# Variables Aléatoires Discrètes

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

30 janvier 2025

Dans tout ce chapitre, on se place dans $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé avec $\Omega$ au plus dénombrable.

## Table des matières

**1 Variables Aléatoires (VA) Discrètes** **1**

**2 Couple de variables aléatoires discrètes** **10**

**3 Indépendance de variables aléatoires** **12**

**4 Espérance** **15**

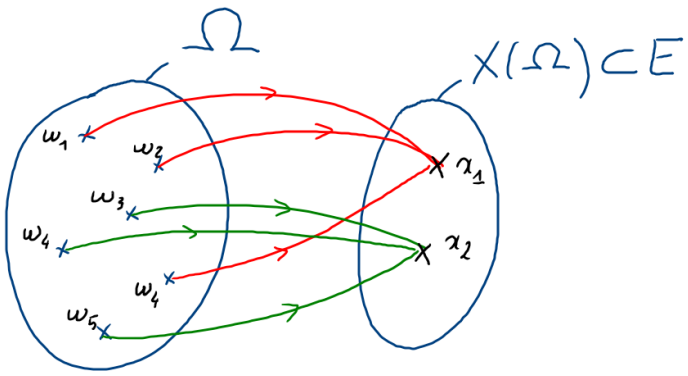
**5 Variance d'une variable aléatoire réelle** **21**

**6 Fonctions génératrices d'une VA naturelle** **26**

*Voir les exercices de la banque CCINP de niveau MPSI* : 95, 98, 104, 105, 107 et 109

## 1 Variables Aléatoires (VA) Discrètes

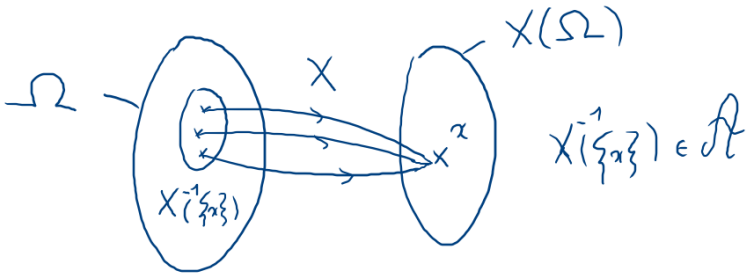
1. Définition :



DÉFINITION : **Variable aléatoire**

Une VA discrète définie sur $\Omega$ et à valeurs dans $E$ est une application $X : \Omega \to E$ telle que :

- $X(\Omega)$ est au plus dénombrable ($X(\Omega)$ est appelé *l'univers de la VA*)
- Pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\}) \in \mathcal{A}$.
  Cela signifie que les événements élémentaires de $X(\Omega)$ sont des événements de $(\Omega, \mathcal{A})$.




Remarques :

- ⚠ Une VA n'est ni une variable (car c'est une fonction) ni aléatoire (car parfaitement déterminée) !
  C'est la valeur $\omega \in \Omega$ et donc celle de $X(\omega) = x \in X(\Omega)$ qui n'est connue qu'après réalisation de l'EA.
- ♡ Une VA correspond à une façon particulière de regarder les résultats d'une EA.
- Lorsque la tribu est $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, la deuxième condition est automatiquement vérifiée.

Exemples :

- On lance deux dés et on s'intéresse :
  → à $S$ la somme des deux valeurs obtenues
  → à $P$ le produit des deux valeurs obtenues
  → à $M$ le maximum des deux valeurs obtenues

- On tire avec remise $n$ boules dans une urne contenant des blanches et des rouges en proportion $p$ et $q = 1 - p$.
  On peut s'intéresser :
  → à $Nb$ le nombre de boules blanches obtenues lors d'un tirage est une VA discrète.
  → à $X$ qui prend les valeurs $-1$, 0 et 1 et indique quelle couleur apparaît le plus souvent dans le tirage

- On lance indéfiniment un dé et on peut s'intéresser :
  - à $X_n$ la valeur obtenue au nième lancer ($(X_n)$ est alors une suite de VA discrètes.)
  - à $R$ le rang d'apparition du premier 6
  - à $S$ qui détermine si la suite 1-2-3-4-5-6 apparaît

Vocabulaire : Une variable aléatoire $X$ $\begin{cases} \text{d'univers } X(\Omega) = \{0,\ 1\} \text{ est appelée une } \textit{variable de Bernoulli} \\ \text{d'univers } X(\Omega) \subset \mathbb{R} \text{ est appelée une } \textit{variable aléatoire réelle} \\ \text{d'univers } X(\Omega) \subset \mathbb{N} \text{ est appelée une } \textit{variable aléatoire naturelle} \end{cases}$.

DÉFINITION : **Variable indicatrice d'un événement**

Sur $(\Omega, \mathcal{A})$.
On définit la VA indicatrice de l'événement $A \in \mathcal{A}$ par : $\mathbf{1}_A : \begin{cases} \mathbf{1}_A(\omega) = 1 & \text{lorsque } \omega \in A \\ \mathbf{1}_A(\omega) = 0 & \text{lorsque } \omega \in \overline{A} \end{cases}$.

$\mathbf{1}_A$ *est une variable de Bernoulli.*

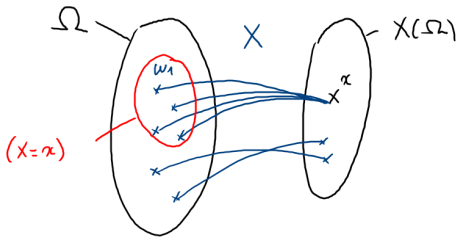
2. Evénements usuels liés à une VA : Dans $(\Omega, \mathcal{A})$

**Définition : Evénements élémentaires de la variable aléatoire $X$**

Il s'agit pour tout $x \in X(\Omega)$ de l'événement $X^{-1}(\{x\})$ noté :

$$(X = x) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

L'événement $(X = x)$ est également parfois noté $\{X = x\}$.

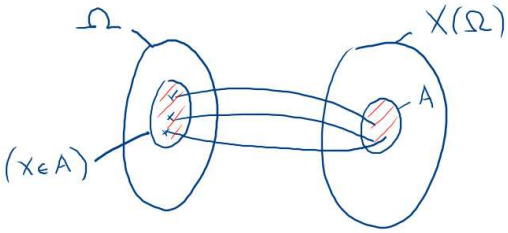



Exemple : On lance deux dés et on considère $X$ la somme des valeurs obtenues :

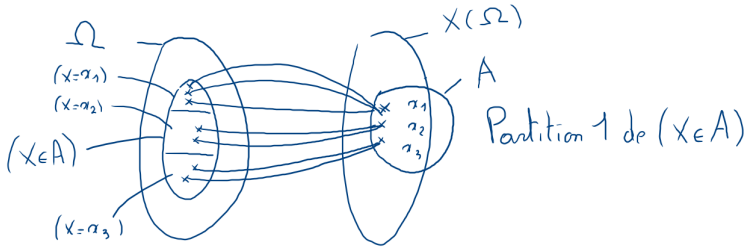
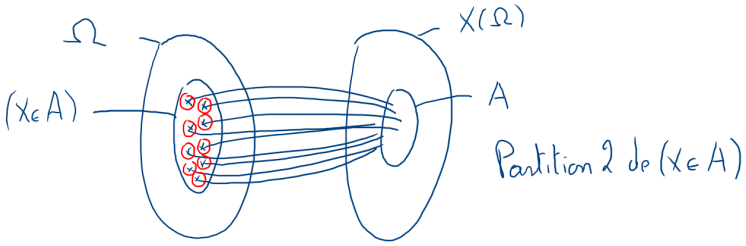
$$(X = 5) = \{(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ \ldots\}$$

**Définition : Evénement quelconque lié à la variable $X$**

Pour tout $A \subset E$, on note $(X \in A)$ l'événement : $(X \in A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\} = X^{-1}(A)$




L'événement $(X \in A)$ peut se décomposer selon deux partitions "élémentaires" :

| | |
|---|---|
| $(X \in A) = \bigcup_{x \in X(\Omega) \cap A} (X = x)$ | Décomposition en événements élémentaires associés à $X$   |
| $(X \in A) = \bigcup_{\omega \in X^{-1}(A)} \{\omega\}$ | Décomposition en événements élémentaires de $\Omega$ (plus fine !)   |

**Rappel : Reformulation d'un événement**

Pour reformuler un événement $A$, on raisonne par équivalences successives.
Soit $\omega \in \Omega$, on a :

$$\omega \in A \iff \cdots \iff \omega \in B \quad \text{et donc} \quad A = B$$

*Plus rapidement, on s'autorise souvent à écrire :* $A = \cdots = B$.

PROPOSITION : **Compatibilité avec les opérations ensemblistes**

- $(X \in A \cap B) = (X \in A) \cap (X \in B)$
- $(X \in A \cup B) = (X \in A) \cup (X \in B)$
- $(X \in \bar{A}) = \overline{(X \in A)}$.

*Preuve :* En utilisant la méthode de reformulation évoquée précédemment.

DÉFINITION : Lorsque $E = \mathbb{R}$, on note : $(X \leq a) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq a\} = X^{-1}(]-\infty,\ a])$.

De même pour $(X < a)$, $(X \geq a)$ ...

Exemples : Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires naturelles.

Déterminer une partition en événements élémentaires des événements : $\begin{cases} (X = Y) \\ (X > n_0) \end{cases}$

---

3. Loi d'une variable aléatoire discrète : Dans $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$

Soit $X : \Omega \to E$ discrète d'univers probabilisable $(X(\Omega),\ \mathcal{P}(X(\Omega))$ associé.

DÉFINITION : La loi de probabilité de la variable aléatoire $X$ est l'application :

$$P_X : \mathcal{P}(X(\Omega)) \to [0,\ 1] \quad \text{définie par} \quad P_X(A) = P(X \in A)$$

On vérifie que $P_X$ définit bien une probabilité sur l'espace probabilisable $(X(\Omega),\ \mathcal{P}(X(\Omega)))$.

Exemple : $S$ la somme des faces obtenues lors du lancer de deux dés.

THÉORÈME : **Construction de la loi d'une VA**

La loi $P_X$ sur $X(\Omega)$ est parfaitement déterminée par la distribution de probabilités discrète $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

*En pratique, on présente la loi de $X$ en donnant uniquement les valeurs $p_x = P(X = x)$.*

**Attention**

La connaissance de la loi $P_X$ ne permet pas de déterminer $X$ : $P_X = P_Y \not\Rightarrow X = Y$.

C/expl : On lance une pièce équilibrée et on définit $X$ et $Y$ par $\begin{cases} X = 1 \text{ si on a face et 0 sinon} \\ Y = 0 \text{ si on a face et 1 sinon} \end{cases}$.
On a alors $P_X = P_Y$ et pourtant $X \neq Y$.

Notation :

- Si $P_X = P_Y$, on notera $X \sim Y$ et on dira alors que « $X$ suit la loi de $Y$ ».
- Si $X$ suit une loi de probabilité $\mathcal{L}$, on notera $X \hookrightarrow \mathcal{L}$ ou parfois $X \sim \mathcal{L}$.

**Méthode : Déterminer la loi de $X$ signifie**

- Déterminer l'univers $X(\Omega)$
- Calculer $P(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$

DÉFINITION : **Loi conditionnelle sachant un événement**

Soit $X$ une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et $A$ un événement de $\mathcal{A}$.

On appelle *loi conditionnelle de $X$ sachant $A$* la loi définie par la distribution de probabilités discrète $(P_A(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

4. Lois FINIES usuelles (MPSI) : $X$ est une VA sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ fini.

Voici 2 fonctions python à connaître impérativement pour les simulations probabilistes :

Python
```
from random import randint    # randint(a,b) renvoie un entier entre a et b
from random import random     # random() renvoie un flottant entre 0 et 1
```

*Les valeurs renvoyées par ces fonctions sont équiprobables.*

- Loi uniforme :

DÉFINITION : **Loi uniforme**
On dit que $X$, telle que $\text{Card}(X(\Omega)) = n$, suit une loi uniforme lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$ :

$$P(X = x) = \frac{1}{n}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$ la loi uniforme sur $\llbracket a, b \rrbracket$ et $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ celle sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Exemple : On lance un dé équilibré. $X$ donnant valeur obtenue vérifie : $X \hookrightarrow \mathcal{U}(6)$.

Modélisation : On utilise une loi uniforme lorsque les valeurs prises par $X$ sont jugées équiprobables.

Python
```
def Unif(a,b) :                    # Loi uniforme sur l'ensemble [|a,b|]
    return randint(a,b)
```

Python
```
L = [3,8,13,26,55]

def Unif(L) :                      # Loi uniforme sur l'ensemble L
    n = len(L)
    k = randint(0,n-1)             # Choix équiprobable de l'indice
    return L[k]

# Ou bien :

choice(L)                          # Dans la bibliothèque random
```

- Loi de Bernoulli :

DÉFINITION : **Loi de Bernoulli**
On dit que $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,\ 1]$ lorsque :

$$X(\Omega) = \{0,\ 1\} \quad \text{et} \quad P(X = 1) = p$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ cette loi.

Exemples :

- On tire une boule dans une urne qui contient des boules blanches et des boules rouges en proportion $p$ et $q = 1-p$. $X$ prend la valeur 1 si la boule est blanche et 0 sinon. On a $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$.
- La variable $\mathbf{1}_A$ indicatrice d'un événement $A$ est une variable de Bernoulli de paramètre $P(A)$

Modélisation : On utilise ces variables pour modéliser les expériences à deux issues : succès et échec.

Python
```
def Bernoulli(p) :              # Loi de Bernoulli de paramètre p
    if random() < p : return 1
    else :            return 0
```

- Loi binômiale :

DÉFINITION : **Loi binomiale**
On dit que $X$ suit une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$ lorsque :

$$X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

On note $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\ p)$.

Exemple : une urne contient des boules blanches et des boules rouges en proportion $p$ et $q = 1 - p$.
On tire $n$ fois, successivement et avec remise, une boule.
$X$ le nombre de fois où on a tiré une boule blanche : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\ p)$.

Modélisation : ce type de loi se retrouve lorsqu'on effectue, de façon indépendante, $n$ fois une même expérience aléatoire à deux issus et qu'on s'intéresse au nombre de succès (ou d'échecs). Par exemple dans le cas d'un tirage avec remise ou de lancers répétitifs d'un dé.

PROPOSITION : **Modélisation usuelle d'une loi binomiale**

Soit $(X_1,\ \ldots,\ X_n)$ des VA indépendantes vérifiant la même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,\ 1]$.
La variable aléatoire $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ vérifie alors une loi binomiale de paramètre $n$ et $p$.

*Preuve :* Par récurrence.

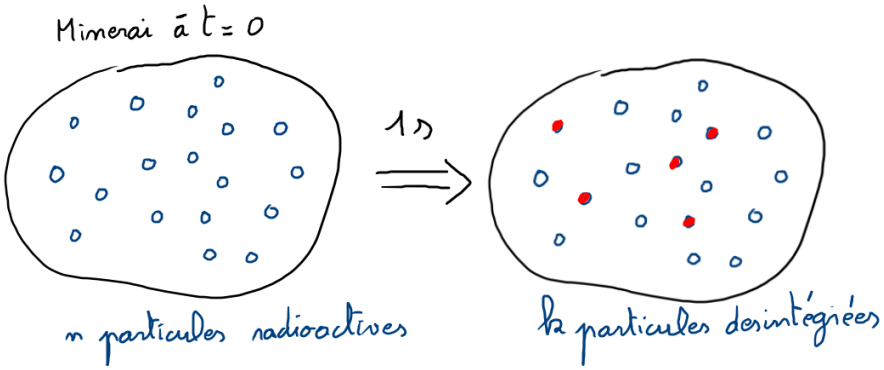
Pour la programmation Python, on utilise le modème précédent.

Python
```
def Binom(n,p):                     # Loi binomiale de paramètres n et p
    c = 0                           # Initialisation du compteur de succès
    for k in range(1,n+1) :         # On effectue n expériences de bernoulli
        if random() < p : c = c + 1 # On compte les succès
    return c
```

5. Lois INFINIES usuelles (MP) : $X$ est une VA discrète sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$

- Loi de Poisson :

  Exemple : Atomes radioactifs dans la matière.




Dans une certaine quantité de matière on trouve $n \gg 1$ atomes radioactifs qui ont la probabilité $p$ très faible de se désintégrer durant un laps de temps $T$, sachant qu'en moyenne on a $\lambda$ désintégrations durant ce laps de temps. En supposant l'indépendance des désintégrations atomiques, il serait rigoureux de modéliser la nombre de désintégrations atomiques par une variable $X$ suivant une loi binômiale $n$, $p$ et dans ce cas $np = \lambda$. Seulement une telle modélisation rendrait les calculs difficiles et, comme le montre le théorème suivant, on préfère approximer cette loi par une loi de poisson de paramètre $\lambda$.

THÉORÈME : **La loi de Poisson est la limite d'une loi binomiale**

Soit $X_n$ une VA telle que $\begin{cases} X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_n) \\ p_n \sim \frac{\lambda}{n} > 0 \end{cases}$ (ainsi $E(X_n) = n.p_n \sim \lambda$) .

On a alors :

$$P(X_n = k) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

*Cela signifie que pour n grand, une loi binomiale de moyenne $\lambda$ peut-être approchée par une loi de Poisson de paramètre $\lambda$. Comme $n \gg 1$, cela ne se produit que si l'événement que l'on veut dénombrer est rare.*

*Preuve :* Simple passage à la limite dans $\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}$.

DÉFINITION : **Loi de Poisson**

On dit que $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ lorsque : $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N} \\ P(X = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} \end{cases}$ .

Il s'agit bien d'une loi de probabilité que l'on note $\mathcal{P}(\lambda)$.

Modélisation :

Si durant un laps de temps, un phénomène se produit en moyenne $\lambda$ fois, on modélise souvent la situation en disant que le nombre de fois où se produit ce phénomène durant ce laps de temps suit une loi de poisson de paramètre $\lambda$. Cette modélisation est d'autant plus valable que le phénomème peut se produire un grand nombre de fois, mais à une probabilité faible de se produire.

C'est par exemple le cas pour :

→ le nombre de désintégrations radioactives par seconde dans un échantillon,
→ la nombre d'ampoules qui éclatent sur un grand sapin de noël,
→ le nombre de passages journaliers sur une route,
→ le nombre d'enfants dans une famille,
→ le nombre d'accidents de la route sur une année...

Python
```
def P(lambda):        # Loi de poisson de paramètre lambda
    return Binom(10000, lambda/10000)
```

- Loi géométrique :

Exemple : on lance un dé (de proba $p$) jusqu'à obtenir 6 et on pose $X$ le nombre de lancers nécessaires.
On a alors $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On notera :

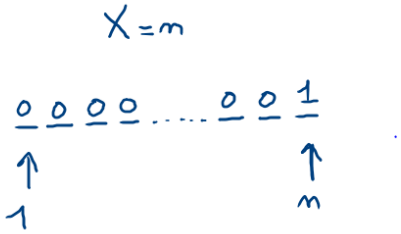
$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$$

DÉFINITION : **Loi géométrique**

On dit que $X$ suit une loi de Géométrique de paramètre $p \in ]0,\ 1[$ lorsque $\begin{cases} X(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ P(X = n) = p(1-p)^{n-1} \end{cases}$.

Il s'agit bien d'une loi de probabilité que l'on note $\mathcal{G}(p)$.

Modélisation : Plus généralement, une VA de loi géométrique est utilisée pour évaluer le temps d'attente avant qu'un événement se réalise (suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $p$.)




Python
```
def G(p):                          # Loi géométrique de paramètre p
    n = 1                          # Compteur d'expériences réalisés
    while random() > p : n = n + 1 # On continue tant qu'il y a échec
    return n
```

Exemple : ♡ Lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, nous avons $P(X \geq n) = (1-p)^{n-1}$.

*Preuve :* L'événement $(X \geq n)$ signifie n'avoir obtenu que des échecs au $n-1$ premiers lancers.

6. Variables aléatoires composées :

- A partir d'une seule VA : Soit $X$ est une VA discrète sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$

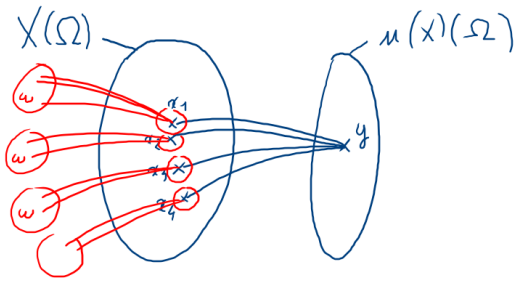
PROPOSITION : Soit $u : X(\Omega) \to F$.

- Notation : La composée $Y = u \circ X$ est notée $Y = u(X)$.
- Propriété : $Y = u(X)$ est une nouvelle variable aléatoire sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$.

*Preuve :* Montrons que $Y = u(X)$ est bien une VA discrète.

→ $Y(\Omega)$ est au plus dénombrable.

→ Les événements élémentaires $(Y = y)$ sont bien des événements.
En effet, pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a : $(Y = y) = \bigcup_{x \in X(\Omega) \mid u(x)=y} (X = x) \in \mathcal{A}$.




Exemples : pour $X$ une VA réelle : $X^2$, $|X|$, $\frac{1}{X}$, $\sqrt{X}$, $aX + b$ ...

**Proposition : Loi de $Y = u(X)$**

La loi de $Y = u(X)$ est déterminée par celle de $X$.
Pour tout $y \in Y(\Omega)$, on a :

$$P(Y = y) = P(u(X) = y) = P(X \in u^{-1}(\{y\}))$$

Exemples :

→ Déterminer la loi de probabilité de $2^X$ en fonction de celle de $X$.

→ Déterminer la loi de probabilité de $X^2$ en fonction de celle de $X$.

*Exercice : 1*
(∗) Montrer que lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\ p)$ alors $Y = n - X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\ 1 - p)$.

**Corollaire :** Lorsque $X \sim Y$, alors $u(X) \sim u(Y)$.

- A partir de plusieurs VA : Plus généralement on définit $Y = u(X_1,\ \ldots,\ X_n)$.

Exemples : Pour $X$, $Y$ et $Z$ des VA discrètes sur $(\Omega,\ \mathcal{A})$

- $U = X + Y + Z$
- $U = \min(X, Y, Z)$
- $U = (X,\ Y)$
- $U = \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$.

Exemple : Pour déterminer la loi de $U = \min(X, Y)$, on décompose :

$$\forall z \in U(\Omega), \quad (U = z) = ((X = z) \cap (Y = z)) \cup ((X = z) \cap (Y > z)) \cup ((X > z) \cap (Y = z))$$

- La loi de $X$ détermine celle de $u(X)$,
- En revanche les lois de $X_1, X_2 \ldots, X_n$ ne permettent pas (en général) de déterminer la loi de $U(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$. Il faudra, pour cela, connaître la loi conjointe, vue dans la partie suivante.

## 2 Couple de variables aléatoires discrètes

On se place dans $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$

1. Loi conjointe : Soit $\begin{cases} X : \Omega \to E \\ Y : \Omega \to F \end{cases}$ deux VA dicrètes.

> Définition : **Loi de** $(X,\ Y)$
>
> - La loi de probabilité de la VA discrète $(X,\ Y)$ est appelée la *loi conjointe* de $X$ et $Y$.
> - L'événement élémentaires $(X, Y) = (x, y)$ est également noté :
>
> $$((X, Y) = (x, y)) = (X = x) \cap (Y = y) = (X = x,\ Y = y)$$
>
> - La loi de $(X, Y)$ est déterminée par $P(X = x,\ Y = y)$ pour tout $(x,\ y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.
> - Lorsque $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis et petits, cette loi est représentée par un tableau de probabilités.

Exemples :

- On tire une carte dans un jeu de 32. $X$ donne la hauteur et $Y$ la couleur.
  $Z = (X,\ Y)$ détermine alors la carte tirée. Déterminer la loi conjointe.

- Une urne contient 2 boules rouges, une blanche et une noire. On tire 2 boules simultanément.
  $X$ est le nombre de boules blanches et $Y$ le nombre de boules noires.
  Déterminer la loi conjointe.

Remarque : la somme des valeurs du tableau représentant la loi conjointe donne 1.

---

2. Lois marginales :

> Définition : **Lois marginales**
>
> Soit $Z : \Omega \to E \times F$ une VA discrète.
> On peut alors introduire $X$ et $Y$ tels que $Z = (X,\ Y)$.
>
> Les lois de $X$ et de $Y$ sont appelées les *lois marginales* de $(X, Y)$.

> Proposition : La loi de $Z = (X,\ Y)$ détermine parfaitement ses lois marginales :
>
> $$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \qquad \text{(De même pour } P(Y = y))$$

Remarque : Dans le tableau de la loi de $(X,\ Y)$, on obtient les lois marginales en sommant sur $\begin{cases} \text{les lignes} \\ \text{les colonnes} \end{cases}$.

Exemple : Reprendre l'exemple précédent.

Sauf si les VA sont indépendandes, les lois marginales ne suffisent pas pour déterminer la loi conjointe.

C/expl : prendre 2 tableaux différents donnant les mêmes lois marginales.

*Exercice : 2*

(♡) **Tiré de l'exercice 97 de la banque CCINP**

Soit $(X,\ Y)$ un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par

$$P(X=j,\ Y=k)=\frac{(j+k)(\frac{1}{2})^{j+k}}{e.j!k!}$$

1. Vérifier que les probabilités élémentaires données définissent bien une loi de probabilité.
2. Déterminer les lois marginales de $X$ et $Y$.
3. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

**A retenir !**

La loi conjointe (loi de $(X,Y)$) détermine les lois marginales (lois de $X$ et de $Y$) mais pas l'inverse !

$$\forall x\in X(\Omega),\quad P(X=x)=\sum_{y\in Y(\Omega)}P(X=x,Y=y)$$

---

3. Lois conditionnelles : Soit $X$ et $Y$ deux VA discrètes sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$

Définition : Soit $x\in X(\Omega)$.
On appelle la loi conditionnelle de $Y$ sachant $(X=x)$ la loi de probabilité définie par :

$\forall y\in Y(\Omega)$ :

- $P_{(X=x)}(Y=y)=\dfrac{P((Y=y)\cap(X=x))}{P(X=x)}$ si $P(X=x)\neq 0$
- $P_{(X=x)}(Y=y)=P(Y=y)$ si $P(X=x)=0$

*On peut également définir la loi de Y sachant l'événement $X\in A$.*

Remarque : Cette loi est parfaitement déterminée par la loi conjointe !

Exemple : Prendre un tableau quelconque donnant une loi conjointe.

Proposition : $\left\{\begin{array}{l}\text{la loi de } X\\ \text{les lois de } Y \text{ sachant } (X=x) \text{ pour tous les } x\in X(\Omega)\end{array}\right.$ déterminent $\left\{\begin{array}{l}\text{La loi conjointe}\\ \text{La loi de } Y\end{array}\right.$

*Preuve :* Immédiat avec la formule de définition.

Exemple : Lorsque $X$ est réelle, on peut s'intéresser à la loi de $Y$ sachant $X\geq x_0$.

$$P_{X\geq x_0}(Y=y)=\frac{1}{P(X\geq x_0)}P\left(\bigcup_{x=x_0}^{+\infty}(X=x)\cap(Y=y)\right)$$

---

4. Vecteurs aléatoires : Généralisation à $X_1$, ...., $X_n$ des VA discrètes sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$

DÉFINITION : **Vecteur et matrices aléatoires**

$Z = (X_1,\ \ldots,\ X_n)$ est une variable aléatoire appelée *vecteur aléatoire*.
- La loi de $Z$ est appelée la "loi conjointe" des variables aléatoires $X_k$
- Les lois des $X_k$ sont les "lois marginales" de $Z$.

*On définit de même la notion de matrice aléatoire par $M = (X_{i,j}) \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{E})$ où $(X_{i,j})$ est une famille de VA.*

Exemples :
- La modélisation du lancer de $n$ dés : $X = (X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$.
- La modélisation d'une averse sur une place : $T_n = (X_{i,j}^n)_{i,j}$.

Exemples : Dans certains exercices, on étudie les variables aléatoires $\begin{cases} R = \text{rg}(M) \\ T = \text{Tr}(M) \\ D = \det(M) \end{cases}$ où $M$ est une matrice aléatoire.

# 3 Indépendance de variables aléatoires

1. Couple de variables aléatoires indépendantes : Soit $X$ et $Y$ deux VA discrètes sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$

DÉFINITION : **Couple de** 2 **variables aléatoires indépendantes**

$\begin{cases} X \\ Y \end{cases}$ sont *indépendantes* lorsque les évén$^t$ $\begin{cases} (X \in A) \\ (Y \in B) \end{cases}$ sont indépendants pour tout $\begin{cases} A \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \\ B \in \mathcal{P}(Y(\Omega)) \end{cases}$.

Intuitivement, cela signifie que les valeurs prises par $X$ ne sont pas influencées par celles prises par $Y$.

Notation : L'indépendance de $X$ et de $Y$ est notée $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Exemples :
- 2 variables aléatoires relatives à deux expériences non liées sont généralement considérées comme indépendantes. Par exemple lorsqu'on lance deux dés indiscernables et que $X$ est la valeur prise par le premier et $Y$ celle prise par le deuxième.
- $T_n$ et $T_{n+1}$ dans la modélisation précédente de l'averse.

PROPOSITION : Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors
- la loi de $Y$ sachant $(X = x)$ est la loi de $Y$.
- les lois de $X$ et de $Y$ déterminent la loi conjointe.

D/ Immédiat.

THÉORÈME : **Caractérisation de l'indépendance** :

$X$ et $Y$ sont indépendantes $\iff P(X = x,\ Y = y) = P(X = x)P(Y = y) \quad \forall (x,\ y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$.

*Preuve :* En effectuant une sommation par paquets dans la réciproque.

Exemple : Montrer qu'une variable aléatoire constante est indépendante de tout autre variable aléatoire.

Exemple : Les variables $X$ et $Y$ de loi conjointe suivante sont-elles indépendantes ?

| | X = 0 | X = 1 |
|---|---|---|
| Y = 0 | $\frac{1}{12}$ | $\frac{2}{12}$ |
| Y = 1 | $\frac{3}{12}$ | $\frac{6}{12}$ |

*Exercice : 3*

(∗) Une urne 1 contient 2 blanches et 3 noires et une deuxième l'inverse.
On jette une pièce. Si on a "face" on pioche une boule dans l'urne 1 et sinon on pioche dans l'urne 2.
Soit $X$ la valeur de la pièce et $Y$ la couleur de la boule tirée.
Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?

PROPOSITION : $X \perp\!\!\!\perp Y \quad \Rightarrow u(X) \perp\!\!\!\perp v(Y)$

*Preuve :* $(u(X) = a) \cap (v(Y) = b) = (X \in u^{-1}(\{a\})) \cap (Y \in v^{-1}(\{b\}))$.

Exemples : Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, alors $\begin{cases} aX + b \text{ et } cY + d \\ X^2 \text{ et } \cos(Y) \\ t^X \text{ et } t^Y \end{cases}$ sont indépendantes.

**Décompositions usuelles d'événements**

Lorsque $X(\Omega) = Y(\Omega) = \mathbb{N}$.

- $(X \geq x_0) = \bigcup_{x \geq x_0} (X = x)$
- $(X = Y) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (X = n) \cap (Y = n)$
- $(\min(X, Y) = n) = ((X = n) \cap (Y = n)) \cup ((X = n) \cap (Y > n)) \cup ((X > n) \cap (Y = n))$
- $(X + Y = n) = \bigcup_{k=0}^{n} (X = k) \cap (Y = n - k)$

*Exercice : 4*

(∗) Comment obtenir la loi de $Z = \min(X, Y)$ lorsque $X$ et $Y$ sont deux VA d'univers $\mathbb{Z}$ ?

- Avec la loi conjointe ?
- Lorsque $X$ et $Y$ sont indépendantes ?

*Exercice : 5*

(∗) Soit $X$ et $Y$ deux VA indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre $\lambda$ et $\mu$.
Déterminer la loi de :

- $Z = X + Y$.
- $Z = \min(X, Y)$.

*Voir l'exercice 103 de la banque CCINP.*

---

2. Famille finie de variables (mutuellement) indépendantes :

Définition : Soit $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de VA discrètes sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$

On dira que les variables $X_i$ sont (mutuellement) indépendantes lorsque tous les événements $(X_i \in A_i)$ sont (mutuellement) indépendants.

Théorème : **Caractérisation de l'indépendance** :

"les variables $X_i$ sont indépendantes" $\iff$ $P(X_1 = x_1,\ \ldots,\ X_n = x_n) = \prod_{k=1}^{n} P(X_k = x_k), \quad \forall (x_1, \ldots, x_n)$

Remarque : Lorsqu'on répète $n$ fois une même expérience aléatoire en notant $X_k$ les résultats successifs obtenus, il est usuel de considérer les variables $X_k$ comme indépendantes.

Exemple : On tire des boules dans une urne contenant des blanches et des rouges.
On note $X_i$ la variable aléatoire qui donne la couleur de la boule obtenue au ième tirage.

- Si les tirages se font avec remise, on considère les $X_i$ mutuellement indépendantes.
- Sinon elles ne le sont pas.

Remarque : L'indépendance est distincte de l'indépendance 2 à 2.

Théorème : **Lemme des coalitions**

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors :

- Toute sous-famille est constituée de VA indépendantes.
- Les 2 variables aléatoires $\begin{cases} X = f(X_1,\ \ldots,\ X_p) \\ Y = g(X_{p+1},\ \ldots,\ X_n) \end{cases}$ sont indépendantes.
- Les $n$ variables aléatoires $u_1(X_1), \ldots,\ u_n(X_n)$ sont indépendantes.

*Preuve :* Avec sommation par paquets, on calcule :

$$P(X = x,\ Y = y) = \sum_{(x_1,\ \ldots,\ x_p)\in f^{-1}(\{x\}),\ (x_{p+1},\ \ldots,\ x_n)\in g^{-1}(\{y\})} P(X_1 = x_1, \ldots,\ X_n = x_n) = ..$$

On peut déterminer la loi de $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ par récurrence lorsque les variables $X_k$ sont indépendantes.
Voir l'application de cette méthode à la modélisation de la loi binômiale.

3. Famille infinie de variables (mutuellement) indépendantes :

Définition : Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille de VA discrètes sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$

On dit que les $X_i$ sont (mutuellement) indépendantes lorsque les VA de tout sous-ensemble fini de cette famille sont (mutuellement) indépendantes.

Exemple : On lance une pièce indéfiniment.

On note $X_k$ est la variable de bernoulli qui donne 1 si on obtient FACE au kième lancer.
On considère usuellement que la famille $(X_k)$ est une famille de VA indépendantes.

Remarque : Pour assurer un cadre probabiliste à la répétition indépendante d'une même EA une infinité de fois, nous admettrons qu'il existe un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ sur lequel il existe une famille $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de VA discrètes indépendantes qui sont toutes de même loi $\mathcal{L}$ ou de lois distinctes $\mathcal{L}_n$.

Exemple :

Il existe un espace probabilisé sur lequel il est possible de définir une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivant toute la même loi $\mathcal{B}(p)$. Il est ainsi possible de modéliser un jeu infini de "Pile ou Face" de lancers indépendants.

# 4 Espérance

Dans cette partie, les variables aléatoires sont supposées discrètes sur $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Introduction :

Définition : **Espérance d'une variable positive**

Soit $X$ une variable aléatoire discrètes à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$
L'espérance de $X$ est définie par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$$

*On a $\mathbb{E}(X) = +\infty$ lorsque la famille $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ n'est pas sommable.*

Remarque : Lorsque $X(\Omega)=\mathbb{N}$, on a : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X=n)$ avec $\mathbb{E}(X) = +\infty$ en cas de divergence.

Exemples :

- Pour une variable $X$ de loi $\begin{cases} X(\Omega)=\mathbb{N}^* \\ P(X=n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \end{cases}$, on a : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = +\infty$.
- Pour une variable $X$ de loi $\begin{cases} X(\Omega)=\mathbb{N} \\ P(X=n) = \frac{1}{2^{n+1}} \end{cases}$, on a : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{2^{n+1}}$.

Définition : **Espérance d'une variable numérique**

Soit $X$ une variable aléatoire discrètes à valeurs dans $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$.
On dit que $X$ est *d'espérance finie* lorsque la famille $(xP(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable.
On a alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$$

Notation : On note $L^1$ l'ensemble des variables aléatoires admettant une espérance finie.

**Méthode pour vérifier d'une VA est d'espérance finie**

On calcule directement $\sum_{x\in X(\Omega)} |x|P(X=x)$ avec la formule de sommation par paquets.
Si le résultat aboutit à une valeur finie, c'est que $X$ est d'espérance finie.
On peut alors calculer son espérance à l'aide de la formule :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x)$$

Théorème : **Formule lorsqu'on dispose d'une énumération**

On introduit une numération de $X(\Omega)$ et on a alors $X(\Omega) = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et :
$X$ admet une espérance ssi $\sum_{n\geq 0} x_n P(X=x_n)$ est absolument convergente et alors :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X=x_n) \quad + \quad \text{sommation par paquets}$$

Remarques :

- L'espérance dépend uniquement de la loi de probabilité de $X$.
  En d'autres termes, deux VA distinctes mais suivant une même loi de probabilité ont la même espérance.
  Exemple : Pour $t\in\mathbb{R}$, calculer $E(\sin(Xt))$ lorsque $X$ et $-X$ suivent la même loi.

- ⚠ $\mathbb{E}(X)$ est une CONSTANTE et non une VA dépendant de $X$ comme c'est le cas pour la notation $u(X)$

Proposition : **VA constante ou presque sûrement constante**

Soit $a\in\mathbb{C}$.

- Lorsque $X(\Omega)=\{a\}$, on dit que $X$ est une VA constante notée habituellement $a$.
  Lorsqu'il existe $a\in X(\Omega)$ tel que $P(X=a)=1$, on dit que $X$ est une VA presque sûrement constante égale à $a$.
- Dans les deux cas, nous avons alors :
  $$\mathbb{E}(a) = a$$

*En particulier :* $\mathbb{E}(\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X)$.

*Exercice : 6*

(∗) **Mines 2018 - Q°1 épreuve écrite**
Soit $X$ une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![1,n]\!]$ et $m\in[\![2,n]\!]$.
Montrer que $\mathbb{E}(X) \leq m-1+nP(X\geq m)$.

**Exemples : A connaître par coeur ! !**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lorsque : | $X$ est constante à $C$ | on a | $\mathbb{E}(X) = C$ |
| Lorsque : | $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, n]\!])$ | on a | $\mathbb{E}(X) = \frac{1+n}{2}$ |
| Lorsque : | $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ | on a | $\mathbb{E}(X) = p$ |
| Lorsque : | $X = 1_A$ | on a | $\mathbb{E}(1_A) = P(A)$ |
| Lorsque : | $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\ p)$ | on a | $\mathbb{E}(X) = np$ |
| Lorsque : | $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ | on a | $\mathbb{E}(X) = \lambda$ |
| Lorsque : | $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ | on a | $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$ |

*Preuve :*
Ces valeurs s'obtiennent très facilement à l'aide des fonctions génératrices vues en fin de chapitre.
On peut également les déterminer avec la formule de définition ou parfois en utilisant la linéarité de l'expérance.

*Voir les exercices 102, 103, 106 et 111 de la banque CCINP.*

PROPOSITION : **Espérance d'une VA naturelle**

Lorsque $X$ est une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \mathbb{N} \cap \{+\infty\}$, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$$

*Cette formule reste valable en cas d'espérance infinie.*

*Preuve :* Il suffit de calculer $\sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$ en décomposant $(X \geq n) = \bigcup_{k=n}^{+\infty} (X = k)$ et en échangeant les sommes.

**Méthode de calcul de $\mathbb{E}(X)$ lorsque $X(\Omega) = \mathbb{N}$**

Si l'expression de $P(X \geq n)$ est simple à obtenir.

- On calcule $P(X \geq n)$
- On applique la formule : $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(X \geq n)$

Exemple : Calculer l'espérance de $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

*Exercice : 7*
(♡) On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois Face et une fois Pile.
Déterminer l'espérance de $X$ où $X$ renvoie le nombre de lancers effectués.

DÉFINITION : Lorsque $X$ admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = 0$, on dit que $X$ est une VA *centrée*.

2. Formule de transfert :

THÉORÈME : **Formule de transfert**

Soit $X$ une VA et $f : X(\Omega) \to \mathbb{R}$.

$$Y = f(X) \text{ admet une espérance} \iff (f(x)P(X=x))_{x\in X(\Omega)} \text{ est sommable}$$

Et dans ce cas :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x)$$

*Preuve :* On calcule $\mathbb{E}(|f(X)|)$ par calcul direct en décomposant l'événement $(f(X)=y) = \bigcup_{x\in X(\Omega)\ |\ f(x)=y} (X=x)$.
La double somme obtenue donne $\sum_{x\in X(\Omega)}$ et on obtient ainsi l'équivalence.
On reprend alors le calcul précédent sans les valeurs absolues pour obtenir $E(f(X))$.

Exemples : Pour $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![-1,1]\!])$, calculer $\mathbb{E}(X^2)$, $\mathbb{E}(\sin(\frac{\pi}{2}X))$ et $\mathbb{E}(\int_0^1 (t+1)X \,\mathrm{d}t)$.

**Méthode de calcul de $\mathbb{E}(XY)$**

On applique la formule de transfert à la variable $Z = (X, Y)$ :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x,y)\in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP(X=x, Y=y)$$

*Exercice : 8*

(∗) Soit $X$ une variable aléatoire naturelle de loi définie par $P(X=n) = \dfrac{4(n+1)}{3^{n+2}}$.

Montrer que $Y = \dfrac{e^X}{X+1} \in L^1$ et calculer $E(Y)$.

*Preuve :* Comme $Y \geq 0$, on calcule directement : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^n}{n+1} P(X=n) = \ldots$.

COROLLAIRE : $X \in L^1 \iff |X| \in L^1$

3. Propriétés :

PROPOSITION : **Linéarité** :

Si $X$ et $Y$ admettent des espérances, alors $\begin{cases} \lambda X \\ X+Y \end{cases}$ aussi et $\begin{cases} \mathbb{E}(\lambda X) = \lambda \mathbb{E}(X) \\ \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \end{cases}$.

En particulier :

- $\mathbb{E}(aX+b) = a\mathbb{E}(X) + b$
- $Y = X - \mathbb{E}(X)$ est une VA centrée.

*Preuve :* Pour $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ on applique la formule de transfert à la variable aléatoire $Z = (X, Y)$.
On commence par supposer que $X(\Omega)$, $Y(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ afin de vérifier la sommabilité.
Le cas général s'en déduit alors facilement.

**Méthode d'utilisation de la linéarité**

On pourra directement appliquer la formule $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y) = \lambda\mathbb{E}(X) + \mu\mathbb{E}(Y)$.
Si le résultat aboutit à une valeur finie, c'est que la calcul était légitime.

Remarques :

- $L^1$ est un sev de $\mathcal{F}(\Omega, \mathbb{K})$.
- L'application $X \mapsto \mathbb{E}(X)$ est une forme linéaire.
- $\{X \mid \mathbb{E}(X) = 0\}$ est un hyperplan de ce $\mathbb{R}$-ev.

Exemples :

- Déterminer l'espérance de $X$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $P(X = n) = (1-p)^n p$.

- Déterminer l'espérance de $X$ telle que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(a, b)$.

PROPOSITION : **Positivité et croissance**

Soit $X,\ Y \in L^1$.

- Si $X \geq 0$ alors $\begin{cases} \mathbb{E}(X) \geq 0 \\ \mathbb{E}(X) = 0 \Rightarrow P(X = 0) = 1 \quad \textit{(X est presque sûrement nulle)} \end{cases}$
- Si $X \leq Y$ alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$.
- $E(X) \leq E(|X|)$

PROPOSITION : **Comparaison**

$$|X| \leq Y \quad \text{avec} \quad Y \in L^1 \qquad \Rightarrow \qquad X \in L^1$$

Et dans ce cas, nous avons $|E(X)| \leq E(Y)$.

♡ *Toute variable aléatoire bornée admet donc une espérance.*

*Preuve :* On applique la formule de transfert à la variable $u(X, Y) = |X|$.
Cette variable étant positive, on peut procéder à un calcul direct puis à une majoration.
Attention à justifier correctement que $|x| \leq y$ en remarquant que $(x, y) = (X(\omega),\ Y(\omega))$.

4. Inégalité de Markov :

THÉORÈME : **Inégalité de Markov**

$$\text{Lorsque} \begin{cases} X \in L^1 \\ X \geq 0 \\ a > 0 \end{cases} \quad \text{alors :} \quad P(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$$

*Preuve :*

M1 : Par le calcul en minorant $\mathbb{E}(X)$

M2 : En remarquant que $\mathbf{1}_{(X\geq a)} \leq \frac{X}{a}$ et en utilisant la croissance de l'espérance.

Autres formes utilisées : $P(|X-\mathbb{E}(X)|\geq\varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|X-\mathbb{E}(X)|)}{\varepsilon}$ ou encore $P(|X|\geq\varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{\varepsilon^2}$.

Exemples : Pour $a>0$ et $X$ admettant une espérance, $\begin{cases}\text{majorer } P(X-\mathbb{E}(X)\geq a)\\ \text{minorer } P(|X-\mathbb{E}(X)|<a)\end{cases}$

**Méthodes de majoration d'une probabilité**

Pour majorer $P(X\in A)$ :

- M1 : On peut rechercher un événement $B$ tel que $(X\in A)\subset(X\in B)$ et on obtient :
$$\mathbb{P}(X\in A)\leq\mathbb{P}(X\in B)$$
- M2 : On peut utiliser Markov en vérifiant bien les hypothèses d'application :
$$(X\in A)\Longleftrightarrow\cdots\Longleftrightarrow(u(X)\geq a) \quad \text{et donc} \quad P(X\in A)\leq\frac{\mathbb{E}(u(X))}{a}$$
- M3 : Comme M2 mais en utilisant l'inégalité de BienAymé Tchebytchev.

5. Variables indépendantes :

THÉORÈME : **Espérance d'un produit**

- Lorsque $X,\ Y\in L^1$ sont indépendantes, on a :
$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$
- Plus généralement, lorsque $X_1,\ \ldots,\ X_n\in L^1$ sont indépendantes, on a :
$$\mathbb{E}(X_1X_2\ldots X_n)=E(X_1)E(X_2)\ldots E(X_n)$$

*Preuve :*

- On calcule $\mathbb{E}(|XY|)$ avec la formule de transfert appliquée à $|XY|=f(X,Y)$ et une sommation par paquets :
$$\mathbb{E}(|XY|)=\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)}|xy|P(X=x,Y=y)=\sum_{(x,y)\in(X,Y)(\Omega)}|xy|P(X=x)P(Y=y)=\sum_{x\in X(\Omega)}|x|P(X=x)\sum_{x\in X(\Omega)}|x|P(X=x)$$
Comme $|XY|\geq 0$, le calcul aboutissant à une valeur finie, on en déduit que $XY\in L^1$.
- On peut alors reprendre le calcul précédent en enlevant les valeurs absolues pour calculer $\mathbb{E}(XY)$.

Remarque : la réciproque est fausse.

*Exercice : 9*

(∗) On lance une pièce équilibrée afin de faire avancer un pion sur un jeu de plateau.
Si on a PILE, le pion reste sur place mais tant qu'on a FACE, on jette un dé et on avance le pion de la valeur obtenue.
De combien le personnage avance-t-il en moyenne ?

Corollaire : Si $\left\{ \begin{array}{c} X \\ Y \end{array} \right.$ sont indépendantes et $\left\{ \begin{array}{c} f(X) \\ g(Y) \end{array} \right.$ admettent des espérances, alors :

$$\mathbb{E}(f(X)g(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(g(Y))$$

*Exercice : 10*

(♡) Déterminer $\mathbb{E}(e^{S_n})$ lorsque $X_1, \ldots, X_n \in L^1$ sont des VA indépendantes de loi $\mathcal{U}(n)$ et $S_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

*Exercice : 11*

(♡) Déterminer $\mathbb{E}(\det(M))$ où $M = (m_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ avec pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{i,j} \hookrightarrow B(p)$.

# 5 Variance d'une variable aléatoire réelle

Dans cette partie, les variables aléatoires sont supposées discrètes et REELLES sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

1. Espace $L^2$ :

Notation : Lorsque $X^2$ admet une espérance finie, on note $X \in L^2$.

*Une analogie peut-être faite entre cet ensemble et les espaces $l^2(\mathbb{K})$ et $L^2(I, \mathbb{K})$.*

Proposition : **L'espace vectoriel $L^2$**

- $X \in L^2 \quad \Rightarrow \quad X \in L^1 \qquad (L^2$ est alors un sev de $L^1)$
- $X, Y \in L^2 \Rightarrow XY \in L^2$

*Preuve :* Avec le théorème de comparaison et $|X| \leq \frac{1}{2}(1 + X^2)$ et $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2 + Y^2)$.

Théorème : **Cauchy-Schwarz pour l'espérance**

Lorsque $X, Y \in L^2$, on a : $|\mathbb{E}(XY)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$

Il y a égalité si et seulement si $X$ et $Y$ sont presque sûrement colinéaires.

*Preuve :* On montre l'inégalité en introduisant $f(t) = E\left((X+tY)^2\right)$ et en s'inspirant de Cauchy-Schwarz.
Pour l'égalité :

- Pour le sens direct, pas de problème.
- Pour le sens indirect, on montre que si $P(X = -\lambda Y) = 1$ alors $f(-\lambda) = 0$ et donc $\Delta = 0$.

*Exercice : 12*

(♡♡) **Inégalité de Paley-Sigmund** (Oral Mines-Pont PSI)

Soit $X \in L^2$ positive et $a \in ]0,\ 1[$.

1. Montrer que $X = X.1_{\{X<a\mathbb{E}(X)\}} + X.1_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}}$
2. Montrer que :
   - $\mathbb{E}(X.1_{\{X<a\mathbb{E}(X)\}}) \leq a\mathbb{E}(X)$
   - $\mathbb{E}(X.1_{\{X\geq a\mathbb{E}(X)\}}) \leq \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}.\sqrt{P(X \geq a\mathbb{E}(X))}$
3. En déduire que : $P(X \geq a\mathbb{E}(X)) \geq (1-a)^2\dfrac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}$

---

2. Variance et écart-type :

DÉFINITION : **Variance et écart-type d'une VA réelle**

Si $X \in L^2$ alors :

$$V(X) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2) \quad \text{et donc} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \quad \text{existent et sont finis}$$

- $V(X)$ est appelée la *variance* de $X$
- $\sigma(X)$ est appelé l'*écart-type* de $X$.

$\begin{cases} \text{La variance } V(X) \\ \text{L'écart-type } \sigma(X) \end{cases}$ *sont des indicateurs de la dispersion des valeurs de X autour de* $\mathbb{E}(X)$.

Remarque : $X(\omega)$, $\mathbb{E}(X)$ et $\sigma(X)$ s'expriment dans la même unité.

*Voir l'exercice 100 de la banque CCINP.*

PROPOSITION : **Variance nulle**

Pour $X \in L^2$ : $\quad V(X) = 0 \iff X$ est presque sûrement constante

D/ Pas de difficulté.

THÉORÈME : **Formule de Koenig-Huyghens n°1**

Pour $X \in L^2$ : $\quad V(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$

D/ Facile avec la linéarité.

**Méthode de calcul de $V(X)$ avec $\mathbb{E}(X(X-1)$**

Il est souvent plus facile de calculer $\mathbb{E}(X(X-1))$ que $\mathbb{E}(X^2)$.
Pour obtenir $V(X)$, on remarque que :

$$\mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) \quad \text{et donc} \quad V(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

Exemples : A connaître par coeur ! !

| | | | |
|---|---|---|---|
| Lorsque | $X$ est constante | on a : | $V(X) = 0$ |
| Lorsque | $X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$ | on a : | $V(X) = \frac{n^2-1}{12}$ |
| Lorsque | $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ | on a : | $V(X) = pq$ |
| Lorsque | $X = \mathbf{1}_A$ | on a : | $V(\mathbf{1}_A) = P(A)(1-P(A))$ |
| Lorsque | $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ | on a : | $V(X) = npq$ |
| Lorsque | $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ | on a : | $V(X) = \lambda$ |
| Lorsque | $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ | on a : | $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$ |

*Preuve :*

- Ces différentes valeurs s'obtiennent facilement à l'aide des fonctions génératrices.
- Sinon, on peut également utiliser la formule de Koenig-Huyghens.
  Pour les lois de Poisson et Géométrique, on obtient $\mathbb{E}(X^2)$ à l'aide de $\mathbb{E}(X(X-1))$.

THÉORÈME : **Formule**

$$V(aX+b) = a^2 V(X)$$

D/ Simple calcul avec la formule de Koenig-Huyghens.

Exemple : Calculer la variance de $X \hookrightarrow \mathcal{U}(a,b)$.

DÉFINITION : **Variable centrée réduite**

- On dit qu'une variable aléatoire $X$ est *réduite* lorsque $V(X) = 1$.
- *Réduire* une variable aléatoire $X$ consiste à s'intéresser à $Y = \frac{X}{\sigma(X)}$.
- *Centrer et réduire* une variable aléatoire $X$ consiste à s'intéresser à $Y = \frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$.

*Voir l'exercice 108 de la banque CCINP.*

---

3. Covariance :

DÉFINITION : **Covariance**

Si $X,\ Y \in L^2$, on définit : $cov(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))$ existe.

On remarque que $cov(X,X) = V(X)$.

D/ $|XY| \leq \frac{1}{2}(X^2+Y^2)$.

PROPOSITION : **FBS-Positive**

- La covariance est une forme $\begin{cases} \text{bi-linéaire} \\ \text{symétrique} \\ \text{positive} \end{cases}$ sur l'EV des VA réelles admettant un moment d'ordre 2.
- En revanche, nous n'avons pas le caractère "défini" :

$$cov(X,X) = 0 \iff V(X) = 0 \iff X \text{ est presque sûrement constante}$$

*Il s'en est donc fallu de peu pour que l'application $\sigma$ soit une norme euclidienne.*

D/ facile.

THÉORÈME : **Formule de Koenig-Huyghens n°2**

$$cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

D/ Simple calcul.

THÉORÈME : **Cas de 2 VA indépendantes**

$$\begin{cases} X \\ Y \end{cases} \text{ indépendantes } \Rightarrow cov(X,Y) = 0$$

D/ Immédiat car dans ce cas, $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$.

THÉORÈME : **Majoration**

$$|cov(X,Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y)$$

D/ A partir de la définition, c'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Cauchy-Schwarz vue précédemment.

DÉFINITION : **Coefficient de corrélation linéaire**

- Lorsque les variances de $X$ et de $Y$ sont non nulles on définit :

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} \quad \in \quad [-1,\ 1]$$

- On dira que $X,\ Y \in L^2$ sont *décorrélées* lorsque $cov(X,Y) = 0$.

Remarques :

- Si $X$ et $Y$ sont indépendantes, ce coefficient est nul.
- Si $X$ et $Y$ sont liés par une relation affine, ce coefficient vaut $\pm 1$.

Exemple : Comment mesurer la corrélation entre deux VA réelles a priori liées par une relation de la forme $Y = X^2 + 1$ ?

4. Variance d'une somme :

THÉORÈME : **Formule**

$$V(X+Y) = V(X) + 2cov(X,Y) + V(Y)$$

D/ Simple calcul en utilisant $V(X,Y) = cov(X+T, X+Y)$.

THÉORÈME : **Formule générale**

$$V(\sum_{k=1}^{n} X_k) \quad = \quad \sum_{1\leq i,j\leq n} cov(X_i, X_j) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n} V(X_k) + 2\sum_{1\leq i<j\leq n} cov(X_i, X_j)$$

*Preuve :* Simple calcul en utilisant la bi-linéarité de la covariance : $V(\sum_{k=1}^{n} X_k) = cov(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sum_{k=1}^{n} X_k)$.

COROLLAIRE : **Variance de $n$ variables aléatoires décorrélées**

Lorsque pour tout $i \neq j \in [\![1,n]\!]$, on a $cov(X_i, X_j) = 0$, on a :

$$V(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$$

*C'est en particulier le cas lorsque les VA sont indépendantes.*

Exemple : Déterminer la variance de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,\ p)$.

5. Inégalité de Bienaymé-Tchebytchev :

THÉORÈME : **Bienaymé-Tchebytchev**
Lorsque $X \in L^2$, pour $\varepsilon > 0$, on a :

$$P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

*Preuve :* Application de Markov à $Y = (X - \mathbb{E}(X))^2$ et $a = \varepsilon^2$.

*Cette majoration permet de savoir dans quel mesure le résultat d'une expérience peut s'écarter de la moyenne.*

*Exercice : 13*

(∗) Soit $X$ une variable aléatoire réelle discrète admettant une variance $\sigma^2$.
Montrer que $\forall \alpha > 0,\ P(|X - \mathbb{E}(X)| < \alpha\sigma) \geq 1 - \frac{1}{\alpha^2}$.

*Exercice : 14*

(∗) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une familles de variables aléatoires réelles centrées et indépendantes de $L^2$ .
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.
Montrer que pour tout $\begin{cases} n \in \mathbb{N}^* \\ x \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$ , on a $P(\max_{1\leq k\leq n} |S_k| \geq x) \leq \frac{n}{x^2} \sum_{k=1}^{n} V(X_k)$.

THÉORÈME : **Loi faible des grands nombres**

Soit $(X_n)$ une suite de VA deux à deux indépendantes.
On suppose que ces VA suivent la loi d'une variable $X \in L^2$.
On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ et $m = \mathbb{E}(X)$.
On a alors la limite suivante :

$$P(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

*Cela signifie que la moyenne des valeurs de X obtenues en réalisant n fois de façon indépendante la même expérience aléatoire, tend vers l'espérance de X en probabilité.*

*Preuve :* On applique Bienaymé-Tchebytchev à $\frac{S_n}{n}$.

*Exercice : 15*

(♡) **Estimation d'une probabilité**
On veut savoir si une pièce est équilibrée. On note $p$ la probabilité d'avoir FACE.
Pour cela on lance $n$ fois cette pièce et on note $S_n$ le nombre de fois où on a obtenu FACE.
A partir de quelle valeur de $n$ est-on assuré que la valeur obtenue pour $\frac{S_n}{n}$ est proche de $p$ à $0,01$ près avec une probabilité supérieure à 95 % ?

*Exercice : 16*

(∗) **Exercice 99 de la banque CCINP**
Soit une variable aléatoire réelle $Y \in L^2$ et $(Y_n)$ une suite de VA indépendantes suivant la loi de $Y$.

1. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$. Prouver que pour tout $a \in \mathbb{R}^{+*}$, on a :

$$P(\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}(Y_1)\right| \geq a) \leq \frac{V(Y_1)}{na^2}$$

2. On effectue des tirages successifs, avec remise, d'une boule dans une urne contenant 2 boules rouges et 3 boules noires.
   A partir de quel nombre de tirages peut-on garantir à plus de 95 % que la proportion de boules rouges obtenues restera comprise entre $0,35$ et $0,45$ ?

# 6 Fonctions génératrices d'une VA naturelle

L'idée de cette partie est, pour $X$ d'univers $\mathbb{N}$, de proposer une fonction simple permettant de retrouver rapidement :

- la loi de $X$
- l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$
- l'existence et la valeur de $\mathbb{V}(X)$
- ...

Nous aurons ici besoin de quelques résultats concernant les séries entières (vues dans un chapitre ultérieur !)

1. Préliminaires sur les séries entières :

Définition : Soit $f : I \subset\to \mathbb{R}$ définie au voisinage de 0.

Lorsque $f$ admet pour expression $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,\ R[$ :

- on dit que la fonction $f$ est *développable en série entière* au voisinage de 0.
- on dit que $]-R,\ R[$ est un *intervalle ouvert de convergence*.
- l'expression $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est appelé le *développement en série entière* de $f$. (DSE)

Exemples : Nous savons déjà que • $e^t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ et que • $\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{+\infty} t^n$ $\forall t \in ]-1,\ 1[$.

Théorème : **Régularité**

Lorsque $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,\ R[$ :

- La fonction $f$ est $C^\infty$ sur $]-R,\ R[$.
- Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient $f^{(k)}(x)$ en dérivant le terme général de la série.

$$\forall x \in ]-R,\ R[, \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

*Preuve :* En utilisant le théorème de transfert $C^\infty$ par CVU des séries de fonctions.

Corollaire :

Lorsque $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur $]-R,\ R[$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$ : $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

Quelques développements en série entière TRES utiles :

- $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$
- $\text{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ sur $\mathbb{R}$
- $\text{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sur $\mathbb{R}$
- $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ sur $]-1,\ 1[$
- $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ sur $]-1,\ 1[$

*On remarque qu'en cas d'existence, les expressions des DSE correspondent à la partie régulière des développements limités de $f$ au voisinage de 0. Cette propriété est vraie pour toute fonction $C^\infty$ au voisinage de 0.*

Corollaire : S'il existe, le DSE d'une fonction est unique.

*Ce corollaire sera en particulier utile pour retrouver la loi de $X$.*

---

## 2. Fonction génératrice d'une VA

⚠ Les fonctions génératrices ne concernent que les Variables Aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

DÉFINITION : **fonction génératrice**

Soit $X$ une variable aléatoire naturelle.

Lorsque $\sum_{n\geq 0} P(X=n)t^n$ converge pour tout $t \in ]-R_X,\ R_X[$, sa somme est appelée *fonction génératrice* de $X$.

Sa somme est notée $G_X$ et on a alors pour tout $t \in ]-R_X,\ R_X[$ :

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \quad \text{ou encore} \quad G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$$

PROPOSITION : **Régularité de $G_X$**

- Cette série converge normalement sur $[-1,\ 1]$.
- La fonction $G_X$ est définie et continue sur au moins $[-1,\ 1]$ avec $G_X(1) = 1$
- La fonction $G_X$ est $C^\infty$ sur au moins $]-1,\ 1[$.

*Preuve :* Résultat vu en préliminaire.

Exemples : Il faut savoir retrouver rapidement ces différentes expressions

- Lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ : $G_X(t) = (1-p) + pt$ et donc $R_X = +\infty$.
- Lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$ : $G_X(t) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^k t^k = (1-p+pt)^n$ et donc $R_X = +\infty$.
- Lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ : $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}$ et donc $R_X = +\infty$.
- Lorsque $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ : $G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1}t^n = \frac{pt}{1-(1-p)t}$ et donc $R_X = \frac{1}{1-p}$.

Exemple : Retrouver l'expression de $G_X$ pour une loi binomiale en utilisant la modélisation usuelle.

Soit $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ avec ...

PROPOSITION : **Caractérisation des fonctions génératrices**

Une fonction $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction génératrice d'une VA naturelle si et seulement si :

- $f$ est développable en série entière sur au moins $[-1,\ 1]$ : $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$
- La famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une distribution de probabilités discrète.

*Preuve :* Immédiat.

3. Application à la détermination de la loi de $X$ :

**Proposition : Loi de $X$**

- La loi de $X$ détermine la fonction génératrice $G_X$.
- La fonction $G_X$ détermine la loi de $X$ : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$ ou $P(X=n) = a_n$.

Exemples : Vérifier que les f° génératrices des lois usuelles permettent effectivement de retrouver ces lois.

**METHODES de détermination de la loi de $X$**

- Si $G_X$ est donnée par son DSE, on obtient la loi de $X$ par identification (unicité du DSE).
- Si $G_X$ est donnée par son expression avec les fonctions usuelles :
  - → Si on peut, on recherche le DSE de $G_X$ et on trouve $P(x=n)$ par identification.
  - → Sinon, on applique la formule : $P(X=n) = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

Exemple : Vérifier que $f$ définie par $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n+1}{2^{n+2}} t^n$ est la f° génératrice d'une variable naturelle $X$.
Déterminer la loi de $X$.

---

4. Application au calcul de l'ESPERANCE et de la VARIANCE :

Soit $X$ une VA d'univers $\mathbb{N}$ de fonction génératrice $G_X$.

**Théorème : Espérance**

$X$ admet une espérance $\iff$ $G_X$ est dérivable à gauche en 1

Et dans ce cas : $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.

*Preuve :* Sens direct :

Facile avec le théorème de transfert $C^1$ par CVU en posant $u_n(t) = P(X=n)t^n$.
- → les $u_n$ sont $C^1$ sur $[-1,\ 1]$ et $u'_n(t) = nP(X=n)t^{n-1}$.
- → $\sum u_n$ converge simplement sur $[0,\ 1]$
- → $\sum u'_n(t)$ CVN sur $[0,\ 1]$ car $X$ admet une espérance et donc $\sum nP(X=n)$ converge.

Donc $G_X$ est $C^1$ sur $[0,\ 1]$ et en particulier en 1 avec : $G'_X(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} u'_n(1) = \mathbb{E}(X)$.

*Preuve :* Réciproque :

Comme $G_X$ est dérivable en 1, $\Delta_1(t) = \frac{G_X(t)-G_X(1)}{t-1}$ admet une limite finie pour $t \to 1^-$.
Or :

$$\Delta_1(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\frac{t^n-1}{t-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)(1+t+\cdots+t^{n-1})$$

Ruse : Pour tout $N>0$, on a alors au voisinage de $1^-$ : $\sum_{n=0}^{N} P(X=n)(1+t+\cdots+t^{n-1}) \leq \Delta_1(t)$.

En faisant $t \to 1^-$, on obtient $\sum_{n=0}^{N} nP(X=n) \leq G'_X(1)$ ce qui donne la CVG de $\sum nP(X=n)$.

Exemples : Vérifier que les f° génératrices des lois usuelles permettent bien de retrouver les espérances.

THÉORÈME : **Existence d'un moment d'ordre** 2

$$X \text{ admet un moment d'ordre 2} \iff G_X \text{ est 2 fois dérivable à gauche en 1}$$

Dans ce cas, nous avons alors : $G_X''(1) = E(X(X-1))$

*Preuve :*

$\Rightarrow$ Avec le théorème de transfert $C^2$ par CVU.

$\Leftarrow$ Admise !

**Méthode de détermination de la variance**

Pour une variable $X$ naturelle.

- On montre que $X \in L^2$ en vérifiant que $G_X$ est $D^2$ à gauche en 1.
- On calcule alors $G_X''(1)$ pour obtenir $E(X(X-1))$.
- On obtient alors $E(X^2) = E(X(X-1)) - E(X) = G_X''(1) + G_X'(1)$.
  Puis la variance avec la formule de Koenig-Huyghens :

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = G_X''(1) + G_X'(1) - (G_X'(1))^2$$

Exemples : Vérifier que les f° génératrices des lois usuelles permettent bien de retrouver les variances.

5. Fonction génératrice d'une somme :

Intérêt : Les fonctions génératrices sont très utiles pour étudier les sommes de VA indépendantes.

THÉORÈME : Lorsque $X$ et $Y$ sont INDEPENDANTES, nous avons :

$$G_{X+Y} = G_X \times G_Y \quad \text{sur au moins} \quad [-1,\ 1]$$

*Preuve :* Calculons $G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^{X+Y}) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y)$ car $t^X$ et $t^Y$ sont indépendantes.

*Plus généralement, lorsque $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes : $G_{X_1+\dots+X_n} = G_{X_1} \times \cdots \times G_{X_n}$.*

Exemples :

1. Déterminer la fonction génératrice de $X \hookrightarrow B(n,p)$.
2. Montrer que si $\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu) \end{cases}$ sont indépendantes, alors $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

*Exercice : 17*

(♡) Une urne contient 4 boules rapportant 0, 1, 1 et 2 points.
On y effectue $n$ tirages d'une boule avec remise et on note $S$ le score total obtenu.
Déterminer la fonction génératrice de $S$ et en déduire la loi de $S$.

*Voir l'exercice 110 de la banque CCINP.*

---

6. Musculation : Somme aléatoire

*La démonstration de ce théorème est tombée à l'oral de Saint-Cyr en 2019.*

Théorème : Soit $N$ une VA à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $(X_n)$ une suite de VA indépendantes, suivant toute la loi de $X$.
La fonction génératrice de $S = \sum_{n=1}^{N} X_n$ est alors donnée par :

$$G_S(t) = G_N(G_X(t))$$

*Preuve :* On a $S(\Omega) = \mathbb{N}$.

- La formule des proba totales nous donne $P(S=n) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(N=k)P_{N=k}(X_1+\cdots+X_k=n)$.
- Donc $G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=1}^{+\infty} P(N=k)P_{N=k}(X_1+\cdots+X_k=n)t^n$.
- On vérifie facilement que cette famille est sommable et on applique Fubini :

$$G_S(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}(P(N=k)\sum_{n=0}^{+\infty} P(X_1+\cdots+X_k=n)t^n) = \sum_{k=1}^{+\infty}(P(N=k)G_{X_1+\cdots+X_k}(t)$$

- Or l'indépendance des $X_k$ nous donne $G_{X_1+\cdots+X_k}(t) = (G_X(t))^k$ ce qui permet de conclure.

Corollaire : Si $N$ et $X$ possèdent une espérance, on a alors : $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X)$.

D/ On calcule $G'_S(1)$.