ \mathrm{d}t = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que $f = 0$.

Preuve : On considère une suite de fonctions polynômiales φ_n convergeant uniformément vers f.
Par théorème d'inversion limite/intégrale, comme $\varphi_n f \overset{CVU}{\to} f^2$ on a $0 = \int_0^1 \varphi_n f \to \int_0^1 f^2$.

Exercice : 15

(♡) **Lemme de Riemann-Lebesgue pour une fonction $\mathcal{C}^0$**

1. Montrer que, lorsque f est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\ 1]$, on a $\int_0^1 f(t)e^{-xt}\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
2. En déduire que, cela reste vrai lorsque f est seulement $\mathcal{C}^0$ sur $[0,\ 1]$.

Preuve : En approchant uniformément f par une fonction polynômiale.

3. Musculation 1 : Sous-groupes de $(\mathbb{R},\ +)$ et application à la densité.

Proposition : Les sous-groupes G de $(\mathbb{R},\ +)$ sont soit denses, soit de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a > 0$.

Preuve : On introduit $a = \inf G \cap \mathbb{R}^{+*}$ avec G un sous-groupe non réduit à $\{0\}$.

- Si $a \neq 0$: on montre que $G = a\mathbb{Z}$.
- Si $a = 0$: on montre que G est dense dans $\mathbb{R}$ en utilisant le caractère archimédien de $\mathbb{R}$.

Application : $\{\cos n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans $[-1,\ 1]$.

Preuve : RUSE : On considère $H = \mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$:

- H est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.
  S'il est de la forme $a\mathbb{Z}$ alors le fait que $1 \in a\mathbb{Z}$ et $2\pi \in a\mathbb{Z}$ donne une contradiction.
  Donc H est dense dans $\mathbb{R}$! !
- On prend alors $x \in [-1,\ 1]$ et $y = \arccos x \in \mathbb{R}$.
  On approche alors y par une suite (y_n) d'élément de H et ainsi $\cos y_n \to x$ par continuité de cos.

On peut en déduire que $\{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans le cercle trigonométrique.

4. Musculation 2 : Applications usuelles de la densité.

Ensembles denses	Application(s) usuelle(s)
$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	• $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ • Calcul de la différentielle du déterminant
L'ensemble $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ des matrices diagonalisables est dense dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$	Démonstration de Cayley-Hamilton dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$
$\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$	Recherche des morphismes continus de $(\mathbb{R},\ +)$ dans $(\mathbb{R},\ +)$.
Les sous-groupes de $\mathbb{R}$ sont de la forme $a\mathbb{Z}$ ou dense.	• $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque $\frac{a}{b} \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ • $\{\cos n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ et $\{\cos n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ sont denses dans $[-1,\ 1]$ • $\{e^{in} \mid n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans le cercle trigo
L'ensemble des fonctions polynômiales est dense dans $(\mathcal{C}^0([a,\ b],\ \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$	Approximation polynômiale d'une fonction continue Lemme des moments
L'ensemble des fonctions en escalier est dense dans $(\mathcal{C}_m([a,\ b],\ \mathbb{K}), \|.\|_\infty)$	Définition de l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ Lemme de Riemann-Lebesgue