
Espaces Préhilbertiens Réels



Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

28 février 2025

Table des matières

1	Produits Scalaires	1
2	Espaces Euclidiens	4
3	Sous-espaces vectoriels orthogonaux	5
4	Projecteur orthogonal sur un sev de dimension finie	8
5	Distance à un SEV et Inégalités de Bessel	13
6	Musculation	15

1 Produits Scalaires

1. Définition :

DÉFINITION : Un produit scalaire sur E est une $\left\{ \begin{array}{l} \text{Forme Bilinéaire Symétrique} \\ \text{Définie Positive} \end{array} \right.$.



Méthode pour montrer que φ est un produit scalaire

1. On montre que φ est une FBS :
 - On montre que $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ avec E un $\mathbb{R}$ -ev
 - On montre que $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
 - On montre que φ est linéaire par rapport à la première variable.
2. On montre que φ est DP :
 - On commence par calculer $\varphi(x, x)$



- On montre que $\varphi(x, x) \geq 0$
- On montre que $\varphi(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$

Définition : Espace Préhilbertien réel / Espace euclidien.

Exemples : Les PS usuels

- Sur $\mathbb{R}^n$ ou $\mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R})$ $\langle x, y \rangle = X^T Y = \sum_{k=1}^n x_k y_k$
- Sur $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$ $\langle A, B \rangle = \text{Tr}(A^T B) = \sum_{1 \leq i, j \leq p} a_{i,j} b_{i,j}$
- Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ $\langle f, g \rangle = \int_a^b f g$ $\langle f, g \rangle = \int_a^b \omega f g$ avec $\omega \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R}^{+*})$
- Sur $\mathbb{R}[X]$ $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P Q$ $\langle P, Q \rangle = \int_0^{+\infty} P(t) Q(t) e^{-t} dt$ $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 \frac{P(t) Q(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

2. Norme Euclidienne :

DÉFINITION : On appelle *norme euclidienne* toute applic^o définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un PS.

Remarque : Un espace euclidien est donc un EVN dont la norme associée est la norme euclidienne.

Exemples : Normes euclidiennes associées aux PS précédents.

Calculs avec les normes euclidiennes :

PROPOSITION :

- $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$



Méthode pour prouver que $x = 0$

Dans un espace préhilbertien, pour montrer qu'un vecteur x est nul, on montre souvent que $\|x\| = 0$. Beaucoup de questions se ramènent à ça :

- Montrer que $\ker f = \{0_E\}$
- Prouver que $a = b$

Exercice : 1

(♥) Montrer que la matrice $A^T A$ est inversible lorsque $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est de rang p .
On pourra rechercher le noyau de $A^T A$.

PROPOSITION : Calculs

- $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
- $\|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$.
- $\langle x + y, x - y \rangle = \|x\|^2 - \|y\|^2$.

**COROLLAIRE : Expression du produit scalaire associé**

$$2\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$$

Cette égalité permet de retrouver le produit scalaire associé à une norme euclidienne.

COROLLAIRE : Égalité du parallélogramme

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Cette égalité permet de justifier qu'une norme n'est pas une norme euclidienne.

THÉORÈME : Inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\forall x, y \in E, \quad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve : $\varphi(t) = \|x + ty\| \dots$

Exemples : Applications aux PS de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$.



Voir exercices 76 et 79 de la banque CCINP.

COROLLAIRE : Inégalité triangulaire (ou de Minkowsky)

$$\forall x, y \in E, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires et de même sens (positivement liés).

Preuve : Par équivalences successives.

Corollaires :

- Une norme euclidienne sur E est une norme sur E
- Tout espace préhilbertien E est un EVN puisqu'il est naturellement muni de la norme euclidienne.
- On a bien entendu la deuxième inégalité triangulaire $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x + y\|$.

3. Continuité du produit scalaire :

PROPOSITION : Le PS est une application bilinéaire continue lorsque E est muni de sa norme euclidienne.

Preuve : On utilise la caractérisation : $|\langle x, y \rangle| \leq 1 \cdot \|x\| \|y\|$.

4. Vecteurs orthogonaux : $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel.

Définition : On dit que les vecteurs x et y sont orthogonaux (noté $x \perp y$) lorsque $\langle x, y \rangle = 0$.

Exemple : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur et c'est le seul.

Définition : Famille de vecteurs orthogonale / orthonormale.

Proposition : $\heartsuit$ Une famille orthogonale ne comportant pas le vecteur nul est libre.

Théorème : Pythagore et généralisation.



2 Espaces Euclidiens

1. Définition : Base Orthonormée

- Espace euclidien
- Notion de base orthonormale
- Les bases canoniques de $\mathbb{R}^n$ et de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ sont des bon pour les PS usuels.

THÉORÈME : Tout espace euclidien admet des bases orthonormales.

Preuve : Voir plus loin le procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

2. Vecteurs et matrices dans une bon :

THÉORÈME : **Coordonnées d'un vecteur dans une bon**

Dans une bon e , on a :
$$x = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle e_k.$$

COROLLAIRE : **Terme général de la matrice d'un endomorphisme dans une bon**

La matrice de $u \in \mathcal{L}(E)$ dans une bon e a pour coefficient général : $a_{ij} = \langle u(e_j), e_i \rangle.$

Exemple : Montrer que $\text{Tr}(u) = \sum_{k=1}^n \langle u(e_k), e_k \rangle$ lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ dans une bon $(e_1, \dots, e_n)$.

——— *Exercice : 2* ———

(♥) Soit $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$ où E est muni d'une bon e et $A = \text{Mat}_e(x_1, \dots, x_p)$.
Montrer que $A^T A = (\langle x_i, x_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p}$.

3. Expression du PS et de la norme dans une bon :

PROPOSITION : **Produit scalaire dans une bon**

La donnée d'une bon e détermine le produit scalaire associé à E .

Dans cette bon e , en notant X et Y les coordonnées de x et y , nous avons :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k = X^T Y \quad \text{et} \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n x_k^2} = \sqrt{X^T X}$$



Identification d'un espace euclidien à $\mathbb{R}$ euclidien usuel

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ euclidien.

On note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans une bon e .

L'application $\varphi : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ usuel est un isomorphisme qui conserve le PS.

$$x \mapsto (x_1, \dots, x_n)$$

♡ En d'autres termes, lorsque E est muni d'une bon, il se comporte donc comme $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel.

4. Représentation d'une forme linéaire :

THÉORÈME : Théorème de Riesz (Dans E euclidien !)

Pour tout $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$, il existe un unique $a \in E$ tel que : $\forall x \in E, \varphi(x) = \langle a, x \rangle$.

Si e est une bon, on a :
$$a = \sum_{k=1}^n \varphi(e_k) e_k.$$

Preuve : $\Phi : E \longrightarrow \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ où $\varphi_a(x) = \langle a, x \rangle$ est un isomorphisme (dimension + injectivité).

$$a \mapsto \varphi_a$$

Exemple : Si $\varphi \in \mathcal{L}(\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, alors il existe un unique $A \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(M) = \text{Tr}(AM)$.

Attention : ⚠ Comme le montre l'exercice suivant, le théorème de Riesz est faux en dimension infinie.

Exercice : 3

(*) Soit θ la forme linéaire définie par $\theta(P) = P(0)$ sur $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$.
 Montrer qu'il n'existe pas de polynôme A tel que : $\theta(P) = \langle P, A \rangle, \quad \forall P \in E$.

On suppose que A existe et on considère le polynôme $P = XA$.

3 Sous-espaces vectoriels orthogonaux

Soit E un espace préhilbertien réel.

1. Orthogonal d'une partie :

Définition : Orthogonal d'une partie de E .

Exemples : $E^\perp, \{0_E\}^\perp$

PROPOSITION : $A^\perp$ est un sev fermé de E muni de sa norme euclidienne.



Preuve :

- Sev : Facile
- Fermeture : $A^\perp$ est une intersection d'images réciproques de fermés par une application continue.
On peut également procéder par caractérisation séquentielle.

PROPOSITION :

- $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
- $A \subset (A^\perp)^\perp$
- $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$



Utilisation de $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$

Lorsque $F = \text{Vect}(f_1, \dots, f_p)$.

- Pour montrer que : $x \in F^\perp$

On montre simplement que $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle x, f_k \rangle = 0$.

- Pour déterminer : $F^\perp$

On procède par équivalences successives. Soit $x \in E$.

$$x \in F^\perp \iff \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \langle x, f_k \rangle = 0$$

On obtient ainsi un système de p équations que l'on résout...

Exemple : Déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$.

Voir exercice 39 de la banque CCINP.

DÉFINITION : On dit que deux sev F et G sont orthogonaux lorsque :

$$\forall f \in F, \forall g \in G, \langle f, g \rangle = 0$$

PROPOSITION :

$$F \perp G \iff F \subset G^\perp \iff G \subset F^\perp$$

2. Somme directe orthogonale :

LEMME : Si $F \perp G$, alors on a $F \cap G = \{0_E\}$.

Pour évoquer cette propriété, $F \perp G$ sera souvent noté : $F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Exemple : Les sev F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale : $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.



DÉFINITION : Lorsque les sev $F_1, \dots, F_p$ sont deux à deux orthogonaux, on a $F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$. On dit alors qu'ils sont en somme directe orthogonale et leur somme est notée :

$$F = \bigoplus_{1 \leq k \leq p} F_k$$

Preuve : Supposons que $x_1 + \dots + x_p = 0$ alors... $\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, x_k = 0$. CQFD



Méthode de construction d'une bon

Lorsque $F = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_p$.

On obtient une bon de F en concaténant des bon de chacun des F_k .

3. Supplémentaire orthogonal d'un sev de dimension finie :

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Supplémentarité de l'orthogonal en dimension finie**

Si F est un sev de dimension FINIE de E , alors : $E = F \oplus F^\perp$.

On dit que $F^\perp$ est le *supplémentaire orthogonal* de F dans E .

Preuve : De façon usuelle par analyse/synthèse en se plaçant dans une bon de F .

C'est ce théorème qui permet de définir la projection orthogonale sur un sev de dimension finie.

COROLLAIRE :

- Lorsque E est de dimension finie nous avons : $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$
- Lorsque F est de dimension finie nous avons : $(F^\perp)^\perp = F$

Preuve :

- Le cas où $\dim E < +\infty$ est immédiat.
- Lorsque seulement $\dim F < +\infty$, on montre $(F^\perp)^\perp = F$ par double inclusion.

Exemple : Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ euclidien usuel, on a : $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$



A savoir sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$

- $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) = \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ avec pour tout $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$: $A = \underbrace{\frac{A + A^T}{2}}_{\in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})} + \underbrace{\frac{A - A^T}{2}}_{\in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})}$.
- $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$
- $A \mapsto A^T$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Voir exercices 77 et 92 de la banque CCINP.



4. Vecteur normal à un hyperplan en dimension finie : E est ici un espace euclidien

THÉORÈME : Vecteur normal à un hyperplan

Si H est un hyperplan de E euclidien, alors il existe $n \in E$ tel que $H^\perp = \text{Vect}(n)$ et donc :

$$H = n^\perp$$

Tout vecteur $n \in H^\perp$ convient et est appelé un *vecteur normal* à H .
 $\text{Vect}(n)$ est appelée la *droite normale* à H .

Preuve :

- Soit avec le théorème de Riesz (déterminer alors un vecteur n qui convient)
- Soit en s'intéressant aux dimensions

Exemples :

1. Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, déterminer un vecteur normal à $H : 2x - y + z + 3t = 0$.
2. Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ euclidien usuel, déterminer un vecteur normal à $H = \{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{Tr}(M) = 0\}$.

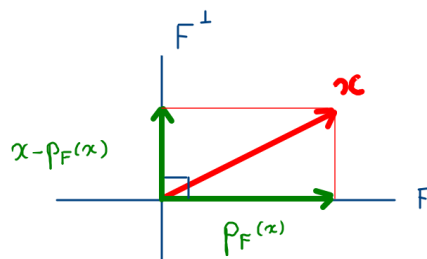
4 Projecteur orthogonal sur un sev de dimension finie

Ici, E est un espace préhilbertien réel et F est un sev de dimension finie.

1. Projecteur orthogonal :

D'après le théorème fondamental précédent, nous avons : $E = F \oplus F^\perp$.
 On peut alors définir...

DÉFINITION : Le projecteur orthogonal sur F (notée p_F) est le projecteur sur F parallèlement à $F^\perp$.



Exemples : Les projecteurs orthogonaux triviaux

- Si $F = \{0_E\}$, alors $p_F = 0$.
- Si $F = E$, alors $p_F = \text{id}_E$.

Voir exercice 80 de la banque CCINP.

PROPOSITION :

- $p_F^2 = p_F$
- $\text{Sp}(p_F) \subset \{0, 1\}$
- p_F est diagonalisable
- $F = \text{Im } p_F = \ker(p_F - \text{id}_E)$
- $F^\perp = \ker p_F$.
- $p_{F^\perp} = \text{id}_E - p_F$.
- $s_F = 2p_F - \text{id}_E$



Preuve : Résultats usuels sur les projecteurs orthogonaux.



Méthode pour montrer que p est un projecteur orthogonal

Dans un espace euclidien E .

- On vérifie que $p \in \mathcal{L}(E)$
- On montre que $p \circ p = p$ ce qui prouve que p est un projecteur
- On montre que $\ker p \perp \operatorname{Im} p$. ($\Rightarrow \ker p = (\operatorname{Im} p)^\perp$ avec les dimensions)

Exemple : Montrer que $A \mapsto \frac{A - A^T}{2}$ est un projecteur orthogonal de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ euclidien usuel.

Exemple : Montrer que les projecteurs spectraux de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ sont des projecteurs orthogonaux.



Méthode pour montrer que s est une symétrie orthogonale

Dans un espace euclidien E .

- On vérifie que $s \in \mathcal{L}(E)$
- On montre que $s \circ s = \operatorname{id}_E$ ce qui prouve que p est une projection
- On montre que $\ker(s - \operatorname{id}_E) \perp \ker(s + \operatorname{id}_E)$.

Rappel : $s_F = 2p_F - \operatorname{id}_E$ lorsque $\begin{cases} s_f \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à } F \\ p_f \text{ est le projecteur orthogonal sur } F \end{cases}$.

Exemple : Montrer que la transposition est une symétrie orthogonale de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ euclidien usuel.



Méthode pour déterminer le projecteur orthogonal par rapport à $\operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_p)$

- Méthode 1 : Si $(f_1, \dots, f_p)$ est une base quelconque.

Soit $x \in E$. On cherche $p(x) = \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_p f_p$ tel que $\begin{cases} \langle x - p(x), f_1 \rangle = 0 \\ \dots \\ \langle x - p(x), f_p \rangle = 0 \end{cases}$. (+ Gauss)

- Méthode 2 : Si $(f_1, \dots, f_p)$ est une bon.



Dans ce cas, on dispose de la formule suivante : $p(x) = \sum_{k=1}^p \langle x, f_k \rangle f_k$ (cf plus loin)

2. Exemple : Déterminer le projecteur orthogonal sur $F = \text{Vect}(I_2, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$.

- Méthode 1 :
- Méthode 2 :

Exercice : 4

(♥) Soit p un projecteur de E .

Montrer que p est un projecteur orthogonal SSI pour tout $x \in E$, on a $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Preuve :

$\Rightarrow$ Facile en décomposant $x = p(x) + (x - p(x))$...

$\Leftarrow$ Par contraposée. On suppose qu'il existe $(f, g) \in F \times G$ tels que $\langle f, g \rangle \neq 0$.

On trouve alors un x tel que $\|p(x)\| > \|x\|$ en cherchant x sous la forme $x = f + \lambda g$.

La proposition « p projecteur orthogonal $\Rightarrow \|p(x)\| \leq \|x\|$ » sera utilisée pour prouver l'inégalité de Bessel.

3. Expression du projeté orthogonal :

THÉORÈME FONDAMENTAL : Expression d'un projecteur orthogonal dans une bon de F

Lorsque $(f_1, \dots, f_p)$ est une bon de F , on a pour tout $x \in E$:

$$p_F(x) = \sum_{k=1}^p \langle x, f_k \rangle f_k$$

Preuve : Conséquence du théorème sur le supplémentaire orthogonal.



Cas particuliers à connaître impérativement

- Si $F = \text{Vect}(a)$, alors $p_F(x) = \langle x, \frac{a}{\|a\|} \rangle \frac{a}{\|a\|}$.
- Si $F = a^\perp$, alors $p_F(x) = x - \langle x, \frac{a}{\|a\|} \rangle \frac{a}{\|a\|}$.

Exemples : Vous devez en particulier savoir reconnaître les transformations suivantes lorsque $\|a\| = 1$.

$x \mapsto x - \langle x, a \rangle a$		$x \mapsto x - 2\langle x, a \rangle a$	
$x \mapsto \langle x, a \rangle a - x$		$x \mapsto 2\langle x, a \rangle a - x$	



Exercice : 5

(♥) Soit $e = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormale de E et p le projecteur orthogonal sur un plan F de E .
Montrer que : $\|p(\vec{i})\|^2 + \|p(\vec{j})\|^2 + \|p(\vec{k})\|^2 = 2$.

4. Continuité des projecteurs : (Compléments!)

PROPOSITION : Continuité d'un projecteur

- Les projecteurs d'un espace euclidien sont continus
- Les projecteurs orthogonaux sont continus (même si $\dim E = +\infty$)

Preuve :

- Dans un espace euclidien les projecteurs sont linéaires au départ d'un ev de dimension finie.
- Les projecteurs orthogonaux sont des endomorphismes qui vérifient $\|p(x)\| \leq \|x\|$.

Remarque : Dans les autres cas, les projecteurs n'ont aucune raison d'être continus.

COROLLAIRE : Structure topologique d'un sev de dimension finie

- Les sev d'un espace vectoriel de dimension finie sont des fermés
- Les sev de dimension finie d'un espace préhilbertien sont des fermés

Preuve : Soit F un sev de dimension finie.

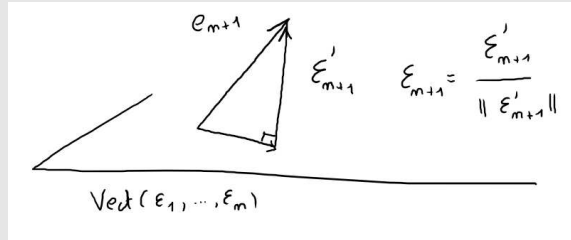
- Lorsque E est euclidien, on peut introduire p le projecteur sur F parallèlement à un suppl. G .
On a alors $F = \ker(p - \text{id}_E) = (p - \text{id}_E)^{-1}(\{0_E\})$ avec $p - \text{id}_E$ continu et $\{0_E\}$ un fermé.
- Lorsque E est préhilbertien, on peut introduire p le projecteur orthogonal sur F .

Remarque : Plus généralement, TOUS les sev de dimension finie sont des fermés (déjà vu!).

5. Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt :


THÉORÈME : Orthonormalisation de Gram-Schmidt

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille libre de vecteurs de E .



Il existe alors une UNIQUE famille orthonormale $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ telle que $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

- $\text{Vect}(x_1, \dots, x_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$
- $\langle x_k, \varepsilon_k \rangle > 0$.

$$\varepsilon_{k+1} = \frac{x_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle x_{k+1}, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i}{\|x_{k+1} - \sum_{i=1}^k \langle x_{k+1}, \varepsilon_i \rangle \varepsilon_i\|}$$

On dit que la famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est l'orthonormalisée de $(x_1, \dots, x_n)$ par le procédé de Schmidt.

Preuve :

- Existence : la famille proposée convient bien.
- Unicité : Par récurrence.
On remarque que $\varepsilon_{n+1} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_{n+1}) \cap \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)^\perp$ qui est de dimension 1 d'après Grassmann.


Application à la base $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$

Lorsqu'on applique l'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base canonique de $\mathbb{R}[X]$, on obtient une famille orthonormée de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$:

- $\deg(P_n) = n$
- $(P_0, \dots, P_n)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$
- $P_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$

PROPOSITION : Matrice de passage associée

La matrice de passage P_e^ε est triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs.

On en déduit qu'une base et son orthonormalisée par Schmidt ont la même orientation. (cf autre chapitre)

Exemple : Prendre un exemple dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}_2[X]$ et dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

PROPOSITION : Toute famille orthonormale peut être complétée en une bon.


Quelques applications usuelles de Gram-Schmidt

Les applications suivantes seront explicitées dans un chapitre ultérieur.

- Décomposition QR : En appliquant la formule $P_e^f P_f^g = P_e^g$, on montre grâce à Gram-Schmidt que



tout matrice réelle inversible A se décompose sous la forme :

$$A = QR \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q \text{ orthogonale} \\ R \text{ triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs} \end{cases}$$

- Décomposition Cholesky : Grâce à Gram-Schmidt, on peut montrer que toute matrice A symétrique définie positive se décompose sous la forme :

$$A = P^T P \quad \text{avec} \quad P \text{ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs}$$

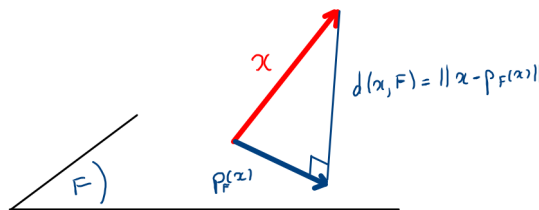
- Inégalité de Hadamard : On peut utiliser cette décomposition pour prouver que pour toute matrice symétrique positive A , on a :

$$\det(A) \leq \prod_{k=1}^n a_{k,k}$$

5 Distance à un SEV et Inégalités de Bessel

1. Distance à un sev :

Soit F un sev de E tel que $F \oplus F^\perp = E$ (vrai en particulier lorsque $\dim F < +\infty$)



THÉORÈME : Distance à un sev

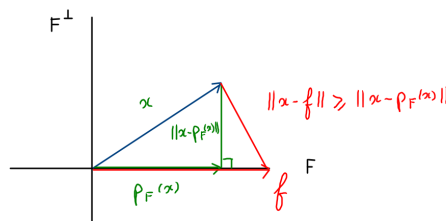
Soit $x \in E$.

La distance de x à F est atteinte en une unique valeur $p_F(x)$.

$$d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|q_F(x)\|$$

Preuve :

- Existence : Pour tout $f \in F$, on a $\|x - f\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|f - p_F(x)\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2$.



- Unicité : Soit f une autre valeur où la distance est atteinte. On a alors :

$$\|x - p_F(x)\|^2 = \|x - f\|^2 = \|(x - p_F(x)) + (p_F(x) - f)\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - f\|^2$$

D'où $\|p_F(x) - f\|^2 = 0$.


DÉFINITION : Vecteur de Meilleure Approximation (PMA)

Comme pour tout $f \in F$, on a $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - f\|$, on dit que :

$p_F(x)$ est le vecteur de meilleure approximation de x dans F

Ce vecteur est unique !

Exercice : 6

(*) **Pseudo-solution d'un système linéaire** $AX = B$

Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Lorsque le système $AX = B$ n'a pas de solution, on appelle *pseudo-solution* les valeurs de $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ qui minimisent la norme $\|AX - B\|$.

Montrer l'existence et expliciter une méthode permettant de trouver une pseudo-solution.

- Distance à une droite vectorielle : $d(x, \text{Vect}(a)) = \|x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a\|.$

COROLLAIRE :

- Distance à un hyperplan : $d(x, a^\perp) = \frac{|\langle x, a \rangle|}{\|a\|}.$

Exemple : Distance de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ à l'hyperplan constitué des matrices de trace nulle.

Exercice : 7

(*) Calculer : $\inf_{(a, b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - (at + b))^2 dt.$

Classique... On trouve $\frac{1}{180}$.

Voir exercices 81 et 82 de la banque CCINP.

2. Inégalité de Bessel :

LEMME : Lorsque p est un projecteur orthogonal, on a : $\forall x \in E, \quad \|p(x)\|^2 \leq \|x\|^2.$

D/ Facile.

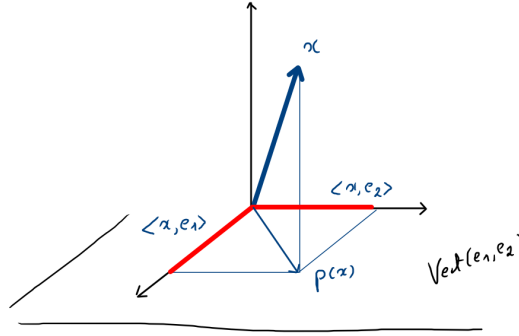

THÉORÈME : Inégalité de Bessel (cas fini)

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs orthonormaux de E .

Pour tout $x \in E$, on a :

$$\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Avec égalité lorsque e est une base de E .



Preuve : On remarque que $\sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle^2 = \|p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2$ où $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

COROLLAIRE : Inégalité de Bessel (cas où $\dim E = +\infty$)

Soit $(e_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille orthonormale infinie.

Le théorème précédent prouve la convergence de la série $\sum \langle x, e_n \rangle^2$ et que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle^2 \leq \|x\|^2$$

Preuve : Théorème de comparaison des SATP.

6 Musculation

Nous commençons ici par introduire et étudier quelques propriétés de la notion générale de *système orthogonal* de $\mathbb{R}[X]$ avant d'en présenter par la suite, quelques exemples très classiques tels les polynômes de Legendre, de Tchebychev et de Laguerre.

1. Système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$.

DÉFINITION : Système orthogonal (SO) de $\mathbb{R}[X]$

Dans $\mathbb{R}[X]$ préhilbertien réel.

On appelle *système orthogonal* de $\mathbb{R}[X]$, toute famille de polynômes $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant :

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = n$
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est unitaire
- La famille (P_n) est orthogonale



1. Existence.

Montrer l'existence d'une famille vérifiant les conditions précédentes.

2. Unicité.

- (a) Montrer que pour tout n , $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
- (b) Montrer que pour tout n , on a $P_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^\perp$
- (c) En déduire (sans passer par une récurrence) l'unicité de cette famille.

On suppose désormais que $\mathbb{R}[X]$ est muni d'un produit scalaire usuel de la forme $\langle P, Q \rangle = \int_I P(t)Q(t)\omega(t) dt$ avec ω une fonction continue et strictement positive sur I .

3. Relation de récurrence.

Nous recherchons ici une relation de récurrence permettant de déterminer les polynômes P_n .

- (a) Montrer que pour tout $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$, on a $\langle PQ, R \rangle = \langle P, QR \rangle$.
- (b) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $\lambda_n, \mu_n \in \mathbb{R}$ tels que $P_n = (X - \lambda_n)P_{n-1} - \mu_n P_{n-2}$.

On s'intéressera au polynôme $P_n - XP_{n-1}$.

- (c) Montrer que $\lambda_n = \frac{\langle XP_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}$ et que $\mu_n = \frac{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}{\langle P_{n-2}, P_{n-2} \rangle}$.

4. Racines de P_n .

On suppose que P_n admet $p < n$ racines distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ d'ordre impair. Soit $Q = (X - \lambda_1) \dots (X - \lambda_p)$.

- (a) Justifier que $P_n Q$ est positif.
- (b) En déduire que P_n admet n racines distinctes dans I .

5. Comparaison des racines de P_n et de P_{n+1} .

- (a) Prouver par récurrence, que pour tout $x, t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^n \frac{P_k(x)P_k(t)}{\langle P_k, P_k \rangle} = \frac{1}{\langle P_n, P_n \rangle} \cdot \frac{P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)}{x - t}$$

On pourra utiliser la relation de récurrence démontrée en question 3. et poser $k_n = \langle P_n, P_n \rangle$.

L'hérédité se traite bien en calculant $P_{n+1}(x)P_n(t) - P_n(x)P_{n+1}(t)$ avec l'hypothèse de récurrence.

- (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P'_{n+1}(x)P_n(x) - P'_n(x)P_{n+1}(x) > 0$.
- (c) En déduire que les racines de P_n et de P_{n+1} sont entrelacées.
On pourra faire un dessin pour visualiser la propriété induite par la relation précédente.



Systèmes orthogonaux usuels

Au coefficient dominant près :

- Le SO de $\mathbb{R}[X]$ associé à $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg$ est appelé *famille des polynômes de Legendre*
- Le SO de $\mathbb{R}[X]$ associé à $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$ est appelé *famille des polynômes de Tchebychev*



- Le SO de $\mathbb{R}[X]$ associé à $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$ est appelé *famille des polynômes de Laguerre*

2. Polynômes de Legendre : $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ est muni de $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg$.

DÉFINITION : Polynômes de Legendre

Les polynômes de Legendre sont les polynômes définis par :

$$L_n = ((X^2 - 1)^n)^{(n)} = U_n^{(n)} \quad \text{avec} \quad U_n = (X - 1)^n (X + 1)^n$$

Exemples : $L_0 = 1$, $L_1 = 2X$, $L_2 = 4(3X^2 - 1)$.

PROPOSITION :

1. 1 et -1 sont racines de $U_n^{(k)}$ d'ordre $n - k$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
2. Le coefficient dominant de L_n est $\frac{(2n)!}{n!} X^n$.
3. $L_n \perp \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. L_n admet n racines distinctes dans $] -1, 1[$.

Preuve :

1.2. Faciles.

3. Pour $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, par IPP successives, on obtient :

$$\langle L_n, Q \rangle = (-1) \langle U_n^{(n-1)}, Q' \rangle = \dots = (-1)^n \langle U_n, Q^{(n)} \rangle = 0$$

4. Avec le théorème de Rolle appliqué à U_n puis à $U_n^{(n-1)}$... etc...

COROLLAIRE : Système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$

La famille de polynômes $\left(\frac{n!}{(2n)!} L_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ est le système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg$$

D/ Compte-tenu des propriétés précédentes, cette famille vérifie bien les conditions de la définition.

COROLLAIRE : PMA

Pour la norme euclidienne associée au produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 fg$.

$$P_N = \sum_{n=0}^N \frac{\langle f, L_n \rangle}{\|L_n\|^2} L_n \quad \text{est le polynôme de meilleure approximation de } f \text{ dans } \mathbb{R}_N[X].$$

3. Polynômes de Tchebychev : $E = \mathcal{C}([-1, 1], \mathbb{R})$ est muni de $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$.

THÉORÈME : Polynômes de Tchebychev

Pour tout n , il existe un unique polynôme T_n vérifiant $\forall \theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(n\theta) = T_n(\cos \theta)$$

Preuve : Existence avec la formule de Moivre. L'unicité est classique.



Exemple : $T_0 = 1, T_1 = X, T_2 = 2X^2 - 1, T_3 = 4X^3 - 3X$.

PROPOSITION : Formule

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} X^{n-2k} (1-X^2)^k$$

D/ Découle de la démonstration précédente.

PROPOSITION : Formule de récurrence

Pour tout n , on a :

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

On démontre alors facilement par une récurrence double que T_n admet $2^{n-1}X^n$ pour terme dominant.

Preuve : Découle directement de la formule $\cos((n+2)t) + \cos((n)t) = 2\cos t \cos((n+1)t)$.

PROPOSITION : Système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$

La famille $\left(\frac{1}{2^{n-1}}T_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est le système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$$

D/ Il reste à vérifier que la famille est orthogonale.

PROPOSITION : PMA

Pour la norme euclidienne associée au produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 \frac{f(t)g(t)}{\sqrt{1-t^2}} dt$

Le polynôme $P_N = \sum_{n=0}^N \frac{\langle f, T_n \rangle}{\|T_n\|^2} T_n$ est le polynôme de meilleure approximation de f dans $\mathbb{R}_N[X]$.

4. Polynômes de Laguerre : $E = \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ est muni de $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$.

DÉFINITION : Polynômes de Laguerre

Les polynômes de Laguerre sont les polynômes L_n définis pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n)$$

Exemples : $L_0 = 1, L_1 = 1 - X, L_2 = \frac{1}{2}(X^2 - 4X + 2) \dots$

PROPOSITION : Forme explicite

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $L_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \binom{n}{k} x^k$.

On en déduit que les fonctions L_n sont bien polynomiales et de coefficient dominant $\frac{(-1)^n}{n!} x^n$.

D/ Il suffit d'appliquer la formule de Liebniz.

PROPOSITION : Le polynôme L_n de Laguerre est solution de l'équation différentielle :

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0$$

D/ Non traitée car fait appel à des résultats intermédiaires non évoqués ici.



COROLLAIRE : Système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$

La famille $((-1)^n L_n)_n$ est un système orthogonal de $\mathbb{R}[X]$ pour le produit scalaire :

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)e^{-t} dt$$

Preuve : Pour montrer l'orthogonalité de la famille.

- On montre par IPP que $T : P \rightarrow xP'' - (x-1)P'$ est un endomorphisme autoadjoint de $\mathbb{R}[X]$.
- On vérifie alors que lorsque $n \neq p$, on a $\langle L_n, L_p \rangle = 0$ en remarquant que $-nL_n = XL_n'' - (X-1)L_n'$.

COROLLAIRE : PMA

Pour la norme euclidienne associée au produit scalaire : $\langle f, g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t)e^{-t} dt$

Le polynôme $P_N = \sum_{n=0}^N \frac{\langle f, L_n \rangle}{\|L_n\|^2} L_n$ est le polynôme de meilleure approximation de f dans $\mathbb{R}_N[X]$.