
Probabilités

Dans un univers au plus dénombrable



Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

4 février 2025

Questions de cours à maîtriser pour les colles :

- Les théorèmes de continuité monotone.
- Définition d'une unique probabilité à l'aide d'une distribution de probabilités discrètes.

En MPSI, le cours de probabilité portait sur des univers finis dans lesquels il était fréquent de considérer équiprobables les événements élémentaires. Cette année, nous généraliserons ce cours en étendant à des univers dénombrables les notions et les formules rencontrées en MPSI.

Table des matières

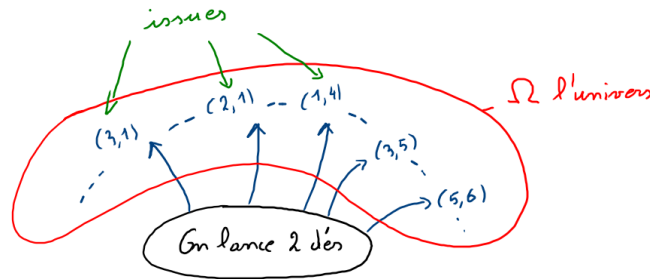
1	Espace probabilisé	1
2	Probabilités	5
3	Probabilités conditionnelles	12
4	Indépendance	15

1 Espace probabilisé

1. Univers Ω : (associé en général à une expérience aléatoire)

DÉFINITION :

- Le résultat d'une expérience aléatoire est appelé une *issue*, un *résultat* ou une *éventualité*.
- L'*univers* Ω associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de toutes les issues possibles.



Exemples :

- On lance une pièce : 1 fois, n fois, indéfiniment...
- On compte le nombre de lancers nécessaires pour obtenir un 6

Remarque : ⚠

L'univers dépend de la perception que l'expérimentateur a de l'expérience aléatoire. La façon dont on le choisit est très importante. Il doit être :

- ni trop petit pour pouvoir décrire les événements qui nous intéressent
- ni trop grand pour ne pas compliquer inutilement les calculs

Souvent, l'univers fera partie des données de l'exercice et celui-ci ne prendra pas la peine de préciser l'expérience aléatoire dont il provient.

2. Tribu.

But : Il s'agit ici de définir les parties de l'univers Ω qui seront considérées comme des événements.

- Lorsque Ω est un univers fini, toutes les parties de Ω sont considérées comme des événements.
- En revanche, lorsqu'il est infini, on limite parfois la notion d'événement à certaines parties de Ω . L'ensemble des événements sera alors appelé une *tribu*.

Notation : Si A est une partie de Ω , on note $\bar{A}$ le complémentaire de A dans Ω .

DÉFINITION : Tribu et événement

- Une *tribu* est un ensemble $\mathcal{A}$ de parties de Ω vérifiant les propriétés suivantes :
 - $\mathcal{A}$ contient Ω
 - $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$
 - $\mathcal{A}$ est stable réunion au plus dénombrable de parties.
- Les éléments d'une tribu sont appelés des *événements*.

Exemples de tribus de Ω :

- $\mathcal{P}(\Omega)$ est une tribu (la plus grande et la plus usuelle)
- $\{\emptyset, \Omega\}$ est une tribu (la plus petite et la moins intéressante)
- $\{\emptyset, A, \bar{A}, \Omega\}$ est une tribu



♡ En pratique, lorsque Ω est $\begin{cases} \text{fini} \\ \text{ou} \\ \text{dénombrable} \end{cases}$, la tribu choisie est habituellement $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

THÉORÈME : Opérations Internes sur les éléments d'une tribu

Dans une tribu $\mathcal{A}$ de Ω :

- Il y a Ω et $\emptyset$
- Pour tout $A, B \in \mathcal{A}$, on a :

$$\rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}, \quad \rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}, \quad \rightarrow B \setminus A \in \mathcal{A}.$$

- $\begin{cases} \text{L'intersection} \\ \text{La réunion} \end{cases}$ au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{A}$ est un élément de $\mathcal{A}$.

♡ On retiendra qu'une tribu est donc stable par $\begin{cases} \cup & (\text{finie ou dénombrable}) \\ \cap & (\text{finie ou dénombrable}) \\ \text{passage au complémentaire} \end{cases}$.



Méthode pour prouver qu'une partie B de Ω est un événement

On peut montrer que :

- B est le contraire d'un événement de $\mathcal{A}$
- B est une réunion au plus dénombrable d'événements de $\mathcal{A}$
- B est une intersection au plus dénombrable d'événements de $\mathcal{A}$

DÉFINITION : Le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est appelé un *espace probabilisable*.

Exemples : $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ et $(\Omega, \{\emptyset, \Omega\})$ sont le plus grand et le plus petit espace probabilisable sur Ω .

3. Événements :

DÉFINITION : Événements

- Dans un espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés des *événements*.
- On dira que l'événement A est réalisé lorsque A contient l'issue $\omega \in \Omega$ de l'expérience aléatoire.



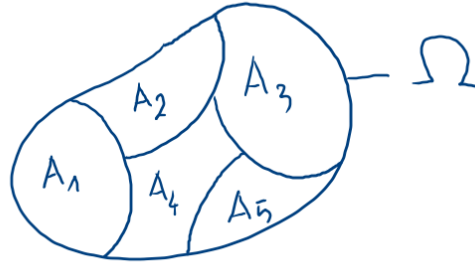
Les singletons ne sont des événements que s'ils appartiennent à la tribu $\mathcal{A}$.

DÉFINITION : Système complet d'événements (SCE)

On dit qu'une famille au plus dénombrable $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ forme un Système Complet d'Événements (SCE) lorsque :

- Les événements A_i sont deux à deux disjoints
- La réunion des événements A_i couvre Ω

On utilise les SCE dans la formule des probabilités totales vue plus loin.



Exemples :

- A et $\bar{A}$ forment un SCE
- $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ forme un SCE lorsque les singletons sont des événements et que Ω est au plus dénombrable.

• Événements particuliers :

$\rightarrow \emptyset$: événement impossible

$\rightarrow \Omega$: événement certain

$\rightarrow \{\omega\}$: événement élémentaire

• Opérations sur les événements :

$\rightarrow A \cap B$: « A et B »

$\rightarrow A \cup B$: « A ou B »

$\rightarrow \bar{A}$: événement contraire

• On dit que :

$\rightarrow$ "l'événement A implique l'événement B " lorsque $A \subset B$

$\rightarrow$ les événements A et B sont "incompatibles" lorsque $A \cap B = \emptyset$.

$\rightarrow$ les événements A et B sont "complémentaires" lorsque $B = \Omega \setminus A$.

PROPOSITION : Événement contraire d'une intersection ou d'une réunion

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable d'événements.

On a alors :

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \bar{A}_i \quad \text{et} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \bar{A}_i$$

D/ Par double inclusion



Exemples d'événements USUELS

Pour $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'événements.

- $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n$ correspond à la réalisation de TOUS les événements A_n

Expl : "Ne jamais obtenir 6" lors de lancers successifs d'un dé.

- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ correspond à la réalisation d'AU MOINS un événements A_n

Expl : "Obtenir au moins un 6" lors de lancers successifs d'un dé.

- $\bigcup_{N=1}^{+\infty} \left(\bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n \right)$ correspond à la réalisation de TOUS les A_n à partir d'un certain rang.

Expl : "N'obtenir que des 6 à partir d'un certain temps" lors de lancers successifs d'un dé.



- $\bigcap_{N=1}^{+\infty} \left(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n \right)$ correspond à la réalisation d'une infinité de A_n .

Expl : "Obtenir une infinité de 6" lors de lancers successifs d'un dé.

2 Probabilités

Nous sommes désormais dans un espace $(\Omega, \mathcal{A})$ probabilisable.

1. Espace probabilisé :

DÉFINITION : Probabilité

On appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$, une application $P : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ vérifiant :

- $P(\Omega) = 1$
- σ -additivité : Pour toute famille au plus dénombrable $(A_i)_{i \in I} \in \mathcal{A}^I$ d'év^{ts} incompatibles 2 à 2 :
 - $\rightarrow (P(A_i))_{i \in I}$ est sommable
 - $\rightarrow P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P(A_i)$



Remarque ♡

Lorsque I est dénombrable, on peut indexer la famille sur $\mathbb{N}$ et la σ -additivité s'exprime alors plus simplement de la façon suivante :

$$\text{Si } (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}} \text{ est une famille d'événements disjoints 2 à 2 alors } \begin{cases} \sum_{n \geq 0} P(A_n) \text{ converge} \\ P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) \end{cases}$$

Deux exemples de probabilités : sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$

- Sur un univers fini Ω , on définit la probabilité uniforme par $P(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.
- En fixant $\omega \in \Omega$, la fonction P définie par $\begin{cases} P(A) = 1 \text{ si } \omega \in A \\ P(A) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

Preuve :

Exercice : 1

(♡) Une application de la σ -additivité

On lance un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Quelle est la probabilité de l'événement "le 6 finira bien par sortir" lorsque les lancers sont considérés indépendants ?



Preuve : On note A_n : "Le 6 est sorti pour la première fois au $n^{\text{ème}}$ lancer".

DÉFINITION : Le triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ est appelé un *espace probabilisé*.

2. Propriétés élémentaires : dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

PROPOSITION : **Propriétés immédiates d'une probabilité**

- $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$
- $P(A) \in [0, 1]$ pour tout $A \in \mathcal{A}$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ lorsque les A_n sont incompatibles 2 à 2.

PROPOSITION : **Propriétés complémentaires d'une probabilité**

Pour deux événements A et B :

- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ et donc $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Plus généralement, on démontre par récurrence la propriété de sous-additivité :

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_p) \leq P(A_1) + \dots + P(A_p)$$

Nous généraliserons plus loin cette majoration.

- $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Remarque : Nous verrons plus loin comment calculer $P(A_1 \cup \dots \cup A_p)$:

- lorsque les événements sont incompatibles deux à deux
- par passage à l'événement contraire, soit avec la formule des probabilités composées, soit dans le cas d'événements indépendants.



Méthode pour encadrer une probabilité

Lorsqu'on ne sait pas calculer la probabilité d'un événement A , on peut en obtenir un encadrement en recherchant deux événements "simples" B et C tels que :

$$B \subset A \subset C$$

On a alors : $P(B) \leq P(A) \leq P(C)$

3. Continuité monotone : dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

(a) Pour la réunion :

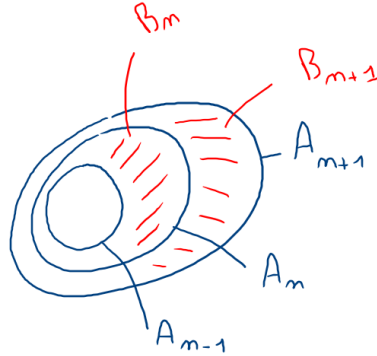
THÉORÈME : **Continuité croissante : REUNION** ($A_n \subset A_{n+1}$)

Si (A_n) est une suite croissante d'événements, alors $P(A_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.



Preuve :

- On remarque que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=0}^{+\infty} B_n$ lorsque $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ et $B_0 = A_0$.
- On a alors par σ -additivité : $P(A_n) = \sum_{k=0}^n P(B_k) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} P(B_k) = P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} B_k) = P(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k)$.



♡ Comme le montre le corollaire suivant, le résultat sera utile lorsqu'on voudra calculer la probabilité d'une réunion dénombrable d'événements.

COROLLAIRE : Pour TOUTE suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements, on a :

$$P\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Preuve : Il suffit de remarquer que $(\bigcup_{k=0}^n A_k)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements.

Ce résultat nous permet de calculer la probabilité de l'événement : "Au moins l'un des A_n se produit"

💡 **Méthode pour calculer la probabilité qu'au moins un événement parmi $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se produise**

Il s'agit de calculer $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n)$ (lorsque les A_n ne sont pas disjoints 2 à 2).

Pour cela :

- On commence par calculer $P(\bigcup_{k=0}^n A_k) = a_n$
- On obtient alors le résultat en déterminant la limite de (a_n) .

PROPOSITION : Pour toute famille d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, lorsque $\sum P(A_n)$ converge nous avons :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Preuve : Simple passage à la limite dans $P(\bigcup_{k=0}^n A_k) \leq \sum_{k=0}^n P(A_k)$.

(b) P our l'intersection :



THÉORÈME : **Continuité décroissante** : INTERSECTION ($A_{n+1} \subset A_n$)

Si (A_n) est une suite décroissante d'événements, alors $P(A_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

Preuve : On introduit $B_n = \bar{A}_n$ qui est alors une suite croissante d'événements.
On applique alors le théorème précédent.

Comme le montre le corollaire suivant, le résultat sera utile lorsqu'on voudra calculer la probabilité d'une intersection dénombrable d'événements.

COROLLAIRE : Pour TOUTE suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'événements, on a :

$$P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$

Preuve : Il suffit de remarquer que $\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'événements.

Ce résultat nous permet de calculer la probabilité de l'événement : "Tous les A_n se produisent"



Méthode pour calculer la probabilité que tous les événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se produisent

Il s'agit de calculer $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

Pour cela :

→ On commence par calculer $P\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right) = a_n$

→ On obtient alors le résultat en déterminant la limite de (a_n) .

Exercice : 2

(♥) On lance indéfiniment un dé équilibré (les lancers sont supposés indépendants).
Montrer que l'événement "on n'obtient jamais 6" est de probabilité nulle.

On introduit A_n : "on n'a pas obtenu de 6 lors des n premiers lancers".
On a $P(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^n \rightarrow 0$.

Exercice : 3

(♥) On dispose d'urnes $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Dans chaque urne U_n se trouvent n boules blanches et une boule rouge.
On tire une boule successivement dans chaque urne, les tirages étant indépendants.
Quelle est la probabilité de n'obtenir que des boules blanches ?

On montre que cet événement est négligeable.



Méthode pour calculer la probabilité qu'une infinité d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se produisent

Il s'agit de calculer $P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p\right)\right)$.

Pour cela :



→ On commence par remarquer que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $B_n = \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p$, est décroissante.

On a alors :
$$P(B_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} B_n\right) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} \left(\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p\right)\right).$$

→ On calcule alors $P\left(\bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p\right)$ à l'aide du théorème de continuité croissante

Exemple : Voir la partie suivante.

Question : Comment calculer la probabilité que tous les A_n se produisent à partir d'un certain rang ?

Preuve :

Méthode :

On pensera à utiliser les théorèmes de continuité monotone lorsque l'événement dont on cherche la probabilité porte sur une infinité d'expériences aléatoires. Ils permettent de se ramener à un nombre fini d'expériences puis d'obtenir le résultat voulu par un simple passage à la limite.

4. Événements négligeable et presque sûr : Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

DÉFINITION : On dit qu'un événement $A \in \mathcal{A}$ est *négligeable* lorsque $P(A) = 0$.

Exemples :

- $A = \emptyset$
- "Ne jamais obtenir 6" lors d'une succession de lancers d'un dé.

PROPOSITION : Opérations

- Un événement inclus dans un événement négligeable est négligeable.
- Une réunion finie ou dénombrable d'événements négligeables est négligeable.

Preuve :

- Facile.
- On remarque que $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots$

Exercice 4

(♡♡) On considère $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements telle que $\sum_{n \geq 0} P(A_n)$ converge.

Montrer que la probabilité qu'une infinité d'événements A_n se produisent est nulle.

Preuve : (B_n) définie par $B_n = \bigcup_{p=n}^{+\infty} A_p$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{est une suite décroissante d'événements} \\ \text{vérifie } P(B_n) \leq \sum_{p=n}^{+\infty} P(A_p) \rightarrow 0 \end{array} \right.$



DÉFINITION : On dit qu'un événement $A \in \mathcal{A}$ est *presque sûr* lorsque $P(A) = 1$.

Exemples :

- Ω
- "Obtenir au moins un six" lors d'une infinité de lancers

PROPOSITION : Opérations

- Un événement contenant un événement presque sûr est presque sûr.
- Une intersection finie ou dénombrable d'événements presque sûrs est presque sûr.

Preuve : Par passage au complémentaire...



Méthodes

- Pour prouver que A est négligeable, on recherche $B \in \mathcal{A}$ tel que $\begin{cases} A \subset B \\ P(B) = 0 \end{cases}$
- Pour prouver que A est presque sûr, on recherche $B \in \mathcal{A}$ tel que $\begin{cases} B \subset A \\ P(B) = 1 \end{cases}$

DÉFINITION : Système Quasi-Complet d'Événements

On dit qu'une famille d'événements $(A_i)_{i \in I}$ est une *système quasi-complet d'événements* lorsque :

- Les événements A_i sont deux à deux disjoints
- La réunion des événements A_i forme un événement presque sûr : $P\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = 1$

5. Construction d'une probabilité sur un univers au plus dénombrable :

On considère ici un univers Ω fini ou dénombrable.

Dans ce cas, il est usuel de munir cet univers Ω de la tribu maximale $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, ce que l'on fait ici.

DÉFINITION : Soit P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.

On appelle *probabilités élémentaires*, les valeurs $P(\{\omega\})$ où $\omega \in \Omega$.

PROPOSITION : La famille $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$ est une famille de réels $\begin{cases} \text{positifs} \\ \text{sommable} \\ \text{de somme 1} \end{cases}$.

Preuve : Par définition d'une probabilité.

On considère la famille dénombrable d'événements 2 à 2 disjoints $(\{\omega_n\})_{n \in \mathbb{N}}$ dont la réunion vaut Ω .

DÉFINITION : Distribution de probabilités discrète

Soit Ω un univers au plus dénombrable.

On dit que $(p_\omega)_{\omega \in \Omega} \in \mathbb{R}^\Omega$ est une *distribution de probabilités discrètes* sur Ω , lorsque :

- les valeurs p_ω sont toutes positives
- la famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est sommable de somme 1

Exemples : Sont des distributions de probabilités discrètes :



- la famille $(\frac{1}{n})_{k \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ sur $\Omega = \llbracket 1, n \rrbracket$
- la famille $(e^{-2} \frac{2^n}{n!})_{n \in \mathbb{N}}$ sur $\Omega = \mathbb{N}$



Extension à un univers infini non dénombrable

- Le *support* d'une famille $(x_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est l'ensemble $J = \{i \in \Omega \mid x_i \neq 0\}$.
- Lorsque Ω est infini et non dénombrable.
On dit que $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une *distribution de probabilités discrètes sur Ω* , lorsque :
 - les valeurs p_ω sont toutes positives
 - le support de la famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est au plus dénombrable
 - la famille $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est sommable de somme 1

Exemple : $(p_x)_{x \in \mathbb{R}}$ définie par $\begin{cases} p_x = 0 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^* \\ p_x = \frac{1}{2^x} & \text{si } x \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.

THÉORÈME FONDAMENTAL : Construction d'une probabilité

La donnée d'une distribution de probabilités discrètes $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ définit une unique probabilité P telle que pour tout $\omega \in \Omega$ $P(\{\omega\}) = p_\omega$.

Cette probabilité a alors pour expression : $P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega \quad \forall A \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Preuve :

- Analyse : OK
- Synthèse : On vérifie que l'application trouvée est bien une probabilité.
En particulier, une sommation par paquets prouve que, lorsque les A_n sont disjoints 2 à 2 :

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$$

Exemples IMPORTANTS :

- Univers fini :

Sur $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$: $p_k = \frac{1}{n}$

Sur $\Omega = \{\omega_0, \dots, \omega_n\}$: $p_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

- Univers infini :

Sur $\Omega = \mathbb{N}$: $p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Sur $\Omega = \mathbb{N}^*$: $p_k = p(1-p)^{k-1}$

Remarquons que dans le cas d'un univers infini, l'équiprobabilité est IMPOSSIBLE.

Exercice : 5

(*) Trouver $a > 0$ tel qu'en posant $P(\{n\}) = \frac{1}{a^{n+1}}$ on définit une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
Calculer alors la probabilité de l'événement $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 10\}$.



Exercice : 6

(*) On tire au hasard un nombre entier naturel non nul n avec la probabilité $p_n = \frac{1}{n(n+1)}$.
Vérifier que l'on définit bien ainsi une probabilité sur $(\mathbb{N}^*, \mathcal{P}(\mathbb{N}^*))$.
Quelle est la probabilité d'obtenir un entier supérieur ou égal à un entier $N > 0$?

3 Probabilités conditionnelles

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. Probabilités conditionnelles :

DÉFINITION : Probabilité conditionnelle

Soit $B \in \mathcal{A}$.

On définit alors la probabilité P_B par :

- Lorsque $P(B) \neq 0$: $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \forall A \in \mathcal{A}.$
- Lorsque $P(B) = 0$: $P_B(A) = P(A) \quad \forall A \in \mathcal{A}.$

Proposition :

- P_B définit une probabilité sur Ω appelée la *probabilité conditionnelle* à B .
- P_B vérifie toutes les propriétés usuelles des probabilités vues précédemment.

2. Formule des probabilités composées :

Rappel : $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)$

Cette formule se généralise de la façon suivante :

THÉORÈME : Probabilités composées

$$P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2) \dots P_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

Preuve : Par récurrence en remarquant que $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P((A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) \cap A_n) = \dots$



Méthodes

- Pour calculer $P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$:
 - Si les événements sont indépendants : $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \dots P(A_n)$
 - Sinon, on utilise la forme des probabilités composées



- Pour calculer $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$:

→ Si les événements sont disjoints : $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n)$

→ Sinon, on se ramène à la situation précédente en calculant la probabilité de l'événement contraire :

$$P(\overline{A_1 \cup \dots \cup A_n}) = P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n)$$

Exercice : 7

(*) Une urne contient une boule blanche et une rouge.

A chaque fois qu'on tire une boule on la remet avec une autre boule de la même couleur.

Montrer qu'il est presque sûr que la boule rouge sera tirée.

Preuve : On calcule la probabilité de l'événement contraire.

A_k : on tire une boule blanche au k ème tirage.

On trouve facilement $P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)$ et donc $P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$.

On montre ainsi que $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ et donc que $P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n) = 0$.

Exercice : 8

(*) Une urne contient n boules blanches et n noires. On tire successivement et sans remise n boules.

Calculer la probabilité pour qu'une boule noire figure dans ce tirage.

Preuve : On calcule la probabilité de l'événement contraire.

A_k : la boule tirée au k ème tirage est blanche.

On détermine facilement $P_{A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}}(A_k)$ et donc $P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$.

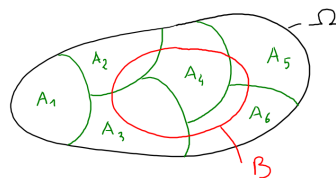
La probabilité qu'une boule noire figure dans la liste est alors $1 - \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

3. Formule des probabilités totales :

THÉORÈME : Formule des probabilités totales

Lorsque $(A_i)_{i \in I}$ est un Système Complet ou Quasi-Complet d'événements et $B \in \mathcal{A}$, on a :

$$P(B) = \sum_{i \in I} P_{A_i}(B) \cdot P(A_i)$$



Preuve :

- Dans le cas d'un SCE : $B = \bigcup_{i \in I} (B \cap A_i)$ qui est une réunion d'événements 2 à 2 incompatibles.

- Dans le cas d'un SQCE, on utilise les proba totales avec le SCE $\{\Omega \setminus (\bigcup_{i \in I} A_i), (\bigcup_{i \in I} A_i)\}$.

♡ On utilisera cette formule lorsque la probabilité recherchée est connue dans chacune des situations particulières $A_1, \dots, A_n$ qui forment un système complet d'événements ♡



Exercice : 9

(*) **Cas d'un SCE** : On a 6 urnes numérotées de 1 à 6.

Dans l'urne k , on trouve k boules blanches et 1 rouge.

Le joueur lance un dé équilibré et choisit l'urne correspondant au numéro.

Quelle est la probabilité que la boule soit blanche ?

On trouve $P = \frac{617}{840}$.

Exercice : 10

(*) **Cas d'un SQCE** : Une urne contient une boule rouge. le joueur lance un dé.

S'il obtient 6 il tire une boule dans l'urne, sinon il rajoute une boule blanche et il recommence.

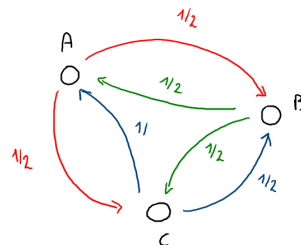
On pourra admettre que l'événement « obtenir un 6 au bout d'un nombre fini de lancers » est presque sûr.

Quelle est la probabilité que la boule tirée soit rouge ?

Preuve : On note A_n : "le joueur fait son premier 6 au n ème lancer" et B : "la boule tirée est rouge".
La famille (A_n) est alors un Système Quasi-Complet d'Événements (facile).
Après quelques calculs, on trouve $P(A_n) = \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$, $P_{A_n}(B) = \frac{1}{n}$ puis $P(B) = \frac{\ln 6}{5}$.

Exercice : 11

(*) **Chaîne de Markov CCINP101.**



Un animal erre entre 3 points A , B et C .

Au moment $t = 0$ il se trouve en A .

A chaque $t = n \in \mathbb{N}^*$ il y a équiprobabilité qu'il se retrouve en l'un des deux autres points.

On note A_n , B_n et C_n les événements "l'animal se retrouve en A , B et C au temps $t = n$ ".

On pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Exprimer matriciellement les relations entre a_{n+1} , b_{n+1} , c_{n+1} et a_n , b_n , c_n .
2. Montrer que la matrice A obtenue est diagonalisable.
3. Diagonaliser A et expliquer comment obtenir a_n , b_n et c_n en fonction de n .

Voir l'exercice 107 de la banque CCP.



4. Formule de Bayes :

THÉORÈME : Formule de Probabilité des causes

Pour $A, B \in \mathcal{A}$ de probabilité non nulle, on a :

$$P_B(A) = \frac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$$

Si A se produit avant B , cette formule permet de déterminer la probabilité de A sachant que l'événement B s'est produit.

COROLLAIRE : Avec un SCE ou un SQCE

Lorsque $(A_n)_{n \in I}$ un Système (Quasi-)Complet d'Événements, la formule nous donne :

$$P_B(A_n) = \frac{P_{A_n}(B)P(A_n)}{\sum_{k \in I} P_{A_k}(B)P(A_k)}$$

Exercice : 12

(*) Une urne contient 2 dés, l'un est équilibré, l'autre donne systématiquement 6.

On choisit un dé au hasard (les choix étant équiprobables), on le lance et on obtient un 6.

Quelle est la proba que l'on ait lancé le dé équilibré ?

On trouve $\frac{1}{7}$.

Exercice : 13

(*) Une maladie frappe environ 1 % de la population.

Un laboratoire pharmaceutique propose un test de dépistage d'une fiabilité de 95 %.

Quelle donnée nous manque-t-il pour connaître la probabilité qu'une personne détectée positive soit effectivement malade ?

Comment peut-on obtenir expérimentalement cette donnée ?

Voir l'exercice 105 de la banque CCP.

4 Indépendance

Dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. Couple d'événements indépendants :



DÉFINITION : On dit que 2 événements $A, B \in \mathcal{A}$ sont indépendants lorsque :

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

- L'indépendance de deux événements est une notion probabiliste dans le sens où elle dépend de la probabilité choisie. ⚠ Elle peut dans certain cas être contre-intuitive.
- Ne pas confondre cette notion avec la notion d'incompatibilité qui est une notion ensembliste et qui est, quant à elle, indépendante de la probabilité choisie et beaucoup plus intuitive.

Interprétation : lorsque $P(A)$ et $P(B)$ sont non nuls, cela revient à dire que la probabilité de l'un des événements ne dépend pas du fait que l'autre événement se soit ou non produit : $P_B(A) = P(A)$ et $P_A(B) = P(B)$.

Exercice : 14

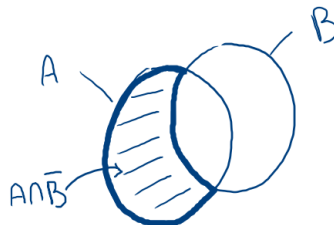
On tire 2 boules indiscernables dans une urne contenant 5 blanches et 2 rouges.

On note A "la première boule est blanche" et B "la seconde est rouge".

1. Montrer que A et B ne sont pas indépendants lorsque le tirage se fait successivement et sans remise.
2. Montrer que A et B sont indépendants lorsque le tirage se fait avec remise.

PROPOSITION : Si A et B sont indépendants alors $\begin{cases} A \text{ et } \bar{B} \\ \bar{A} \text{ et } B \\ \bar{A} \text{ et } \bar{B} \end{cases}$ le sont aussi.

Preuve : $P(A \cap \bar{B}) = P(A \setminus (A \cap B)) = P(A) - P(A \cap B) = \dots$



Exercice : 15

⚠ à ne pas raconter de bêtise!

On lance un dé tétraédrique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 4.

On considère les événements :

- A : "Obtenir 1 ou 2"
- B : "Obtenir 1 ou 3"
- C : "Obtenir 2 ou 3"

Montrer que A , B et C sont indépendants deux à deux, mais que A et $B \cap C$ ne sont pas indépendants.

2. Famille d'événements (mutuellement) indépendants :


DÉFINITION : Événements (mutuellement) indépendants

Les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont dits *(mutuellement) indépendants* lorsque :

$$\text{Pour tout ensemble fini } J \subset I, \text{ on a : } P\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} P(A_j).$$

Dans le cas d'événements indépendants, la formulation des probabilités composées est alors nettement simplifiée.


Cas usuels d'indépendance

- Lorsqu'on répète plusieurs fois une même expérience aléatoire, des événements liés à des occurrences différentes de l'expérience sont usuellement considérées indépendants.

Expl : On lance indéfiniment une pièce. A_i : "on obtient face lors du i ème lancer".

Les événements A_i sont en général modélisés comme étant indépendants.

Ainsi, si la probabilité d'obtenir face vaut p , la probabilité d'obtenir face pour la première fois au n ème lancer vaut $p(1-p)^{n-1}$.

- Lorsqu'on effectue des expériences distinctes sans interaction entre elles, les événements liés à ces expériences sont usuellement considérés indépendants.

Expl : On lance un dé, puis on tire une boule dans une urne, puis on lance une fléchette.

Les événements "Obtenir un nombre pair", "tirer une boule rouge" et "tirer au centre de la cible" sont indépendants.


L'indépendance 2 à 2 ne prouve pas l'indépendance !

Contre-Exemple : On lance deux dés et on définit les événements :

- A : "le premier dé donne un résultat pair",
- B : "le second donne un résultat pair",
- C : "la somme des deux dés est paire".

Les événements sont deux à deux indépendants mais pas indépendants.


PROPOSITION :

- Si les A_i sont indépendants, alors toute sous-famille l'est aussi.
- Si les A_i sont indépendants, alors les B_i le sont aussi lorsque $B_i = A_i$ ou $\bar{A}_i$.

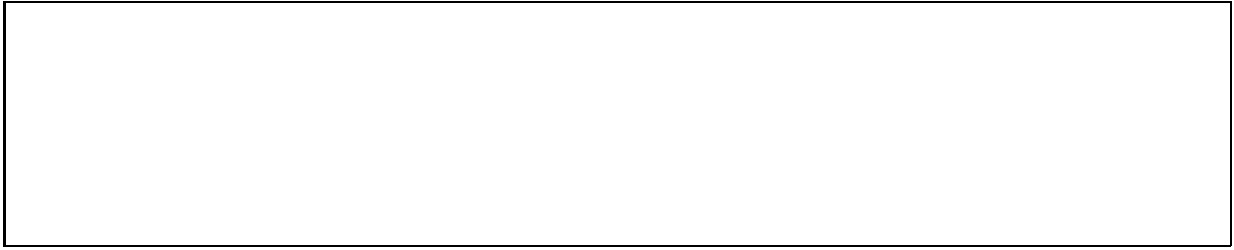
Exercice : 16

(♥) Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers et pour $s > 1$ on définit : $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

1. Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$, la famille $(\lambda n^{-s})_{n \in \mathbb{N}^*}$ définit-elle une loi de probabilité sur $\mathbb{N}^*$?

2. Pour tout p premier, on pose $A_p = p\mathbb{N}^*$.

Montrer que $(A_p)_{p \in \mathcal{P}}$ est une famille d'événements indépendants pour la probabilité précédente.



Exercice : 17

(*) Deux joueurs, Félix et Claire lancent successivement deux dés équilibrés.

Félix joue le premier et le jeu s'arrête dès que Félix obtient une somme égale à 6 ou que Claire obtient une somme égale à 7. Lequel d'entre eux a le plus de chance de l'emporter ?

Preuve : On calcule la probabilité de C : "Claire l'emporte" en remarquant que

$$C = \bigcup_{n=1}^{+\infty} C_n \text{ où } C_n : \text{"Claire l'emporte au } n^{\text{ième}} \text{ lancer"}$$

Or, on montre facilement que $P(C_n) = \frac{31}{216}\alpha^{n-1}$ avec $\alpha = \frac{155}{216}$.

Exercice : 18

(*) On lance un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

Quelle est la probabilité pour que tous les nombres obtenus soient pairs ?

Preuve : On considère l'événement A_n : "on obtient que 2 ou 4 puis un 6 au $n^{\text{ième}}$ lancer".

On recherche alors la probabilité de la réunion de ces événements. On trouve $\frac{1}{4}$.

On peut vérifier ce résultat à l'aide du programme suivant...

Python

```
from random import randint

def exp(N) :
    succes = 0                                # Nombre de succès obtenus (initiali°)
    for k in range(1,N+1):                    # On réalise N expériences
        lancer = randint(1,6)                  # Premier lancer
        while lancer in [2,4] and lancer != 6 : # On continue tant que l'expérience
                                                    peut déboucher sur un succes
            lancer = randint(1,6)                # Nouveau lancer du dé
        if lancer == 6 : succes = succes + 1    # L'expérience est un succes lorsque
                                                    le dernier lancer est un 6
    return succes/N                            # On renvoie le pourcentage de succès
                                                    obtenus
```



Méthode pour identifier une démarche de raisonnement

Les exercices de probabilité demandent souvent de prouver des relations algébriques.

Ces relations provenant en général de l'application des formules usuelles de probabilités, on peut, en examinant leur forme, prédire la formule à utiliser. Il reste alors à choisir correctement les événements à prendre en compte dans cette formule. Ainsi :

- Une expression de la forme $1 - a$ s'obtient avec la formule $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- Une relation de la forme $c = a + b$ s'obtient avec $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ où A et B sont incompatibles
- Une relation de la forme $c = \lambda a + \mu b$ s'obtient avec la formule des probabilités totales
- Une relation de la forme $c = a \times b$ s'obtient avec la formule $P(A \cap B) = P(A).P(B)$ avec A et B indépendants