Compacité

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

9 janvier 2025

La notion de compact généralise dans les evn la notion de segment dans $\mathbb{R}$.
Elle permettra ainsi de généraliser dans des EVN quelconques, les théorème suivants :

- Le théorème de Bolzano-Weierstrass qui dit qu'en dimension finie toute suite bornée admet une valeur d'adhérence
- Le théorème des Bornes Atteintes qui dit qu'une f° continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes
- Le théorème de Heine qui dit qu'une fonction continue sur un compact est uniformément continue

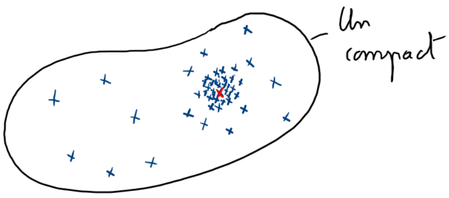
Questions de cours à maîtriser pour les colles :

- Les fermés/bornés en dimension finie sont des compacts + contre-exemple en dimension infinie
- L'image continue d'un compact est un compact
- L'image d'un segment par une application réelle continue est un segment
- La caractérisation de la convergence d'une suite dans un compact
- La distance d'un vecteur à un compact et à un fermé (en dimension finie) est atteinte
- Le théorème de Heine

Table des matières

1 Valeurs d'adhérence d'une suite

Cette notion est nécessaire pour définir la notion de *compact*.
Nous connaissons déjà la notion de limite d'une suite. Cette limite est en particulier une valeur autour de laquelle se concentre une infinité de termes de la suite. Plus généralement, les valeurs qui vérifient cette propriété sont appelées des valeurs d'adhérence de la suite.



1. Suites extraites : (Rappels)

DÉFINITION :

Une *suite extraite* de $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ est une suite $(v_n) : v_n = u_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strict^t croissante.

Il s'agit d'une sélection de termes de la suite conservés dans l'ordre initial.

Exemple : La suite des nombres premiers est une suite extraite de la suite de terme général $u_n = n$.

Remarque : Une suite extraite d'une suite extraite est une suite extraite de la suite initiale.

PROPOSITION : $u_n \to l \in E \iff$ toute suite extraite a pour limite l.

PROPOSITION : Si $\begin{cases} (u_{2n}) \to l \\ (u_{2n+1}) \to l \end{cases}$ alors $u_n \to l$.

Les généralisations de ce théorème ne sont pas au programme.

---

2. Valeurs d'adhérence d'une suite :

DÉFINITION : **Valeurs d'adhérence d'une suite**

On dit que $l \in E$ est une *valeur d'adhérence* de la suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ lorsqu'il existe une suite extraite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers l.

On note $Adh(u)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite u.

Ce sont les valeurs de E autour desquelles s'accumulent une infinité de termes de la suite.

Exemples :

- Si $u_n = (-1)^n + \frac{1}{n+1}$ alors les seules valeurs d'adhérence sont 1 et -1.
- Si $u_n = e^{i(\frac{\pi}{2}n + \frac{1}{n})}$ alors les seules valeurs d'adhérence sont 1, i, -1 et $-i$.

Proposition :

- Lorsque $\|u_n\| \to +\infty$, (u_n) n'a pas de valeur d'adhérence.
- Une suite convergente admet sa limite pour unique valeur d'adhérence.
- Une suite (u_n) qui possède au moins deux valeurs d'adhérence diverge.

Preuve : Immédiat avec la caractérisation séquentielle.

Lemme : Bolzano-Weierstrass initial
Toute suite bornée d'éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ admet au moins une valeur d'adhérence.

Preuve : Dichotomie pour $\mathbb{R}$ + Double extraction pour $\mathbb{C}$.

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il y a deux approches possibles usuelles :

- On construit par dichotomie une suite extraite convergente.
- On construit une suite décroissante minorée sur le principe "vue sur la mer".

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on procède à deux extractions successives :

- φ_1 qui permet d'obtenir la convergence de la partie réelle.
- $\varphi_2 \circ \varphi_1$ qui permet d'obtenir la convergence de la partie réelle et de la partie imaginaire.

2 Partie compacte

Dans cette partie, nous définissons la notion de compact d'un evn, puis nous en donnons quelques propriétés :

→ Un compact est un ensemble dans lequel toute suite admet une valeur d'adhérence dans l'ensemble.
→ Un compact est un fermé borné (et réciproquement en dimension finie)
→ Un fermé inclus dans un compact est un compact
→ L'intersection, la réunion (finie) et le produit cartésien de compacts est un compact

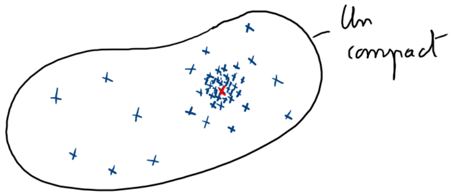
Nous verrons alors quelques applications des compacts :

→ Les sev de dimension finie sont fermés (même si l'evn E n'est pas de dimension finie)
→ La généralisation du théorème de Bolzano-Weierstrass aux suites bornées en dimension finie.
→ Caractérisation des suites convergentes d'éléments d'un compact.
→ En dimension finie, la distance d'un vecteur à un fermé est atteinte.

1. Définition :

Définition : Compact

Soit K une partie non vide d'un evn E.
K est dite *compacte* lorsque toute suite d'él^{ts} de K possède au moins une valeur d'adhérence dans K.



On dit également que K est un *compact* de E.

Interprétation : ♡ *Cela signifie que dans un compact, on ne peut pas répartir les termes d'une suite sans qu'il y ait accumulation autour d'une des valeurs de K.*

Premiers exemples :

- Sur $\mathbb{R}$:
  - $\rightarrow$ Les segments sont des parties compactes de $\mathbb{R}$. D/ Avec théorème de Weierstrass
  - $\rightarrow$ $[a, +\infty[$ n'est pas compact.
  - $\rightarrow$ $]a,\ b]$ n'est pas compact.
- Sur $\mathbb{C}$: Les boules fermées sont des compacts de $\mathbb{C}$. D/ Avec le théorème de Weierstrass
- Sur E : Les singletons, les parties finies de E sont compacts. D/ Avec la définition

On en déduit que :

PROPOSITION : Suites d'éléments d'un compact

- Une suite d'éléments d'un compact convergente admet sa limite dans le compact.
- Les valeurs d'adhérence d'une suite d'éléments d'un compact sont dans le compact.

2. Structure topologique des compacts :

PROPOSITION : Toute partie compacte est fermée et bornée.

Preuve : Avec la caractérisation séquentielle des fermés et en procédant par l'absurde.

Soit K une partie compacte.

- Montrons que K est fermée. On considère une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ convergente vers l. l est alors la seule valeur d'adhérence de (x_n) et comme K est compact alors $l \in K$.
- Supposons que K n'est pas bornée. Alors on construit une suite $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ telle que $\|x_n\| \geq n$. Cette suite ne peut avoir de valeur d'adhérence car tout suite extraite tend vers $+\infty$.

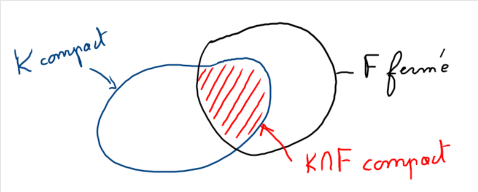
♡ *Nous verrons que la réciproque est vraie en dimension finie...*

Exercice : 1

(♡) Montrer qu'une partie compacte de $\mathbb{R}$ admet un maximum et un minimum.

Proposition :

L'intersection $\left\{\begin{array}{l}\text{d'un compact}\\ \text{d'un fermé}\end{array}\right.$ est compacte.



Preuve : Avec la définition d'un compact.

♡ *Cette proposition donne une première méthode pour démontrer qu'une partie est compacte.*

---

3. Opérations sur les parties compactes :

Proposition :

- INTERSECTION : L'intersection $\left\{\begin{array}{l}\text{FINIE}\\ \text{INFINIE}\end{array}\right.$ de parties compactes est un compact.
- UNION : La réunion FINIE de parties compactes est un compact.
- PRODUIT CARTESIEN : Le produit cartésien d'un nombre fini de compacts est un compact.

Preuve : Pour K_1 et K_2 deux compacts.

- $K_1 \cap K_2$ est compact car c'est l'intersection d'un fermé et d'un compact.
- $K_1 \cup K_2$: Si $(u_n) \in (K_1 \cup K_2)^{\mathbb{N}}$, alors K_1 ou K_2 admet une infinité de termes de la suite...
- $K_1 \times K_2$: Facile à l'aide d'une double extraction.

Cas d'une réunion infinie ?

Une réunion INFINIE de compacts n'est pas forcément un compact.

Contre-exemple : $\mathbb{R}^+ = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [n,\ n+1]$ n'est pas une partie compacte de $\mathbb{R}$.

4. Compacité en dimension finie :

Lemme : Les fermés/bornés de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des compacts.

Preuve : Facile avec la définition d'une partie compacte.

Théorème Fondamental : **Compacité en dimension finie**

Lorsque E est de dimension finie :

$$K \text{ est un compact de } E \iff K \text{ est une partie } \left\{\begin{array}{l}\text{fermée}\\ \text{bornée}\end{array}\right.$$

Preuve : On suppose que E est de dimension finie.

$\subset$ Nous savons qu'un compact de E est un fermé/borné.

$\supset$ Montrons qu'un fermé/borné K est un compact de E.

→ Soit $(u_n) \in K^{\mathbb{N}}$, montrons que (u_n) admet une valeur d'adhérence dans K.

→ Dans une base e les vecteurs u_n sécrivent : $u_n = u_1(n)e_1 + \cdots + u_p(n)e_p$.
(u_n) étant bornée, toutes les suites u_k sont bornées (prendre $\|.\|_{\infty,e}$).
La suite (X_n) : $X_n = (u_1(n), \ldots,\ u_p(n))$ est alors une suite de $\mathcal{B}_f(0,\ R)^p$ qui est un compact.
Il existe donc une suite $(X_{\varphi(n)})$ qui converge vers $l = (l_1,\ \ldots,\ l_p)$.
Par caractérisation de la limite avec les suites coordonnées, $(u_{\varphi(n)})$ converge donc vers $l_1e_1 + \ldots + l_pe_p$.

→ Enfin, comme $(u_{\varphi(n)})$ est une suite de K qui est fermé, alors la limite est également dans K.

Exemples :

- En dimension finie, les boules fermées et les sphères sont compactes.
- $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Preuve :
- C'est un fermé : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ où $f(M) = MM^T$ qui est une fonction continue.
En effet, ses fonctions cordoonnées sont des fonctions polynômiales en les coefficients de M.
- C'est un borné car $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow |m_{i_j}| \leq 1 \Rightarrow \|M\|_1 \leq n^2$.

- $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Preuve : Par intersection d'un compact et d'un fermé.

Exercice : 2

(♡) **Importance de la dimension finie** *(CCINP n° 13)*

On considère $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme 1 : $\|a_0 + a_1X + \ldots a_nX^n\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$

1. Montrer que la sphère unité est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}[X]$.
2. Calculer $\|X^p - X^q\|_1$ pour $p \neq q$.
La sphère unité est-elle une partie compacte de $\mathbb{R}[X]$?

Théorème : **Bolzano-Weierstrass généralisé**
En dimension finie, toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.

Preuve : Une telle suite est contenue dans une boule fermée qui est donc compacte.

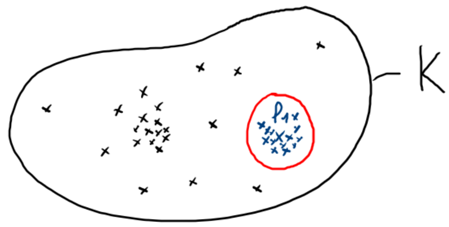
5. Applications des compacts :

Théorème : Convergence d'une suite d'éléments d'un compact

Soit $(x_n) \in K^{\mathbb{N}}$ avec K compact. On a alors :

$$(x_n) \text{ converge} \iff (x_n) \text{ admet une unique valeur d'adhérence.}$$

Dans ce cas, la limite de la suite est sa valeur d'adhérence.



Preuve :

$\Rightarrow$ Immédiat !

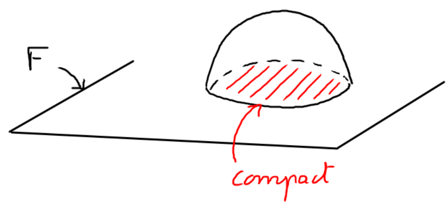
$\Leftarrow$ Par contraposée : Supposons que (x_n) diverge.
Les x_n sont dans K donc (x_n) admet une première valeur d'adhérence l_1.
Comme (x_n) diverge, $(x_n) \not\to l_1$ et il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que...
La suite (x_n) admet donc une infinité de termes en dehors de $\mathcal{B}(l_1,\ \varepsilon)$.
On peut alors extraire une suite $(x_{\varphi(n)})$ dont tous les termes sont en dehors de $\mathcal{B}(l,\ \varepsilon)$.
Les éléments de cette suite sont dans le compact K et elle admet donc une valeur d'adhérence $l_2 \neq l_1$ (par passage à la limite) qui appartient également à K. Contradiction !

Corollaire :
En dimension finie, toute suite bornée ayant une unique valeur d'adhérence converge vers celle-ci.

D/ Immédiat.

Ce théorème est utilisé pour prouver le théorème d'échange de limites pour les suites de fonctions uniformément convergentes.

Corollaire : Fermeture des sev de dimension finie
Tout sev de dimension finie F d'un evn E de dimension quelconque est une partie FERMEE.



Preuve : Soit une suite $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergente vers l. On souhaite montrer que $l \in F$.

- Comme (u_n) converge, elle est bornée (par M) et c'est donc une suite d'éléments de la boule $B_f(0,\ M)$ de F qui est compacte car c'est un fermé/borné en dimension finie.
- (u_n) admet donc une valeur d'adhérence dans $B_f(0,\ M)$ qui est un compact.
  Or une suite convergence admet sa limite pour seule valeur d'adhérence. Donc $l \in B_f(0,\ M) \subset F$.

Nous savions dèjà qu'en dimension finie, tout sev est fermé.
Le théorème précédent généralise donc ce résultat.

3 Continuité et compacité

Les f° continues sur un compact possèdent des propriétés intéressantes :

- Généralisation du théorème des bornes atteintes :

  → L'image continue d'un compact est un compact.
  → Une fonction réelle continue sur un compact est non seulement bornée, mais elle atteint ses bornes.

- Théorème de Heine : Une fonction continue sur un compact est également uniformément continue sur ce compact.

1. Image continue d'un compact : Pour $f : K \subset E \to F$

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Image continue d'un compact** :

L'image d'une partie compacte par une application continue est une partie compacte.

Preuve : Soit $f : K \subset E \to \mathbb{R}$ continue sur K un compact.
Avec la définition, on montre facilement que $f(K)$ est un compact.

COROLLAIRE : **TBA version MPSI**

L'image d'un segment par une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un segment.

Preuve : Les segments sont les parties compactes et connexes par arcs de $\mathbb{R}$.

Rappel : Image directe ou image réciproque

- Lorsque $\Delta = \{f(x) \mid x \in I\}$ alors $\Delta = f(I)$
- Lorsque $\Delta = \{x \in E \mid f(x) \in I\}$ alors $\Delta = f^{-1}(I)$

On reconnaît donc une image directe ou réciproque en exprimant Δ sous l'une de ces 2 formes.

Exercice : 3
(♡) Montrer que l'image de la sphère unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ par $\mathrm{Tr} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est un segment.

Mot Clé : Image continue d'un compact et d'un connexe par arcs

Exercice : 4

(♡) Montrer que si A et B sont des parties compactes de E alors $A + B$ l'est aussi.

Mot Clé : Image continue d'un compact

2. <u>Théorème des bornes atteintes</u> :

THÉORÈME FONDAMENTAL : Théorème des bornes atteintes

Une fonction réelle $f : E \to \mathbb{R}$ continue sur un compact K $\begin{cases} \text{est bornée} \\ \text{atteint ses bornes} \end{cases}$.

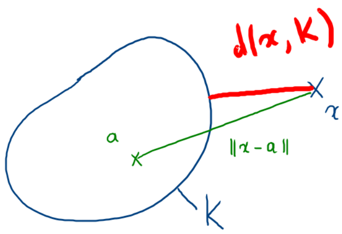
Preuve : Comme f est continue, alors $f(K)$ est un compact et est donc borné. Comme c'est un compact de $\mathbb{R}$, il admet de plus un max et un min.

Exercice : 5

(♡) **Distance à un compact ou à un fermé en dimension finie**

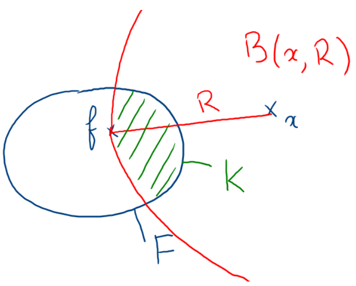
1. Montrer que la distance d'un vecteur à une partie compacte est atteinte.

Preuve : Avec le TBA



2. En déduire qu'en dimension finie, la distance d'un vecteur à un fermé est atteinte.

Preuve : On utilise le fait que l'intersection d'un fermé et d'un compact est compact.



<u>Exemple</u> : La distance d'un point de $\mathbb{R}^2$ à une courbe d'équation $y = f(x)$ est atteinte lorsque f est continue.

Exercice : 6

($*$) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[\|x\| \to +\infty]{} +\infty$ avec E de dimension finie.
Montrer que f admet un minimum global.

Preuve :

Méthode : Pour prouver l'existence d'un MAX (ou d'un MIN) ♡

Pour prouver qu'un ensemble $\Delta = \{f(x) \mid x \in K\} \subset \mathbb{R}$ admet un maximum et/ou un minimum :

- On vérifie que la fonction f est continue sur K
- On vérifie que K est un compact
- On applique le théorème des bornes atteintes

Cas particulier d'une partie de $\mathbb{Z}$: On montre que cette partie est $\begin{cases} \text{non vide} \\ \text{non majorée (ou minorée)} \end{cases}$

PROPOSITION : **Norme subordonnée en dimension finie**

Soit $u \in \mathcal{L}_c(E, F)$.
Lorsque $\dim E < +\infty$, la norme subordonnée $|||u|||$ est atteinte en un vecteur $x \in E$ de norme 1 :

$$\exists x_0 \in S(0,1),\ |||u||| = \|x_0\|_E$$

Preuve : **Mot Clé** : TBA

Exercice : 7

(♡) Montrer que si K est un compact non vide, alors $\delta(K) = \sup_{(x,y)\in K^2} \|x - y\|$ est atteint.

Mot Clé : TBA

Exercice : 8

(♡) Soit K et L deux compacts disjoints d'un $\mathbb{K}$-evn.
Montrer que $d(K,\ L) > 0$.

Mots Clés : TBA généralisé

Exercice : 9

($*$) Soit f une application continue sur $[0,\ 1]$ vérifiant pour tout $x \in [0,\ 1]$: $\frac{1}{4}f(\frac{1-x}{2}) + \frac{1}{4}f(\frac{1+x}{2}) = f(x)$.
Montrer que f est nulle.

Mots Clés : IT + TBA

Exercice : 10

($\heartsuit\heartsuit$) **Equivalence des normes sur $\mathbb{R}^n$**

Soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer N est dominée par $\|.\|_\infty$.
2. On souhaite montrer que $\|.\|_\infty$ est dominée par N.
   Soit l'application : $\varphi : (\mathbb{R}^n,\ \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = N(x)$.
   Nous allons montrer que la restriction de φ à $S(0,1)$ admet un minimum.
   (a) Montrer la continuité de φ.
   (b) Vérifier que la sphère unité $\mathcal{S}$ de $(\mathbb{R}^n,\ \|.\|_\infty)$ est un fermé dans le compact $[-1,\ 1]^n$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que φ admet un minimum sur $\mathcal{S}$.
   (d) En déduire que $\|.\|_\infty$ est dominée par N.
3. En déduire que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes.

Le fait que tout $\mathbb{R}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ est isomorphe à $\mathbb{R}^n$, permet d'en déduire plus généralement qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.

---

3. Continuité uniforme :

Définition : On dit que $f : X \subset E \to F$ est Uniformément Continue (UC) sur X lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in X : \quad \|x - y\|_E \leq \alpha \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$$

Contrairement à la définition de la continuité, le paramètre α est ici indépendant de x et de y.

Propositions :

- Une fonction Uniformément Continue est Continue.
- Une fonction lipschitzienne est Uniformément Continue.

D/ Facile.

Théorème : **Théorème de Heine**
Une fonction continue sur un compact K est Uniformément Continue sur ce compact.

Preuve : **Mots Clés** : Absurde + Discrétisation + Double Extraction.
→ Supposons que f n'est pas Uniformément Continue sur K alors $\exists \varepsilon > 0$...
→ On prend alors $\alpha = \frac{1}{n}$ et on construit deux suites (x_n) et (y_n)...
→ On arrive facilement à une contradiction en prenant $(x_{\varphi(n)})$ convergente...

Corollaire : Toute fonction vectorielle continue sur $[a,\ b]$ est donc uniformément continue.

Exercice : 11

($*$) Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} l \in \mathbb{R}$.
Montrer que f est uniformément continue.

Méthodes : Pour montrer que $f : X \subset E \to F$ est uniformément continue

- Meth 1 : On montre que f est continue et que X est un compact *(Théorème de Heine)*
- Meth 2 : On montre que f est lipschitzienne sur X

Exercice : 12

($*$) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(x) \xrightarrow[\|x\|\to+\infty]{} 0$ avec E de dimension finie.

Montrer que f est uniformément continue.

Preuve :