Intégrales dépendant d'un paramètre

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

18 janvier 2025

Nous avons déjà observer l'analogie entre les séries numériques et les intégrales impropres.
dans ce chapitre, l'analogie se poursuit et porte cette fois entre les séries de fonctions et les intégrales dépendant d'un paramètre.

$$x \mapsto \sum_{n\geq 0} u_n(x) \quad \longleftrightarrow \quad x \mapsto \int_I u(t,x)\,\mathrm{d}t$$

Les théorèmes de transfert par CVU seront alors analogues à des théorèmes dits « de transfert par domination ».
Ces théorèmes permettront, en particulier, d'étudier la régularité de $x \mapsto \displaystyle\int_I u(t,x)\,\mathrm{d}t$.

Table des matières

1 Limite d'une suite définie par une intégrale **1**

2 Intégration terme à terme (ITT) **4**

3 Continuité et limite d'une intégrale à paramètre **8**

4 Dérivation d'une intégrale à paramètre **11**

5 Musculation **15**

1 Limite d'une suite définie par une intégrale

Outre son intérêt en elle-même, cette partie est un préliminaire nécessaire pour démontrer les théorèmes de transfert par domination évoqués précédemment.

Objectif : Etudier la limite lorsque $n \to +\infty$ de

$$I_n = \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

Selon que $\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$ sont généralisées ou pas, on envisage d'appliquer l'une des deux méthodes suivantes.

1. **Méthode 1 :** Avec le théorème de convergence uniforme (pour les intégrales non généralisées)

Rappel de la méthode par CVU

THÉORÈME : **Convergence Uniforme**

Lorsque $\begin{cases} f_n \text{ continues sur } [a,\ b] \text{ à valeurs dans } \mathbb{K} \\ (f_n) \text{ CVU vers } f \text{ sur } [a,\ b] \end{cases}$ on a : $\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$

Exercice : 1

(∗) Déterminer la limite de la suite de terme général $I_n = \int_0^1 \frac{t+n}{n(1+t^2)}\,\mathrm{d}t.$

Mais comment faire si :

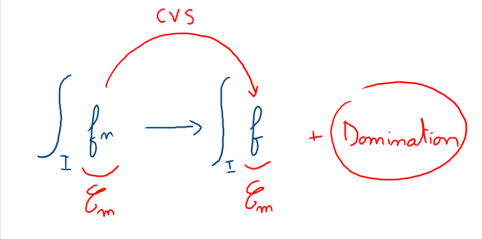
- la convergence n'est pas uniforme ?
- lorsque les fonctions f_n sont uniquement C_m sur I ?
- lorsque I n'est pas un segment ? (cad si les intégrales sont généralisées)

On pourra envisation d'utiliser le théorème suivant dit de « Convergence Dominée » !

2. **Méthode 2 :** Théorème de convergence dominée (pour les intégrales généralisées mais pas que...)

THÉORÈME : **Convergence Dominée**.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues par morceaux de $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$.



SI :

- CVS : (f_n) converge simplement vers f continue par morceaux sur I
- Domination : Pour tout $\begin{cases} n \in \mathbb{N} \\ t \in I \end{cases}$, $|f_n(t)| \leq \varphi(t)$ avec φ intégrable sur I

ALORS : les fonctions $\begin{cases} f_n \\ f \end{cases}$ sont intégrables et nous avons : $\int_I f_n \to \int_I f$

Preuve : **Hors-programme !**
On peut cependant facilement démontrer ce théorème dans le cas particulier où les fonctions f_n sont continues sur I et (f_n) CVU vers f sur tout segment de I.
Par exemple pour $I = [a,\ b[$. On pose $\varepsilon > 0$.

- L'intégrabilité de φ sur $[a,\ b[$ se traduit par l'existence de b' tel que $\int_{b'}^{b} \varphi \leq \varepsilon$.
  On décompose alors :
$$\Big|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leq \Big|\int_a^{b'} f_n(t) - f(t)\,\mathrm{d}t\Big| + \Big|\int_{b'}^{b} f_n(t)\Big| + \Big|\int_{b'}^{b} f(t)\Big|$$
- La CVU de (f_n) vers f sur $[a,\ b']$ et la continuité des f_n autorise l'utilisation du théorème de passage à la limite sous $\int$ par CVU pour $\int_a^{b'} f_n$. Nous avons alors $|\int_a^{b'} f_n - \int_a^{b'} f| \leq \varepsilon$ apcr.
- Avec les résultats précédents, on en déduit facilement que $|\int_a^b f_n - \int_a^b f| \leq 3\varepsilon$ apcr.

En pratique : ♡ On pourra se dispenser de vérifier les continuités par morceaux des fonctions f_n et f.

Voir les exercices 25, 26 et 27 de la banque CCINP.

Exercice : 2

(∗) Etude de la convergence de $I_n = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1 + 2\sin(\frac{t}{n})}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice : 3

(∗) Etude de la convergence de $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^n t\,\mathrm{d}t$

On ne peut pas utiliser la théorème précédent car il n'y a pas CVU (la limite f n'est pas continue !).

Exercice : 4

(∗) **Difficulté avec la fonction dominante**

Etude de la convergence de $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t$

La fonction dominante doit ici se définir par morceaux.

Exercice : 5

(∗) **Difficulté avec l'intervalle d'intégration**

Etude de la convergence de $I_n = \displaystyle\int_0^{n} \big(1 - \frac{t}{n}\big)^n \ln t\,\mathrm{d}t$

Preuve : Le problème est ici que l'intervalle d'intégration dépend de n.
La ruse consiste à prolonger les fonctions f_n sur $\mathbb{R}^+$ en la fonction nulle sur $[n,\ +\infty[$ pour obtenir $\tilde{f}_n$.

On pourrait calculer la valeur de cette intégrale $(-\gamma)$ en encadrant u_n.

Exercice : 6

(♡) Prouver que $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\sin\frac{1}{t}\right)^n \,\mathrm{d}t$ converge vers 0 ?

Par majoration en valeur absolue.

3. **Autres techniques pour étudier une limite :**

⚠ Les méthodes d'étude par $\left\{\begin{array}{l}\text{convergence uniforme}\\ \text{convergence dominée}\end{array}\right.$ ne suffisent pas toujours pour conclure !

Rappels des autres méthodes usuelles :

On peut aussi :

- Procéder par encadrements (comme en MPSI)
- Modifier l'expression de l'intégrale (changement de variables, IPP, astuce...)
- Raisonner avec les ε.

Exercice : 7

$(*)$ Montrons que pour tout f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\ b]$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)e^{int}\,\mathrm{d}t \to 0$.

IPP usuelle !

2 Intégration terme à terme (ITT)

Objectif : Présenter trois techniques usuelles pour démontrer que :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

- **ITT par CVU** : Lorsque I est un segment et que $f_n \overset{\text{CVU}}{\to} f$ sur I.
- **ITT par intégrabilité** : Lorsque I n'est pas un segment (intégrales généralisées).
- **Avec les sommes partielles** : Lorsque les méthodes précédentes ne s'appliquent pas.

1. **Méthode 1 :** ITT par CVU (Lorsque les intégrales ne sont pas généralisées)

Rappel de la méthode d'ITT par CVU

THÉORÈME : **ITT par CVU**

Si $\begin{cases} \underline{\text{Continuité}} : \text{les } f_n \text{ sont continues sur } [a,\ b] \text{ à valeurs dans } \mathbb{K} \\ \underline{\text{CVU}} : \sum f_n \text{ converge uniformément vers } S \text{ sur } [a,\ b] \end{cases}$ ALORS :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \quad \text{est continue et} \quad \int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

⚠ *Bien noter que l'application de ce théorème exige la continuité des fonctions f_n.*

Exercice : 8

(∗) Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t$ où $S(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+t}\right)$

Mais comment faire si :

- la convergence n'est pas uniforme ?
- lorsque les fonctions f_n sont uniquement C_m sur I ?
- lorsque I n'est pas un segment ?

On pourra envisager d'utiliser le théorème suivant « d'intégration terme à terme ».

2. **Méthode 2 :** ITT par Intégrabilité (Pour toutes les intégrales)

THÉORÈME : **Théorème d'intégration terme à terme (ITT) par intégrabilité**

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ telle que : $\sum f_n \overset{CVS}{\underset{I}{\to}} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

SI :

- Intégrabilité : Les fonctions f_n sont intégrables sur I.
- Convergence : La série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \int_I |f_n|$ converge

ALORS : la fonction $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et nous avons : $\boxed{\displaystyle\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n}$.

Preuve : Admis !
On peut cependant remarquer que les hypothèses et les conclusions de ce théorème sont analogues aux hypothèses de sommation par paquets d'une famille de nombres.

Remarque : Il n'y a pas d'hypothèse de domination dans ce théorème !

Mise en oeuvre de l'ITT

En pratique, on pourra directement montrer les hypothèses du théorème en calculant directement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n| = \dots$$

- Si le calcul donne une valeur finie, c'est que les hypothèses du théorème sont vérifiée.
  Le théorème s'applique donc et on a :

$$\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$$

- Si le calcul donne $+\infty$ c'est qu'on ne peut pas apppliquer le théorème.

Exemple : Calculer $\displaystyle\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n+1}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du théorème d'ITT par intégrabilité.

Méthode pour obtenir une relation de la forme $\displaystyle\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

- On exprime $S(t)$ comme somme d'une série (avec les Développements en Série Entière)
- On applique le théorème d'ITT.

Exercice : 9

(∗) Prouver les trois égalités suivantes :

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (cas où les fonctions sont de signe constant)
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$
- $\displaystyle\int_0^1 x^x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^n}$

Voir les exercices 19 et 49 de la banque CCINP.

---

3. **<u>Méthode 3</u> :** Intégration terme à terme par les sommes partielles

<u>Exemple</u> : Montrer qu'on ne peut pas utiliser l'une des deux méthodes précédentes pour prouver que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

Lorsque $\sum \int_I |f_n|$ diverge, la méthode précédente ne marche pas et on alors peut envisager d'effectuer une intégration terme à terme en passant par les sommes partielles.
Nous verrons que cette méthode se ramène à la recherche de la limite de $\int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$, question que nous avons traitée dans la partie précédente.

Méthode d'inversion avec les sommes partielles

Cette méthode est à envisager lorsque $\sum_{n\geq 0} \int_I |u_n|$ diverge.

En posant $S_N = \sum_{n=0}^{N} f_n$, on obtient par simple linéarité :

$$\int_I S_N(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{N} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \quad (*)$$

Observons ce qui se passe lorsque $N \to +\infty$:

- <u>Membre de gauche</u> : On vérifie que $\int_I S_N(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[N\to+\infty]{} \int_I S(t)\,\mathrm{d}t$ $\left\{\begin{array}{l}\text{Par CVU}\\ \text{ou}\\ \text{Par domination}\end{array}\right.$
- <u>Membre de droite</u> : Il converge automatiquement d'après l'égalité $(*)$.

On obtient alors : $\int_I S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice : 10

$(*)$ Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice : 11

$(**)$ Prouver que $\int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Ruse : On utilise la majoration $|\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2+t^2}| \leq \frac{1}{1+t^2}$ obtenue en remarquant qu'il s'agit du reste partiel d'une série vérifiant le CSSA (en complétant par des termes nuls pour obtenir une somme infinie).

De nombreuses fonctions sont définies par une expression de la forme $\varphi(x) = \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$.

C'est le cas des transformées de Laplace ou de Fourier et de la fonction d'Euler qui seront étudiées en fin de chapitre.

Nous allons voir ici comment étudier leurs limites et leur régularité à l'aide de théorèmes de *domination*.

3 Continuité et limite d'une intégrale à paramètre

On étudie ici la continuité et la limite aux bornes des fonctions de la forme : $g : x \in X \mapsto \int_I f(x,\ t)\,\mathrm{d}t$.

X désigne souvent un intervalle de $\mathbb{R}$, mais plus généralement une partie d'un EVN de dimension finie.

1. Théorème de continuité : *(Analogue au théorème de transfert $\mathcal{C}^0$ par CVU)*

THÉORÈME : **Transfert de Continuité par domination**

Soit $f : X \times I \to \mathbb{K}$ où X est une partie d'un EVN de dimension finie.

Lorsque :

- $\left[t \mapsto f(x,\ t) \text{ est } C_m \text{ sur } I \text{ pour tout } x \in X.\right]$ (non exigible)
- Transfert : $x \mapsto f(x,\ t)$ est C^0 sur X pour tout $t \in I$.
- Domination : $\left\{\begin{array}{l} \forall x \in X \\ \forall t \in I \end{array}\right.$, $|f(x,\ t)| \leq \varphi(t)$ avec φ intégrable sur I

Alors : $g : x \mapsto \int_I f(x,\ t)\,\mathrm{d}t$ est $\left\{\begin{array}{l} \text{DEFINIE} \\ \text{CONTINUE} \end{array}\right.$ sur X.

Preuve : **Caractérisation séquentielle + Convergence dominée**

- D'après la dominat°, $t \mapsto f(x,\ t)$ est intégrable sur I et donc $g(x)$ existe pour tout $x \in X$.
- On étudie la continuité à l'aide de la caractérisation séquentielle.
  Soit $a \in X$ et $(x_n) \to a$, montrons que $g(x_n) \to g(a)$.
  Nous avons $g(x_n) = \int_I u_n(t)\,\mathrm{d}t$ avec $u_n(t) = f(x_n,\ t)$.
  → CVS : par continuité, nous avons $u_n(t) \to f(a,\ t)$ (d'où la convergence simple des u_n)
  → Domination : Pour tout n et t, $|f(x_n,\ t)| \leq \varphi(t)$ et donc $|u_n(t)| \leq \varphi(t)$ intégrable sur I.
  Ainsi, $\int_I u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(a,\ t)\,\mathrm{d}t$. C'est ce que nous voulions ! !

Remarque : ♡ Ce théorème permet à la fois de prouver la définition et la continuité de g sur X.

En pratique

Comme indiqué dans le programme de MP :

- On se dispensera de vérifier le caractère C_m de $t \mapsto f(t,x)$.
- On n'insistera pas trop sur la vérification de la continuité de $x \mapsto f(x,t)$.
- En revanche, on veillera à vérifier rigoureusement l'hypothèse de domination.

Exercice : 12

$(*)$ Définition et continuité de g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $x \in \mathbb{R}^+$.

Preuve :

- La fonction $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t^2}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
- Pour tout $x, t \in \mathbb{R}^+$, nous avons $|\frac{e^{-xt}}{1+t^2}| \leq \frac{1}{1+t^2}$ fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction g est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice : 13

$(*)$ Définition et continuité de g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$ avec $x \in \mathbb{R}$.

Preuve :

- La fonction $x \mapsto \cos(x\sin\theta)$ est C^0 sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0,\ \pi]$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \in [0,\ \pi]$, nous avons $|\cos(x\sin\theta)| \leq 1$ fonction intégrable sur $[0,\ \pi]$.
- La fonction g est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On peut limiter l'hypothèse de domination à "tout segment de X"

Lorsqu'il n'est pas possible d'obtenir l'hypothèse de domination sur X en entier, on peut se restreindre à des parties incluant des voisinages de tout $a \in X$.

Exercice : 14

$(*)$ Définition et continuité de g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$ avec $x > 0$.

Preuve :

- La fonction $x \mapsto \frac{e^{-xt}}{1+t}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
- Pour tout $x \geq a > 0$ et $t \in \mathbb{R}^+$, nous avons $|\frac{e^{-xt}}{1+t}| \leq \frac{e^{-at}}{1+t}$ fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction g est donc définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice : 15

$(*)$ Définition et continuité de g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $x \geq 0$.

Preuve :

- La fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
- Pour tout $\begin{cases} b \geq x \geq 0 \\ t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$, nous avons $|\frac{\ln(1+xt)}{1+t^2}| \leq \frac{\ln(1+bt)}{1+t^2}$ fonction intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction g est donc définie et continue sur tout segment $[0,\ b]$ avec $b > 0$ et donc sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice : 16

$(*)$ Définition et continuité de la fonction g définie par $g(z) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t+z}\,\mathrm{d}t$ sur $\Omega = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) > 0\}$.

Preuve :

- La fonction $z \mapsto \frac{\ln(t)}{t+z}$ est C^0 pour tout $t \in]0,\ 1]$.
- Pour tout $t \in]0,\ 1]$ et z tel que $|z| > a > 0$, nous avons $|\frac{\ln(t)}{t+z}| \leq \frac{|\ln(t)|}{\sqrt{t^2+|z|^2}} \leq \frac{|\ln(t)|}{\sqrt{t^2+a^2}}$.
  Or, la fonction $t \mapsto \frac{|\ln(t)|}{t+a}$ est intégrable sur $]0,\ 1]$ (à montrer !).
- La fonction g est donc définie et continue sur Ω.

2. Etude des limites aux bornes :

On s'intéresse à la limite de $g(x) = \int_I f(x,\ t)\ \mathrm{d}t$ en a, une extrémité de l'intervalle X

Nous pouvons, pour cela, utiliser le théorème de convergence dominée pour une variable continue.

THÉORÈME : **Convergence Dominée pour une variable continue**.

SI :

- Limite : Pour tout $t \in I$, $f(x,\ t) \xrightarrow[x\to a]{} l(t)$ avec l continue par morceaux sur I
- Domination : Pour tout $\begin{cases} x \text{ au voisinage de } a \\ t \in I \end{cases}$, $|f(x,\ t)| \leq \varphi(t)$ avec φ intégrable sur I

ALORS nous avons : $\int_I f(x,\ t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I l(t)\ \mathrm{d}t$

Preuve : Sans difficulté par caractérisation séquentielle avec le théorème de convergence dominée.

Méthode de calcul de la limite lorsque $x \to a$

- Limite : On montre que pour tout $t \in I$: $g(x,\ t) \xrightarrow[x\to a]{} l(t)$.
- Domination au voisinage de a : On montre que pour tout $t \in I$ et x au voisinage de a :

$$|g(x,\ t)| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi \text{ intégrable sur } I$$

On en déduit alors que : l est intégrable sur I et que $g(x) \xrightarrow[x\to a]{} \int_I l(t)\ \mathrm{d}t$.

Voir l'exercice 50 de la banque CCINP.

Exercice : 17

(∗) Limite en $+\infty$ de la fonction g définie par : $g(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)e^{-xt}\ \mathrm{d}t$.

Attention

Avant d'appliquer la méthode, on a intérêt de commencer par vérifier la convergence de $\int_I l(t)\ \mathrm{d}t$.

Si $\int_I l(t)\,\mathrm{d}t$ diverge, on pourra procéder par encadrements.

Exercice : 18

(∗) Limites en $+\infty$ et en 0^+ de la fonction g définie par : $g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

Preuve :

- Limite en $+\infty$: On peut appliquer la méthode précédente ou procéder par encadrement :

$$0 \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t \leq \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x} \to 0$$

- Limite en 0^+ : Intuitivement, on pense que la limite est $+\infty$.
  On peut envisager les minorations suivantes :

$$\forall X > 0, \quad g(x) \geq \int_0^X \frac{e^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t \geq \int_0^X \frac{1-xt}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

4 Dérivation d'une intégrale à paramètre

On étudie ici la dérivabilité sur X des fonctions de la forme : $g : x \mapsto \int_I f(x,\ t)\,\mathrm{d}t$.
X désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Applications : Il est intéressant de connaître la dérivée de g

- Soit pour étudier son signe et en déduire le sens de variation de g
- Soit pour rechercher une équation différentielle vérifiée par g.
  En la résolvant, on peut en déduire une expression simplifiée de g.

On pourra même parfois utiliser cette méthode pour calculer une intégrale $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$... Voir TD...

1. Dérivation par domination :

DÉFINITION : **Dérivée partielle**
Soit $f : X \times I \to E$ de dimension finie.
On dit que f admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ sur $X \times I$ lorsque $\forall t \in I$ la fonction $x \mapsto f(x,\ t)$ est dérivable sur X.

Formule : **DP1 :** $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x,\ t))$.

THÉORÈME : **Transfert $\mathcal{C}^1$ par domination** *(Analogue au transfert $\mathcal{C}^1$ par CVU)*

La fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,\ t)\ \mathrm{d}t$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{définie} \\ \mathcal{C}^1 \end{array} \right.$ sur X avec $\boxed{g'(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)\ \mathrm{d}t}$.

Lorsque :

- Transfert $\mathcal{C}^1$: $x \mapsto f(x,\ t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur X $(\forall t \in I)$.
- Intégrabilité de la fonction : $t \mapsto f(x,\ t)$ est intégrable sur I $(\forall x \in X)$.
- Intégrabilité de PD1 par domination :
  - ⋆ $\left[t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ t) \text{ est } C_m \text{ sur } I \quad \text{pour tout } x \in X \right]$. (non exigible)
  - ⋆ Domination :

$$\exists\ \varphi : I \to \mathbb{R}^+ \text{ telle que, } \left\{ \begin{array}{l} \forall x \in X \\ \forall t \in I \end{array} \right. , \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)\right| \leq \varphi(t) \text{ avec } \varphi \text{ intégrable sur } I$$

En pratique, on se dispensera de vérifier le caractère C_m de la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,\ t)$

Preuve :

- Soit $a \in X$.
  On étudie la limite en a de $\Delta_a(x) = \frac{g(x)-g(a)}{x-a} = \int_I u(x,\ t)\ \mathrm{d}t$ avec $u(x,\ t) = \frac{f(x,\ t)-f(a,\ t)}{x-a}$.
- Quitte à poser $h(x) = f(x,\ t)$, on sait que h est dérivable et donc que $u(x,\ t) \xrightarrow[x\to a]{} \frac{\partial f}{\partial x}(a,\ t)$.
  On applique alors le théorème de CVG dominée pour une variable continue en utilisant le TAF pour obtenir la domination recherchée.
- On montre que g' est continue avec le théorème de transfert de continuité par domination.

Voir l'exercice 30 de la banque CCINP.

Exercice : 19

$(*)$ Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\ \mathrm{d}t$ est dérivable.
En déduire une expression simplifiée de $g(x)$.

Exercice : 20

$(\heartsuit)$ **Application de la dérivation** : Calculer $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x - 1}{\ln t}\ \mathrm{d}t$ lorsque $x > 0$.

On peut remplacer l'hypothèse de domination sur X en se plaçant sur "tout $[a,\ b] \subset X$".

Exercice : 21

($*$) Montrer que la fonction Γ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^1$.

Voir l'exercice 29 de la banque CCINP.

2. Dérivées d'ordre supérieur :

Outre leur intérêt dans l'étude d'une fonction, les dérivées d'ordres 1, 2... peuvent servir à rechercher une équation différentielle vérifiée par la fonction. Celle-ci peut alors nous permettre de déterminer une expression simplifiée de la fonction.

(a) Dérivées partielles :

DÉFINITION : **Dérivée partielle d'ordre i**

On dit que $(x,\ t) \mapsto f(x,\ t)$ admet une dérivée partielle d'ordre i par rapport à x sur $X \times I$ (notée $\frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, i)$) lorsque pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,\ t)$ est i fois dérivable sur X. On pose alors :

$$\textbf{DPi :}\quad \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,\ t) = \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}(f(x,\ t))$$

Une fonction admettant une DPn admet une DPi pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

(b) Théorème : Transfert C^n par domination

Il s'agit d'une généralisation du théorème de "dérivabilité par domination".

THÉORÈME : **Transfert C^n par domination** *(Analogue au transfert $\mathcal{C}^n$ par CVU)*

La fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,\ t)\ \mathrm{d}t$ est C^n sur X et $\forall x \in X :\quad g^{(n)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,\ t)\ \mathrm{d}t$

Lorsque :

- Transfert $\mathcal{C}^n$: $x \mapsto f(x,\ t)$ est $\mathcal{C}^n$ sur X $(\forall t \in I)$
- Intégrabilité des DPk : $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x_k}(x,\ t)$ sont intégrables sur I $\begin{cases} \forall k \in [\![0, n-1]\!] \\ \forall x \in X \end{cases}$.
- Intégrabilité de la DPn par domination :
  - ⋆ $\left[t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est C_m sur $I \quad (\forall x \in X)\right]$. (non exigible)
  - ⋆ Domination : Pour tout $[a,\ b] \subset X$

$$\begin{cases} \forall t \in I \\ \forall x \in [a,\ b] \end{cases}, \quad \left|\frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,\ t)\right| \leq \varphi(t) \quad \text{avec} \quad \varphi \text{ intégrable sur } I.$$

Preuve : D/ Par récurrence...

En pratique : On se dispensera de vérifier le caractère C_m des fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^n}$.

Exercice : 22

$(*)$ Montrer que la fonction g définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$ est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'ED :

$$y'' + y = \frac{1}{x}$$

(c) Théorème : Transfert C^∞ par domination :

THÉORÈME : **Transfert $\mathcal{C}^\infty$ par domination** *(Analogue au transfert $\mathcal{C}^\infty$ par CVU)*

La fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,\ t)\ \mathrm{d}t$ est C^∞ sur X avec pour tout $\left\{ \begin{array}{l} x \in X \\ n \in \mathbb{N} \end{array} \right.$: $g^{(n)}(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,\ t)\ \mathrm{d}t$

LORSQUE $f : X \times I \to \mathbb{K}$ vérifie :

- Transfert $\mathcal{C}^\infty$: $x \mapsto f(x,\ t)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur X $\quad (\forall t \in I)$
- Intégrabilité des DPn par domination : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $[a,\ b] \subset X$
  - ⋆ $\left[t \mapsto \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ est C_m sur $I \quad (\forall x \in X) \right]$. (non exigible)
  - ⋆ Domination : Pour tout $\left\{ \begin{array}{l} t \in I \\ x \in [a,\ b] \end{array} \right.$: $\left|\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,\ t)\right| \leq \varphi_n(t)$ avec φ_n intégrable sur I.

En pratique, on se dispensera de vérifier le caractère C_m des fonctions $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^n}$.

Preuve : Avec ces hypothèses, le théorème précédent s'applique à tout ordre.

Exercice : 23

$(*)$ Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^1 t^2 \cos(xt)\ \mathrm{d}t$ est $\mathcal{C}^\infty$.

5 Musculation

Les résultats suivants ne sont pas au programme mais font souvent l'objet de questions lors des concours.
Il est bon de les connaître, mais on ne pourra les utiliser qu'en les redémontrant.

1. Calcul de l'intégrale de Gauss : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

   On considère les deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-(t^2+1)x^2}}{t^2+1}\ \mathrm{d}t$.

   1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $g(x) + f^2(x) = \frac{\pi}{4}$.
   2. En déduire que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

2. Transformée de Laplace :

   Notation : $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$ est l'ensemble des f° $\left\{ \begin{array}{l} \text{continues par morceaux} \\ \text{bornées} \end{array} \right.$ de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{K}$.

   La transformée de Laplace s'applique à ces fonctions.

DÉFINITION : **Transformée de Laplace**

On appelle *transformée de Laplace de f* l'application $L(f)$ définie pour $x > 0$ par :

$$L(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Exemples : Pour $f(t) = 1$ et $f(t) = \sin(\omega t)$.

PROPOSITION : **Linéarité de la transformation de Laplace**

L'application $L : f \mapsto L(f)$ est linéaire de $L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{C})$ dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^{+*}, \mathbb{C})$.

Preuve :
La linéarité ne pose aucune difficulté.
Soit $f \in L^\infty(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$.
Montrons que $L(f)$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec le théorème de transfert $\mathcal{C}^0$ par domination.

- Transfert : La fonction $x \mapsto f(t)e^{-xt}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^{+*}$
- Domination : Pour $x > a > 0$ et t, on a : $|f(t)e^{-xt}| \leq f(t)e^{-at}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

$L(f)$ est donc continue sur tout $[a,\ +\infty[$ et donc sur $\mathbb{R}^{+*}$.

La transformation de Laplace transforme donc une fonction C_m en une fonction continue.

PROPOSITION : **Injectivité**

La restriction de la transformée de Laplace à $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$ est injective.

Preuve : On recherche $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{K})$ telle que $L(f) = 0$.
Pour cela, on commence par effectuer le changement de variable $u = e^{-t}$.
On montre alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\int_0^{+\infty} u^n.u^{r+1}f(-\ln(u))\,\mathrm{d}u$.
On est ramené au problème des moments traités dans le cours sur l'"intégration...

La connaissance de $L(f)$ permet donc théoriquement, de retrouver la fonction f.

PROPOSITION : **Lien entre $L(f')$ et $L(f)$**

Lorsque $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+,\ \mathbb{K})$ avec f et f' bornées, on a :

$$\forall x > 0, \quad L(f')(x) = xL(f)(x) - f(0)$$

Preuve : Simple IPP.

Cette formule permet de déterminer à moindre coup, de nouvelles transformées de Laplace.

PROPOSITION : **Etude asymptotique en $+\infty$**

Lorsque f est continue en 0, l'étude de la limite de $xL(f)(x)$ en $+\infty$ donne la valeur de $f(0)$.

$$xL(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0)$$

Preuve :

- On commence par effectuer le changement de variable $s = tx$: $\quad xL(f)(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(\frac{s}{x})e^{-s}\,\mathrm{d}s.$
- Appliquons le théorème de convergence dominée :
  → Limite : On a $f(\frac{s}{x})e^{-s} \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(0)e^{-s}$ (pour tout s)
  → Domination : pour tout x et s, on a : $|f(\frac{s}{x})e^{-s}| \leq Me^{-s}$ qui est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

  D'après le théorème, on en déduit que : $\quad xL(f)(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \displaystyle\int_0^{+\infty} f(0)e^{-s}\,\mathrm{d}s = ... = f(0)$

Cette formule permet de déterminer l'état initial $f(0)$ de f.

PROPOSITION : **Etude asymptotique en 0^+**

Lorsque f admet une limite l en $+\infty$.
L'étude de la limite de $xL(f)(x)$ en 0^+ donne cette valeur l.

$$xL(f)(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} l$$

Preuve : Mêmes calculs qu'à la question précédente...

Cette formule permet de déterminer l'état stationnaire $f(+\infty)$ de f.

PROPOSITION : **Quelques propriétés complémentaires**

- Translation : Pour $p + \alpha > 0$, on a : $\quad L(t \mapsto e^{-\alpha t}f(t))(p) = L(f)(p + \alpha).$
- Retard : Pour $a > 0$ et g définie par $g(t) = f(t - a)$ si $t \geq a$, on a : $\quad L(g)(p) = e^{-ap}L(f)(p)$
- Changement d'échelle : Pour $\alpha > 0$, on a : $\quad L(t \mapsto f(\alpha t))(p) = \dfrac{1}{\alpha}\,(L(f))\,(\dfrac{p}{\alpha})$

Preuve : Simples calculs.

3. Transformée de Fourier :

Notation : On note $L^1(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions à valeurs réelles ou complexes, intégrables sur $\mathbb{R}$.

La transformée de Fourier s'applique à ces fonctions.

DÉFINITION : **Transformée de Fourier**

On appelle *transformée de fourier* de f, l'application $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ définie par :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

PROPOSITION : **Linéarité de la transformation de Fourier**

L'application $F : f \mapsto \hat{f}$ est une application $\left\{ \begin{array}{l} \text{linéaire} \\ \text{continue} \end{array} \right.$ de $L^1(\mathbb{R},\ \mathbb{K})$ dans $L_c^\infty(\mathbb{R},\ \mathbb{K})$.

Preuve :
- La linéarité et le caractère borné de $\hat{f}$ sont immédiats !
- La continuité de $\hat{f}$ se montre facilement avec le théorème de transfert $\mathcal{C}^0$ par domination.
  - Transfert : $x \mapsto f(t)e^{-ixt}$ est C sur $\mathbb{R}$ (pour tout i)
  - Domination : Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}$: $|f(t)e^{-ixt}| \leq |f(t)|$ intégrable par hypothèse.
- Enfin, la continuité de F provient de l'inégalité $\|T(f)\|_\infty \leq \|f\|_1$. (« Lipschitzianité en 0 »)

THÉORÈME : **Dérivées successives**
Soit $n \in \mathbb{N}$.
Si $t \mapsto t^n f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, alors $\hat{f}$ est C^n et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\hat{f})^{(k)}(x) = \int_{+\infty}^{+\infty} (-it)^k f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$$

Preuve : Avec le théorème de transfert $\mathcal{C}^1$ par domination.
- Transfert : Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$

$$x \mapsto f(t)e^{-ixt} \text{ est } \mathcal{C}^k \text{ sur } \mathbb{R} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,\ t) = (-it)^k f(t)e^{-ixt}$$

- Intégrabilité des DPk : Pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$

$$t \mapsto (-it)^k f(t)e^{-ixt} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R} \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

  On utilise pour cela : $|t^k| \leq |t^n| + 1$.

- Domination de la DPn : $\forall x \in [a,\ b]$ et $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$|(-it)^n f(t)e^{-ixt}| \leq |t^n f(t)| \quad \text{fonction intégrable sur } \mathbb{R}$$

La fonction $\hat{f}$ est donc C^n sur $\mathbb{R}$ avec : $\hat{f}(x) = \displaystyle\int_{+\infty}^{+\infty} (-it)^n f(t)e^{-ixt}\,\mathrm{d}t$.

Exercice : 24
(∗) Calculer la transformée de Fourier de la fonction f définie par $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

Preuve : On recherche une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par $\hat{f}$.
On trouve $\hat{f}(x) = \sqrt{2\pi}e^{-x^2/2}$.

4. Fonction Gamma d'Euler (Γ) :

L'étude de cette fonction fait l'objet de très nombreux problèmes et exercices de concours.

(a) Définition :

Lemme : L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x > 0$.

Preuve :

Définition : **Fonction Gamma d'Euler (Γ)**
Pour tout $x > 0$, on pose :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Remarque : $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$.

Proposition : **Relation fonctionnelle**

Pour $x > 0$, on a $\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad$ et ainsi $\quad \Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Preuve : Avec une IPP.

(b) Continuité :

Proposition : La fonction Γ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Preuve : Avec le théorème de de transfert $\mathcal{C}^0$ par domination.

- Transfert : $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est C^0 sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour tout t.
- Domination : Soit $0 < a < 1 < b$.

$$\begin{cases} \forall x \in [a,\ b] \\ \forall t > 0 \end{cases} \quad \text{on a } |t^{x-1}e^{-t}| \leq \begin{cases} |t^{b-1}|e^{-t} \text{ si } t \geq 1 \\ |t^{a-1}|e^{-t} \text{ si } t < 1 \end{cases} \quad \text{fonction intégrable sur } \mathbb{R}^+$$

(c) Dérivabilité :

Lemme : $t \mapsto (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}$ est dominée sur $\mathbb{R}^+$ pour tout $x > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : Facile.

Théorème : Γ **est de classe $\mathcal{C}^\infty$**

La fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall x > 0, \quad \Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

Preuve : Avec le théorème de transfert $\mathcal{C}^\infty$ par domination en posant $f(x,\ t) = t^{x-1}e^{-t}$.

- Transfert : $x \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour tout $t > 0$.

  g admet donc des DP à tout ordre et : $\dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}(x,\ t) = (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}$.

- Domination : Soit $0 < a < 1 < b$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

  $\begin{cases} \forall x \in [a,\ b] \\ \forall t > 0 \end{cases}$ on a :

$$|\ln^n(t)t^{x-1}e^{-t}| \leq \begin{cases} |\ln^n(t)|.|t|^{b-1}e^{-t} \text{ si } t \geq 1 \\ |\ln^n(t)|.|t|^{a-1}e^{-t} \text{ si } t < 1 \end{cases} \quad \text{fonction intégrable sur } \mathbb{R}^+$$

Γ est ainsi $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$:

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^n t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$$

Exercice : 25

(∗∗) Montrer que la fonction $\ln \circ \Gamma$ est convexe sur $\mathbb{R}^{+*}$.

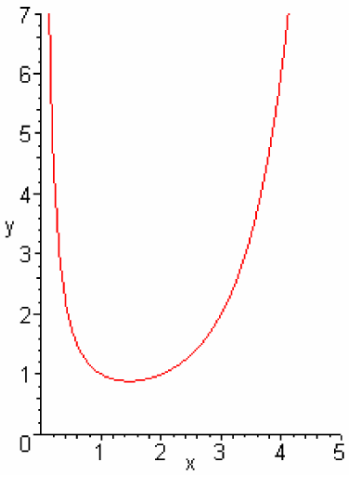
(d) Allure :

- Signe de la dérivée : Le signe de $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} (\ln t)t^{x-1}e^{-t}\ \mathrm{d}t$ est incertain.

  En revanche, il est évident que $\Gamma''(x) > 0$ et donc que Γ' est strictement croissante.
  Or, $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$ donc d'après Rolle, il existe $x_0 \in]1,\ 2[$ tel que $\Gamma'(x_0) = 0$.
  La stricte monotonie implique l'existence de limites en 0^+ et en $+\infty$.

- Limite en 0^+ : Nous savons que $\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x} \sim \frac{1}{x} \to +\infty$.

- Limite en $+\infty$: Nous avons vu que $\Gamma(n) = (n-1)! \to +\infty$ donc ...



5. Produit de convolution

(a) Définition

DÉFINITION : **Produit de convolution**

Pour toutes fonctions $\begin{cases} f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \end{cases}$ C_m avec φ est nulle en dehors d'un segment $[-\varepsilon,\ \varepsilon]$.

On appelle *convolée de f et φ*, la fonction notée $f * \varphi$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi(x-t)\ \mathrm{d}t$$

$f * \varphi(x)$ est appelée un *produit de convolution*.

Remarque : La fonction $t \mapsto \varphi(x-t)$ étant nulle en dehors de l'intervalle $[x-\varepsilon,\ x+\varepsilon]$, on a :

$$f * \varphi(x) = \int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(t)\varphi(x-t)\ \mathrm{d}t$$

Ce résultat justifie la définition de $f \star \varphi$ sur $\mathbb{R}$.

LEMME : **Domination**

Soit f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$ et φ une fonction continue nulle en dehors de $[-\varepsilon,\ \varepsilon]$.
Pour tout $a > 0$, il existe une fonction ψ, intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall t \in \mathbb{R} \\ x \in [-a, a] \end{cases},\ |f(t)\varphi(x-t)| \leq \psi(t)$$

Preuve : On définit ψ par $\begin{cases} \psi(t) = 0 & \text{si } t \notin [-a-\varepsilon,\ a+\varepsilon] \\ \psi(t) = M|f(t)| & \text{sinon} \end{cases}$ avec $M = \|\varphi\|_\infty$.

PROPOSITION : **Régularité de $f * \varphi$**

Un produit de convolution conserve la régularité de φ :

- φ continue $\Rightarrow$ $f * \varphi$ continue
- φ de classe $\mathcal{C}^n \Rightarrow$ $f * \varphi$ de classe $\mathcal{C}^n$
- φ de classe $\mathcal{C}^\infty \Rightarrow$ $f * \varphi$ de classe $\mathcal{C}^\infty$

Preuve : Avec les théorèmes de transfert par domination sur tout segment.

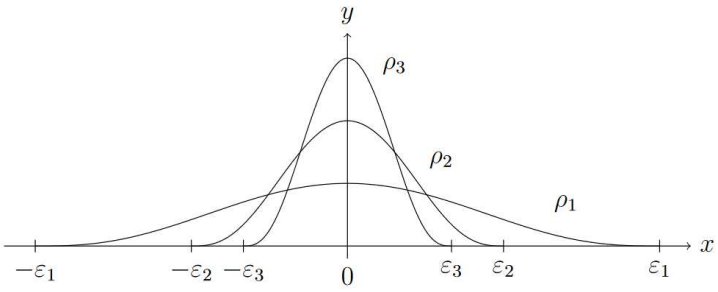
(b) Suite de fonctions régularisantes

Soit f une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
On souhaite déterminer une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ qui converge simplement vers f.

DÉFINITION : **Suite de fonctions régularisantes**

Une suite de fonctions $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite *régularisante de classe $\mathcal{C}^k$* lorsque pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\rho_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- ρ_n est $\mathcal{C}^k$ (avec $k \geq 0$) et positive sur $\mathbb{R}$
- ρ_n est nulle en dehors d'un intervalle de la forme $[-\varepsilon_n,\ \varepsilon_n]$ avec $\varepsilon_n \to 0$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(t)\ \mathrm{d}t = 1$



Exemples : Les deux suites suivantes sont des suites régularisantes

- De classe $\mathcal{C}^p$: La suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\rho_n(t) = \dfrac{n}{I_p}\rho(nt)$ où :

$$\rho(t) = \begin{cases} (1-x^2)^{p+1} \text{ si } |x| \leq 1 \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \qquad \text{avec} \quad I_p = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{p+1}\,\mathrm{d}t$$

Par récurrence avec le théorème de la limite de la dérivée.

- De classe $\mathcal{C}^\infty$: La suite $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $\rho_n(t) = \dfrac{n}{I}\rho(nt)$ où :

$$\rho(t) = g(t+1)g(1-t) \quad \text{où} \quad g(t) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{x^2}) \text{ si } x > 0 \\ \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad I = \int_{-1}^{1} \rho(t)\,\mathrm{d}t$$

On commence par déterminer la forme des dérivées nième de g sur $\mathbb{R}^{+*}$.

PROPOSITION : Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, la suite de fonctions $(f * \rho_n)$ a la régularité de ρ_n.

Nous allons voir maintenant que cette suite de fonctions () converge "presque" simplement vers f sur $\mathbb{R}$.

(c) Approximation régulière de f

LEMME : Avec les notations précédentes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f * \rho_n(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-u)\rho_n(u)\,\mathrm{d}u$$

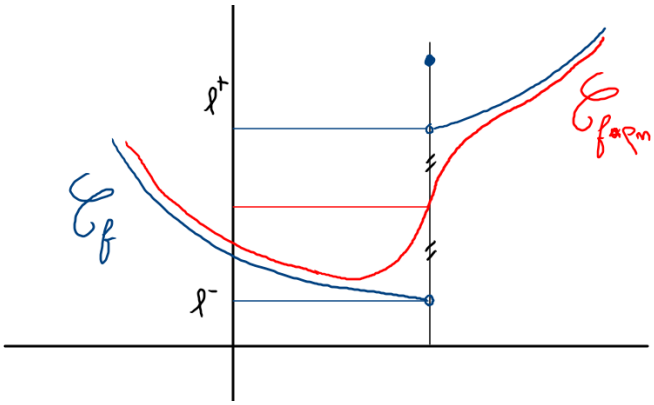
D/ Immédiat avec un changement de variables.

THÉORÈME : **CVS sur $\mathbb{R}$**

Pour f continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
Si (ρ_n) est une suite régularisante, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(f * \rho_n)(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} f(x) & \text{si } f \text{ est continue en } x \\ \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-)) & \text{sinon} \end{cases}$$

D/ Avec les epsilons...



COROLLAIRE : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$.
Il existe une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^\infty$ qui converge simplement vers f.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} f(x)$$

D/ Immédiat !

(d) Théorème de type "Weierstrass"

Ici, f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

THÉORÈME : **CVU sur $[a,b]$**

Soit (ρ_n) une suite de fonctions régularisantes de classe $\mathcal{C}^\infty$.
Pour tout $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$, nous avons :

$$(f * \rho_n) \overset{CVU}{\underset{[a,\ b]}{\to}} f$$

Preuve : Même méthode que pour la CVS, mais en pensant à utiliser le théorème de Heine.

COROLLAIRE : **Existence d'une suite (f_n) de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ qui CVU vers f sur $[a, b]$**

Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$.
Pour tout $[a,\ b] \subset \mathbb{R}$, Il existe une suite de fonctions (f_n) de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que :

$$(f_n) \underset{[a,\ b]}{\overset{CVU}{\to}} f$$

D/ Immédiat

Remarque : Le théorème de Weierstrass est plus précis puisqu'il dit que (f_n) peut être polynomiale.