
Les familles sommables

Introduction et Synthèse



Pascal DELAHAYE

13 décembre 2023

Une famille $(x_i)_{i \in I}$ (indexée sur I) de réels ou de complexes étant donnée, on se demande si cela a un sens d'additionner tous les éléments de la famille...

L'ensemble d'indexation I n'étant pas toujours ordonné, la somme des éléments de la famille n'aura de sens que si le résultat de la somme est indépendant de l'ordre dans lequel les éléments sont additionnés. On dira alors que la famille est sommable.

La définition de "*famille sommable*" ayant été vue en MPSI, le but de ce chapitre sera alors de rappeler comment on vérifie la sommabilité d'une famille et comment on peut alors calculer sa somme.

Nous verrons qu'il existe de nombreuses analogies avec les intégrales impropres, la notion de "famille sommables" étant analogue à celle de "fonction intégrable".

1 Introduction aux familles sommables

Soit $(x_i)_{i \in I}$ est une famille de réels ou de complexes.

- Lorsque I est FINI ou que la famille $(x_i)_{i \in I}$ est à support FINI, la somme des éléments de la famille est indépendante de l'ordre dans lequel on effectue les opérations. Cette somme peut alors être notée sans ambiguïté :

$$\sum_{i \in I} x_i$$

- Mais peut-on donner un sens à $\sum_{i \in I} x_i$ lorsque la famille $(x_i)_{i \in I}$ admet un nombre infini de valeurs ?



Un exemple qui pose problème

Calculons la somme des éléments de la famille $\left(\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de deux façons distinctes.

- Dans l'ordre naturel de $\mathbb{N}^*$: $S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots = \ln 2$.

- Dans un ordre différent :

$$\begin{aligned} S &= 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right) + \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12}\right) + \dots \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \dots \end{aligned}$$

On obtient $S = \frac{1}{2}S$ et donc $S = 0$.

La notation $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ n'a donc aucun sens !

Nous allons ici nous intéresser aux familles $(x_i)_{i \in I}$ pour lesquelles $\sum_{i \in I} x_i$ a un sens, c'est à dire pour lesquelles le calcul de cette somme est indépendant de l'ordre dans lequel celui-ci est effectué.

2 Ensembles dénombrables

Nous commencerons par définir la notion d'ensemble dénombrable puis nous en donnerons quelques exemples et propriétés. Grâce au raisonnement de Cantor, nous découvrirons entre autre que tous les infinis ne se valent pas et qu'il existe même une infinité d'infinis dont le plus petit est l'infini *dénombrable*.

1. Définition :

DÉFINITION : Un ensemble E est dit *dénombrable* s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. (CANTOR)

L'idée est qu'un tel ensemble a alors le "même nombre d'éléments" que $\mathbb{N}$.



Approche intuitive

L'existence d'une telle bijection $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow E$ se traduit intuitivement par la possibilité de numérotier (ou d'ordonner) les éléments de E :

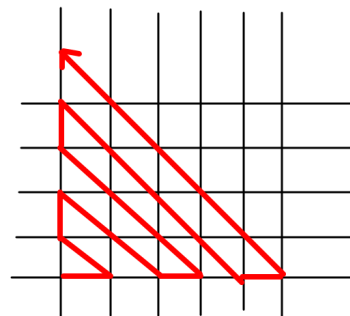
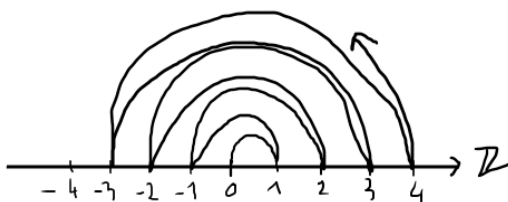
$$\varphi(0) - \varphi(1) - \varphi(2) - \dots$$

La suite $(x_n) \mid x_n = \varphi(n)$ est appelée *une énumération* des éléments de E .

On pourra utiliser cette approche intuitive dans les démonstrations.

Exemples : Les ensembles suivants sont dénombrables

- $\mathbb{N}^*$: $\varphi(n) = n + 1$.
- $\mathbb{Z}$: $\varphi(2n) = n$ et $\varphi(2n + 1) = -n - 1$,
- $\mathbb{N}^2$: En numérotant les couples par diagonales ou en prenant $\varphi(n, p) = 2^n(2p + 1)$.



Dire que ces ensembles ont le même nombre d'éléments que $\mathbb{N}$ semble paradoxal... Ce résultat signifie en fait que les infinités de ces ensembles sont du même ordre de grandeur.

Exemples : Les ensembles suivants ne sont pas dénombrables

- $\mathbb{R}$: D/ Par l'absurde avec la diagonale de Cantor

- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: D/ Par l'absurde avec $\Delta = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \varphi(n)\}$

- $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$: D/ Par l'absurde avec la diagonale de Cantor

2. Propriétés : des ensembles "finis ou dénombrables"

DÉFINITION : On dit qu'un ensemble est "au plus dénombrable" lorsqu'il est "fini ou dénombrable".

PROPOSITION 1 :

- Toute partie de $\mathbb{N}$ est au plus dénombrable.
- Un ensemble est au plus dénombrable ssi il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.

Preuve :

- Lorsqu'elle est infinie, on construit la suite des éléments de la partie donnés par ordre croissant.
- Facile

3. Opérations :

**PROPOSITION 2 : Inclusion**

- Toute partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
- S'il existe une injection f de E dans un ensemble dénombrable alors E est au plus dénombrable.

Preuve : Faciles.

PROPOSITION 3 : Produit cartésien

Le produit cartésien d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Preuve : Dans le cas de 2 ensembles dénombrables.

Soit π est une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ et u et v des bijections de E et F dans $\mathbb{N}$.

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E \times F & \longrightarrow & \mathbb{N}^2 \\ (x, y) & & (u(x), v(y)) \end{array} \xrightarrow{\pi} \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & & \\ & & \pi(u(x), v(y)) \end{array}$$

Exemple : $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Preuve : On considère l'injection canonique de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ qui est dénombrable.

Question : Existe-t-il une application f strictement croissante et vérifiant $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Q}$?

Exercice : 1

(♥) Montrer que $\mathbb{Q}_n[X]$ est dénombrable.

Preuve :

PROPOSITION 4 : ♥ Réunion

Si les E_i et I sont au plus dénombrables alors $\bigcup_{i \in I} E_i$ est au plus dénombrable.

Preuve : Immédiat si les ensembles sont finis, mais hors-Programme dans le cas général!

Exemple : $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ n'est pas dénombrable car sinon, $\mathbb{R}$ le serait.

Exercice : 2

(*) Montrer que l'ensemble E des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

Exercice : 3

(*) Montrer que l'ensemble Δ des éléments d'ordre fini du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$ est dénombrable.

D/ On constate que $\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{U}_n$.


PROPOSITION 5 : Image par une application

Soit $f : A \rightarrow B$:

- Si A est au plus dénombrable :
 $\rightarrow f(A)$ est au plus dénombrable
 $\rightarrow f$ surjective $\Rightarrow B$ est au plus dénombrable
- Si A est non dénombrable : f injective $\Rightarrow f(A)$ non dénombrable et donc B est non dénombrable.
- Si B est au plus dénombrable : f injective $\Rightarrow A$ est au plus dénombrable.

Preuve :

- On sélectionne un unique antécédent par élément de $f(A)$ et on considère la restriction de f à cet ensemble.
- Par l'absurde.

Exemple : $f(\mathbb{Q})$ est au plus dénombrable.

4. **Exercice** : Il existe une infinité d'infinis...

Exercice : 4

(*) Montrer qu'il n'existe pas de bijection de E (un ensemble de cardinal au moins 2) dans $\mathcal{P}(E)$.

Preuve : On raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe une bijection $\varphi : E \rightarrow \mathcal{P}(E)$.
 On trouve une absurdité en considérant l'ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin \varphi(x)\}$.

On prouve ainsi, en partant par exemple de $E = \mathbb{N}$, qu'il existe une suite strictement croissante d'infinis... Cf les travaux de Cantor!

L'infini de $\mathbb{R}$ est appelé la puissance du continu et l'axiome qui prétend que la puissance du continu est l'infini qui suit immédiatement le dénombrable est appelé l'hypothèse du continu.



A voir sur Youtube



<https://www.youtube.com/watch?v=T3NsxF193gU>



SYNTHESE : Familles sommables $(x_i)_{i \in I}$

Objectif : Comment répondre aux deux questions suivantes :

- La famille $(x_i)_{i \in I}$ est-elle sommable ?
- Que vaut la somme $\sum_{i \in I} x_i$ lorsque la famille est sommable ?

I] Le théorème de sommation par paquets

Les principaux outils utilisés :

I est ici un ensemble dénombrable. Le plus souvent, nous aurons $I = \begin{cases} \mathbb{N} \\ \mathbb{Z} \\ \mathbb{N}^2 \\ \mathbb{Z}^2 \end{cases}$.

Les méthodes d'étude de sommabilité et de calcul de sommes découlent du théorème de sommation par paquets suivant.

THÉORÈME : Sommation par paquets

Pour étudier la sommabilité de $(x_i)_I$

On choisit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une partition de I :

$$\begin{cases} I = \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n & (\text{dénombrable}) \\ I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_p & (\text{finie}) \end{cases}$$

- Nous avons alors :

$$(x_i)_I \text{ est sommable} \iff \begin{cases} \text{les sous-familles } (x_i)_{i \in I_n} \text{ sont sommables} & (\forall n \in \mathbb{N} \text{ ou } \forall n \in \llbracket 1, p \rrbracket) \\ \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i \in I_n} |x_i| \right) \text{ converge} & (\text{immédiat dans le cas fini}) \end{cases}$$

- Dans ce cas la somme de la famille est notée $\sum_{i \in I} x_i$ et vaut :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right) \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^p \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right) \text{ dans le cas fini}$$

COROLLAIRE 7 :

$$(x_i)_I \text{ est sommable} \iff (|x_i|)_I \text{ est sommable}$$



Etude pratique de la sommabilité

- Pour étudier la sommabilité de $(x_i)_{i \in I}$:



→ On choisit une partition judicieuse de I : $I = \bigcup_{n=0}^{+\infty} I_n$.

→ On calcule : $\sum_{i \in I} |x_i| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} |x_i| \right) = \dots$

→ Si le calcul aboutit à un résultat fini, alors c'est que la famille est sommable
Si dans le calcul, l'une des sommes diverge, c'est que la famille n'est pas sommable.

- Pour calculer la somme de la famille $(x_i)_{i \in I}$:

En cas de sommabilité, on reprend le calcul précédent en remplaçant $|x_i|$ par x_i .

On obtient alors :

$$\sum_{i \in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I_n} x_i \right) = \dots$$

Remarque : ♡ Les deux étapes précédentes se limite à UNE SEULE lorsque la famille est à termes positifs.

COROLLAIRE 8 : **Sommabilité des familles indexées sur $\mathbb{N}$**

- $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable $\iff \sum_{n \geq 0} u_n$ converge ABSOLUMENT.
- Dans ce cas : la somme de la famille est égale à la somme de la série : $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n$

Preuve : Il suffit d'appliquer le théorème avec la partition $\mathbb{N} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \{n\}$.



Attention aux sens des différentes notations suivantes

- $\sum_{n \geq 0} x_n$ représente la série de terme général x_n
- $\sum_{n=0}^{+\infty} x_n$ représente la somme de la série convergente $\sum_{n \geq 0} x_n$ (somme ordonnée : $x_0 + x_1 + x_2 + \dots$)
- $\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n$ représente la somme de la famille sommable $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

Partitions les plus utilisées en pratique :

- | | | |
|------------------------------|---|---|
| • Partitions de $\mathbb{N}$ | $\mathbb{N} = (2\mathbb{N}) \cup (2\mathbb{N} + 1)$
$\mathbb{N} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\sigma(n)\}$ où $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$. | (indices pairs et indices impairs)
(partition élémentaire désordonnée) |
| • Partition de $\mathbb{Z}$ | $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ | (indices positifs et indices négatifs) |



- Partitions de $\mathbb{N}^2$

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p + q = n\} \quad (\text{par diagonales})$$

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(n, q) \in \mathbb{N}^2 \mid q \in \mathbb{N}\} \quad (\text{par colonnes})$$

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(p, n) \in \mathbb{N}^2 \mid p \in \mathbb{N}\} \quad (\text{par lignes})$$

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p \wedge q = n\} \quad (\text{selon la valeur du PGCD})$$

$$\mathbb{N}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid pq = n\} \quad (\text{selon les diviseurs de } n)$$

- Même principe pour $\mathbb{Z}^2$

THÉORÈME : Théorème de comparaison des familles à termes positifs

Soit $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$ vérifient pour tout $i \in I$: $0 \leq x_i \leq y_i$

On a alors :

- $(y_i)_{i \in I}$ sommable $\Rightarrow (x_i)_{i \in I}$ sommable
- $(x_i)_{i \in I}$ non sommable $\Rightarrow (y_i)_{i \in I}$ non sommable

Ce théorème pourra être utilisé dès lors que la sommabilité d'une famille $(x_i)_{i \in I}$ semble délicate à établir. En particulier, il permet de justifier la méthode suivante.

PROPOSITION 10 : Linéarité : Si $\left\{ \begin{matrix} (x_i)_{i \in I} \\ (y_i)_{i \in I} \end{matrix} \right.$ sont sommables, alors $(\lambda x_i + \mu y_i)_{i \in I}$ est sommable.

On en déduit alors la méthode suivante.

Cas des familles de nombres complexes : $(x_i)_{i \in I}$:

- Soit on montre directement que la famille $(|x_i|)_{i \in I}$ est sommable.
- Soit on montre que les familles $(\operatorname{Re}(x_i))_{i \in I}$ et $(\operatorname{Im}(x_i))_{i \in I}$ sont sommables.

En cas de sommabilité, nous avons alors : $\sum_{i \in I} x_i = \sum_{i \in I} \operatorname{Re}(x_i) + i \sum_{i \in I} \operatorname{Im}(x_i)$



Exemple

La famille $(\frac{e^{in}}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable tandis que la famille $(\frac{(-1)^n + ie^{-n}}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Preuve :



II] Exemples

Cas des familles indexés sur $\mathbb{N}$: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est sommable} \iff \sum_{n \geq 0} x_n \text{ CVA}$$

On peut alors vérifier la sommabilité de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

- en montrant la CVA de la série $\sum x_n$
- en partitionnant selon les indices pairs et les indices impairs
- en partitionnant en singletons selon une permutation $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$
- en partitionnant autrement...



Exemple avec la CVA

La famille $(\frac{(-1)^n}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable tandis que la famille $(\frac{(-1)^n}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas sommable.

Preuve :



Exemple en partitionnant

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\sigma(n)^2}$ converge pour tout $\sigma \in S_{\mathbb{N}^*}$.

Preuve :

—————

Cas des familles indexées sur $\mathbb{Z}$: $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$:

On partitionne habituellement $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N})$ et on vérifie simplement la sommabilité sur $\begin{cases} I_1 = \mathbb{N} \\ I_2 = \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N} \end{cases}$.



Exemple

Etudier la sommabilité de la famille $(q^{|n|})_{n \in \mathbb{Z}}$ où $q \in \mathbb{C}$.
Calculer sa somme en cas de sommabilité.



Preuve :



Exemple

Etudier la sommabilité de la famille $(r^{|n|}e^{in\theta})_{n \in \mathbb{Z}}$ où $r \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Calculer sa somme en cas de sommabilité.

Preuve :

—————

Cas des sommes indexées sur $\mathbb{N}^2 : (u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$

On montre que $\left\{ \begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{q \geq 0} |u_{n,q}| \quad (\text{colonnes}) \\ \text{ou} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p \geq 0} |u_{p,n}| \quad (\text{lignes}) \\ \text{ou} \\ \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{(p,q) \mid p+q=n} |u_{p,q}| \quad (\text{diagonales}) \end{array} \right.$ converge vers S_k et que $\sum_{k \geq 0} S_k$ est convergente.

Parfois, il faut envisager l'utilisation d'une partition plus judicieuse...



Exemple : Partition en lignes ou colonnes

Etudier la sommabilité de la famille $(\frac{1}{(pq)^2})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$.
Calculer sa somme en cas si elle s'avère être sommable.

Preuve :



Exemple : Partition en diagonales

Etudier les sommabilités des familles $(\frac{1}{(p+q)^2})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ et $(\frac{1}{(p+q)^3})_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$.



Preuve :



Exemple : Partition en diagonales

Etudier la sommabilité la famille $(\frac{1}{p!q!(p+q+1)})_{(p,q) \in (\mathbb{N})^2}$ et calculer sa somme.

Preuve :



Exemple : Partition en lignes ou colonnes

La famille $(\frac{1}{x^n + x^m})_{(n,m) \in (\mathbb{N})^2}$ est sommable lorsque $x > 1$.

Preuve : En applique le théorème de comparaison en remarquant que $a^2 + b^2 \geq 2ab$.

Cas particulier des sommes de Cauchy : $(u_n v_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$

Lorsque $\left\{ \begin{array}{l} \sum u_n \\ \sum v_n \end{array} \right.$ convergent absolument.

Leur produit de Cauchy $\sum_{n \geq 0} w_n$ où $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ converge et : $(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p)(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$

Preuve : On s'intéresse à la famille $(u_n v_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$.

- On montre la sommabilité en partitionnant en ligne (ou en colonne)
- On calcule alors la somme en partitionnant en ligne puis en diagonale



Lorsque les indices ne commencent pas à 0, on pourra ajouter des termes nuls pour se ramener à ce cas.



Exemple

Montrer la convergence de la série $\sum_{n \geq 2} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha (n-k)^\alpha} \right)$ lorsque $\alpha > 1$.

Preuve :

II] Exemples plus originaux

Cas des familles $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$:

Lorsque $\sum_{n \geq 0} x_n$ CVA et $\sigma \in S_{\mathbb{N}}$, on a :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n = \begin{cases} \sum_{p=0}^{+\infty} x_{2p} + \sum_{p=0}^{+\infty} x_{2p+1} \\ \sum_{n=0}^{+\infty} x_{\sigma(n)} \end{cases}$$


Exemple

Prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$.

Preuve :



Exemple

Prouver que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sigma(n)^2}$.

Preuve :


Cas des sommes doubles : $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$

Lorsque la famille $(u_{n,m})_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable, on a :

$$\left(\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} u_{n,m} \right) = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{m=0}^{+\infty} u_{n,m} = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n,m}} \quad (\text{Fubini})$$


Exemple

Prouver l'existence et calculer de deux façons différentes $\sum_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2} a^{p(2q-1)}$ où $a \in [0, 1[$.

Preuve :

♡ Lorsque la somme à étudier est triangulaire, on peut se ramener à une somme rectangulaire en ajoutant des termes nuls à la famille.


Exemple

Montrer que : $\sum_{m=1}^{+\infty} \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Preuve :


Exemple

Pour $(a_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum a_n$ converge, montrer que $\sum_{k \geq 0} \left(k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} \right)$ converge et exprimer sa somme.

Preuve :


Cas des Produits de Cauchy : $(u_n v_m)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$

Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, on a :

$$\left(\sum_{(n,m) \in \mathbb{N}^2} u_n v_m \right) = \left[\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} v_m \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n \right] \quad \text{où} \quad w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

Remarque : Cette formule peut s'utiliser pour calculer $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) \left(\sum_{m=0}^{+\infty} v_m \right)$ ou pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} \right)$.


Exemple

Prouver que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$ et $\sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$.

Preuve :

On obtient également ces résultats par dérivation d'un développement en série entière.


Exemple

Pour $a, b \in \mathbb{C}$, calculer $e^a \cdot e^b = \left(\sum_{n \geq 0} \frac{a^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq 0} \frac{b^n}{n!} \right)$.

Preuve :

Exemples utilisant des partitions originales

Exemple

Prouver que la famille $\left(\frac{1}{p^2 q^2} \right)_{(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2}$ est sommable, calculer sa somme et en déduire $\sum_{p \wedge q = 1} \frac{1}{p^2 q^2}$



Preuve :

**Exemple**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n .

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, on a :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} d(n) z^n.$$

Preuve :