Les Séries Entières

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

7 mars 2025

1. On commence par étudier les séries de fonctions de la forme $\sum u_n$ où $u_n(z) = a_n z^n$ avec $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $z \in \mathbb{C}$.
   On définira à cette occasion la notion de "Rayon de convergence" R de la série.

2. On poursuit l'étude de ces séries en imposant que la variable z soit réelle (on l'appellera alors x).
   Nous verrons alors que les sommes de ces séries sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,\ R[$ et nous donnerons l'expression des dérivées successives.

3. On s'intéresse ensuite aux fonctions de variables réelles dont l'expression au voisinage de 0 peut s'exprimer comme la somme d'une série de la forme précédente. Nous verrons en particulier comment déterminer cette expression appelée "Développement en Série Entière"de la fonction.

4. On s'intéresse de nouveau à la somme d'une série entière en cherchant à en déterminer un expression à l'aide des fonctions usuelles. Nous utiliserons pour cela, les développements en série entière usuels et des méthodes utilisant la dérivation, la primitivation ou une équation différentielle.

5. On verra enfin des applications des séries entières au calcul d'intégrale avec un théorème d'ITT, à la recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle ou à l'étude $\mathcal{C}^\infty$.

Table des matières

1 Convergence des séries entières

Dans cette partie, nous introduisons les notions de base permettant l'étude des séries entières.
En particulier, nous allons :

- Définir le domaine de convergence et le rayon de convergence R d'une série entière $\sum a_n z^n$ et proposer trois méthodes usuelles permettant de le calculer :
  - $\rightarrow$ Méthode 1 : Par application de la règle de d'Alembert
  - $\rightarrow$ Méthode 2 : Par comparaison avec d'autres séries
  - $\rightarrow$ Méthode 3 : Par particularisation (avec des valeurs particulières de z)
- Constater que les séries entières CVS sur $\mathcal{B}(0,\ R)$ et CVN sur $\mathcal{B}_f(0,\ r)$ avec $0 < r < R$.
- Etudier les rayons de convergence d'une somme et d'un produit de séries entières.

1. Définition d'une série entière :

DÉFINITION :

- Série entière : $\sum u_n$ où $u_n(z) = a_n z^n$ avec $z \in \mathbb{C}$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

  Par abus de notation, une série entière sera notée : $\sum a_n z^n$.

- Domaine de convergence : l'ensemble $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid \ \sum a_n z^n \text{ converge } \}$

- Somme d'une série entière : $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$

Exemples :

- Les fonctions polynômiales sont des sommes de séries entières.
- $\sum z^n$ converge pour $|z| < 1$ et dans ce cas, sa somme vaut $S(z) = \dfrac{1}{1-z}$.
- $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge sur $\mathbb{C}$ et par définition on a : $\quad e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$

---

2. Rayon de convergence et Domaine de convergence :

On s'intéresse ici à la forme du domaine de convergence d'une série entière.

DÉFINITION : **Rayon de convergence**

Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est : $\qquad R = \sup\ \{r \geq 0 \mid (a_n r^n) \text{ bornée } \}$.

Si $(a_n r^n)_n$ est bornée pour tout $r > 0$, alors on dira que $R = +\infty$.

Exemples :

$R = 1$ pour $\sum z^n$. $\qquad R = +\infty$ pour $\sum \dfrac{z^n}{n!}$. $\qquad R = 0$ pour $\sum n! z^n$.

Exemples : En particulier, lorsque (a_n) est bornée, on a $R \geq 1$.

Remarque : ♡ $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ont même rayon de convergence.

Lemme : Lemme d'Abel

Lorsque $(a_n z_0^n)$ est bornée, $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $|z| < |z_0|$.

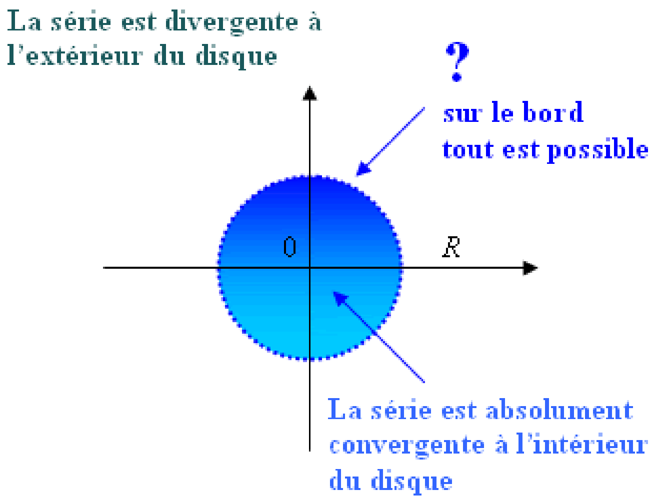
Preuve : $|a_n z_0^n| \leq M$ donc lorsque $|z| < |z_0|$, on a : $|a_n z^n| = |a_n z_0^n \frac{z^n}{z_0^n}| \leq M|\frac{z}{z_0}|^n$.

Théorème Fondamental : Zones de convergence et de divergence

Soit $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et $z \in \mathbb{C}$.

- Si $|z| < R$ alors la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.
- Si $|z| > R$ alors la série diverge grossièrement.

Preuve :
- Il existe r tel que $|z| < r < R$ avec $(a_n r^n)$ bornée. On applique alors le lemme d'Abel.
- $(a_n z^n)$ n'est même pas bornée.



Remarque : Les domaines de convergence de $\sum a_n z^n$ et $\sum |a_n| z^n$ ne diffèrent que sur la sphère $\mathcal{S}(0,\ R)$.

Définition : Disque ouvert de convergence

Pour $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R.

$D(0,\ R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ est appelé *le disque ouvert de convergence*

Corollaire : Domaine de convergence de $\sum a_n z^n$:

- Lorsque $R = 0$ on a : $\mathcal{D} = \{0\}$.
- Lorsque $R > 0$ on a : $D(0,\ R) \subset \mathcal{D} \subset D_f(0,\ R)$.
- Lorsque $R = +\infty$ on a : $\mathcal{D} = \mathbb{C}$.

Et sur la frontière ?

La série peut également converger en certains points de la frontière du disque.

Exemple : $\sum \frac{z^n}{n}$

COROLLAIRE : Le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ est également défini par :

$$R = \sup\{|z| \mid \sum |a_n z^n| \text{ converge}\}$$

Exercice : 1

($*$) Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ sachant que $\sum a_n z_0^n$ est semi convergente.

3. Calcul du rayon de convergence :

(a) Methode 1 : **Avec la règle de d'ALEMBERT**

On cherche les valeurs de z pour lesquelles la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Détermination du rayon de CVG par d'Alembert

Lorsque : $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \to l|z| \in \bar{\mathbb{R}}^+$.

- si $l|z| < 1$ cad si $|z| < \frac{1}{l}$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge et donc $R \geq \frac{1}{l}$
- si $l|z| > 1$ cad si $|z| > \frac{1}{l}$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge et donc $R \leq \frac{1}{l}$

Conclusion : $R = \frac{1}{l}$ si $l > 0$ et $R = +\infty$ si $l = 0$.

⚠ *Cette méthode ne marche que si* $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ *admet une limite calculable... Ce qui très fréquemment le cas !*

Exemples :

- Pour $\sum (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}(n-1)2^n z^n$ on a $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \to 2|z|$ donc $R = 1/2$.
- Pour $\sum \frac{z^n}{(2n)!}$ on a $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \to 0$ donc $R = +\infty$.
- Pour $\sum \frac{n-1}{n^2+1}z^n$ on a $\frac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \to |z|$ donc $R = 1$.

♡ *Plus généralement, lorsque a_n est une fonction* $\left\{\begin{array}{l}\textit{rationnelle}\\ \textit{ou}\\ \textit{polynomiale}\end{array}\right.$ *, on aura toujours :* $R = 1$

D'Alembert s'applique aux séries lacunaires **(a_n s'annule parfois)**

Exemples : On applique encore la méthode de d'Alembert

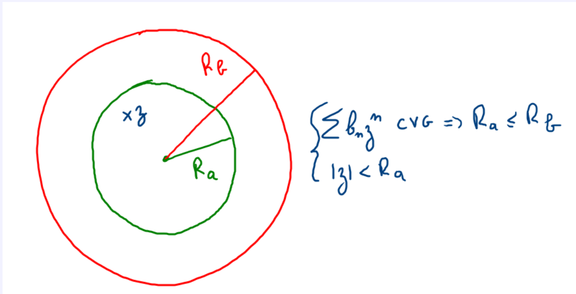
- Pour $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+1}$: On trouve pour limite $|z|^2$ et donc $R = 1$.
- Pour $\sum \dbinom{2n}{n} z^{3n}$: On trouve pour limite $4|z|^3$ et donc $R = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}$

(b) Methode 2 : **Par comparaison entre deux séries**

Pour deux séries entières $\left\{ \begin{array}{l} \sum a_n z^n \\ \sum b_n z^n \end{array} \right.$ de rayons de convergence $\left\{ \begin{array}{l} R_a \\ R_b \end{array} \right.$.

Technique de base pour prouver que $R_a \leq R_b$

On considère z tel que $|z| < R_a$ et on montre que $\sum b_n z^n$ converge absolument.



D/ Par contraposée.

Lemme :

- $|a_n| \leq |b_n| \quad \Rightarrow \quad R_a \geq R_b$ (on inverse l'inégalité)
- $a_n = O(b_n) \quad \Rightarrow \quad R_a \geq R_b$
- $a_n \sim b_n \quad \Rightarrow \quad R_a = R_b$

Preuve : On applique la méthode précédente.

Méthodes de comparaison des Rayons de CVG

- $a_n = O(b_n) \quad \Rightarrow \quad R_a \geq R_b$.
- $|a_n| \leq |b_n| \quad \Rightarrow \quad R_a \geq R_b$.
- $a_n = o(b_n) \quad \Rightarrow \quad R_a \geq R_b$.
- $|a_n| \sim b_n \quad \Rightarrow \quad R_a = R_b$.

On en déduit que :

- si (a_n) est bornée alors $R \geq 1$.
- si $(a_n) \to 0$ alors $R \geq 1$.

Méthode de simplification de la recherche du rayon de convergence

Pour déterminer le Rayon de CVG de $\sum a_n z^n$:

- on commence par rechercher un équivalent $|a_n| \sim b_n$
- on détermine alors le rayon de convergence de $\sum b_n z^n$.

Exemple : Déterminer le rayon de convergence de $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2 + 2^{-n}} z^n$.

Exercice : 2

$(*)$ Déterminer les rayons de convergence des séries entières $\sum\limits_{n\geq 1} d(n)z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} s(n)z^n$ où :

- $d(n)$ est le nombre diviseurs positifs de n.
- $s(n)$ est la somme des diviseurs positifs de n.

(c) Methode 3 : **Par particularisation**

Méthode de détermination du RdC par particularisation

Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$:

- Si $\sum a_n z_0^n$ converge alors $R \geq |z_0|$
- Si $\sum a_n z_0^n$ diverge alors $R \leq |z_0|$

En particulier :

- Si $\sum a_n$ converge alors $R \geq 1$
- Si $\sum a_n$ diverge alors $R \leq 1$ (en particulier : $a_n \not\to 0 \quad \Rightarrow \quad R \leq 1$)

Exemple : Rayon de convergence de $\sum \dfrac{x^n}{n}$?

Exercice : 3

$(*)$ Déterminer le rayon de convergence de $\sum \sin(n) z^n$?

Preuve :

$\rightarrow$ On a $|\sin(n)| \leq 1$ et donc R est supérieur au RdC de la série $\sum 1.z^n$ cad $R \geq 1$.

$\rightarrow$ Comme $\sin(n) \not\to 0$ alors $\sum \sin(n) 1^n$ diverge et donc $R \leq 1$

Exercice : 4

Soit $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ une suite périodique non nulle.
Déterminer le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$.

Preuve :

Méthode pour prouver que $R = +\infty$

Il suffit de vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument

Exercice : 5

On suppose que la suite $\sum a_n z^n$ admet $r > 0$ pour rayon de convergence.
Montrer que la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ admet un rayon de convergence infini.

Preuve :

Voir les exercices 20 et 21 de la banque CCINP.

(d) Synthèse :

Quelques implications à maîtriser :

- $\sum a_n z_0^n$ diverge $\Rightarrow$ $R \leq |z_0|$
- $\sum a_n z_0^n$ converge $\Rightarrow$ $R \geq |z_0|$
- $\sum a_n$ converge $\Rightarrow$ $R \geq 1$
- $\sum a_n$ diverge $\Rightarrow$ $R \leq 1$
- (a_n) est bornée $\Rightarrow$ $R \geq 1$
- $(a_n) \to 0$ $\Rightarrow$ $R \geq 1$
- $(a_n) \not\to 0$ $\Rightarrow$ $R \leq 1$

(e) Rayon de convergence de : $\sum n^\alpha a_n z^n$.

PROPOSITION : Pour tout $\alpha > 0$, les séries $\left\{\begin{array}{l} \sum a_n z^n \\ \sum n^\alpha a_n z^n \\ \sum \frac{a_n}{n^\alpha} z^n \end{array}\right.$ ont le même rayon de convergence.

Preuve : Notons R_a le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ et $R_{n^\alpha a}$ le rayon de convergence de $\sum n^\alpha a_n z^n$.

- Comme $a_n = o(n^\alpha a_n)$, alors $R_a \geq R_{n^\alpha a}$.
- Montrons que $R_a \leq R_{n^\alpha a}$.
  Pour z tel que $|z| < R_a$, on montre que $\sum n^\alpha a_n z^n$ converge.
  On considère r tel que $|z| < r < R_a$ et on a alors $|n^\alpha a_n z^n| = |n^\alpha \left(\frac{z}{r}\right)^n a_n r^n| = o(a_n r^n)$.

COROLLAIRE : Les séries $\left\{\begin{array}{l} \sum a_n z^n \\ \sum n a_n z^n \\ \sum \frac{a_n}{n} z^n \end{array}\right.$ ont même rayon de convergence.

Exercice : 6

$(*)$ Quel est le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{\cos(n)}{n} z^n$?

Voir l'exercice 23 de la banque CCINP.

4. Convergence normale :

THÉORÈME : Convergence normale

Une série entière de rayon de convergence R converge normalement sur $\mathcal{B}_f(0,\ r)$ où $r < R$.

Preuve : Aucune difficulté.

Et sur le disque ouvert de convergence ?

Il n'y a pas forcément CVN ni CVU sur le disque ouvert de convergence.

C/expl : Pour $\sum z^n$ on a $R = 1$ et :

- Il n'y a pas CVN sur $\mathcal{D}(0,1)$ car $\sup\limits_{|z|<1} |z^n| = 1$ et $\sum 1$ diverge.
- Il n'y a pas CVU sur $\mathcal{D}(0,1)$, car sinon, on pourrait appliquer le théorème de limite aux bornes

COROLLAIRE : La somme d'une série entière est continue sur son disque ouvert de convergence.

Preuve : Théorème de continuité sur tout compact de la somme d'une série de fonctions vectorielles.

Exemple : $z \mapsto e^z$ est continue sur $\mathbb{C}$.

5. Somme et produit de séries entières :

(a) Somme :

DÉFINITION : On appelle somme de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$.

PROPOSITION : Avec les notations usuelles :

$$R_{a+b} \geq \min(R_a,\ R_b) \quad \text{avec égalité lorsque} \quad R_a \neq R_b$$

On a alors pour tout $x \in]R_{a+b},\ R_{a+b}[$: $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

Preuve : Pour $|z| < \min(R_a,\ R_b)$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}(a_n + b_n)z^n = \sum_{n=0}^{N} a_n z^n + \sum_{n=0}^{N} b_n z^n$.

Remarque : On peut avoir $R_{a+b} > \min(R_a,\ R_b)$ (par exemple lorsque $b_n = -a_n$).

Exercice : 7

($\heartsuit$) Soit $\sum a_n z^n$ de rayon R_a.
On note R' et R'' les rayons de convergence de $\sum a_{2n} z^{2n}$ et $\sum a_{2n+1} z^{2n+1}$.
Montrer en utilisant la proposition précédente que $R_a = \min(R',\ R'')$.

Preuve :

RUSE : On "remplit" les 2 séries lacunaires en introduisant $\begin{cases} (b_n) \\ (c_n) \end{cases}$ telles que $\begin{cases} b_{2n} = a_{2n} \\ b_{2n+1} = 0 \\ c_{2n+1} = a_{2n+1} \\ c_{2n} = 0 \end{cases}$.

On remarque alors que $R_b = R'$ et que $R_c = R''$.

→ Comme $a_n = b_n + c_n$ on a alors $R_a \geq \min(R_b,\ R_c)$

→ Comme $|b_n| \leq |a_n|$ et que $|c_n| \leq |a_n|$ on a alors $R_b \geq R_a$ et $R_c \geq R_a$ et donc $R_a \leq \min(R_b,\ R_c)$

(b) Produit :

Définition : **Produit de Cauchy de 2 séries entières**

On appelle *Produit de Cauchy* de $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ la série entière $\sum c_n z^n$ avec :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$$

Remarque : Il s'agit bien d'un produit de cauchy de deux séries numériques.

Proposition : **Rayon de Convergence d'un produit de Cauchy**

Pour $|z| < \min(R_a,\ R_b)$, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\Big)$.

Le rayon de convergence R_c de $\sum c_n z^n$ vérifie donc :

$$R_c \geq \min(R_a,\ R_b)$$

Preuve : L'égalité est immédiate par produit de cauchy de deux séries absolument convergentes. On en déduit la minoration de R_c.

Exercice : 8

($*$) Soit $\sum a_n z^n$ de rayon $R \geq 1$.

Etudier le rayon de convergence et la somme de $\sum S_n z^n$ où $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.

On a $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k.1^{n-k}$ et donc $\sum S_n z^n$ est le produit de Cauchy de $\sum a_n z^n$ et de $\sum 1.z^n$

On en déduit que $R \geq 1$ et que pour $|z| < 1$, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} S_n z^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big)\frac{1}{1-z}$.

2 Série entière d'une variable réelle

On se limite dans cette partie au cas où la variable z est réelle.
La série sera alors notée $\sum a_n x^n$ et le rayon de convergence R.

Le but de cette partie est l'étude des propriétés de la somme S définie par :

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n}$$

<u>En particulier nous allons voir que</u> :

- Lorsque $\sum a_n R^n$ converge, alors $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} f(R)$.
- La somme S de la série $\sum a_n x^n$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ et :
  - $\to$ on obtient l'expression des dérivées successives de S en dérivant le terme général $a_n x^n$ dans la somme
  - $\to$ les séries dérivées obtenues ont le même rayon de convergence R que $\sum a_n x^n$.
- La primitive, qui s'annule en 0, de la somme de la série sur $]-R, R[$ s'obtient par primitivation du terme général $a_n x^n$ et que la série entière obtenue a le même rayon de convergence.
- Les coefficients a_n sont donnés par la formule $a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$ où S est la somme de la série.

---

1. <u>Définition et Continuité</u> : Soit $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence R et S sa somme.

   D'après l'étude menée précédemment, nous pouvons pour l'instant dire que :

   - Pour $|x| < R$ la série converge absolument.
   - Pour $|x| > R$ la série diverge grossièrement.
   - Pour $x = \pm R$, on ne peut rien dire

   Définition : **Intervalle ouvert de convergence**

   Pour la série $\sum a_n x^n$ de rayon R, $]-R, R[$ est appelé l'intervalle ouvert de convergence.
   Le domaine de convergence D_S vérifie :

   $$]-R,\ R[\subset D_S \subset [-R,\ R]$$

   Lemme : $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence.

   Preuve : La CVN sur $\mathcal{B}_f(0,\ r)$ implique la CVN sur $[-r, r]$.

   Théorème : **Continuité de S sur $]-R,\ R[$**

   La somme d'une série entière est continue sur l'intervalle ouvert de convergence.

   Preuve : Qui peut le plus peut le moins.

   <u>Exemple</u> : La fonction : $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^n$ est $\begin{cases} \text{définie sur }]-1,\ 1] \\ \text{continue sur }]-1,\ 1[\end{cases}$.

   On a même la continuité en 1 d'après le théorème d'Abel-Radial (voir plus loin).

Théorème : Abel-Radial

Si $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence R et que $\sum a_n R^n$ converge, alors :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \xrightarrow[x \to R^-]{} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n R^n$$

En d'autres termes, la somme f est continue en R.
En introduisant la fonction $t \mapsto f(-t)$, on en déduit la même chose lorsque $\sum a_n(-R)^n$ converge.

Preuve : Hors-Programme !

Mots Clés : Théorème de limite aux bornes par CVU + Transformation d'Abel

- On montre que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ CVU sur $[0,\ R[$.
- Pour cela, on majore $|R_n(x)|$ pour tout $x \in [0,\ R[$
  - → en remarquant que $a_n = \frac{R_{n-1}(R) - R_n(R)}{R^n}$
  - → en effectuant une tranformation d'Abel et en majorant $|R_n(R)| \leq \varepsilon$ apcr.

Exemple : La fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n+1} x^n$ est continue en 1.

Exemple : En admettant que sur $]-1,\ 1[$ on a $\begin{cases} \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n \\ \arctan x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \end{cases}$, montrer que :

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Méthode : Pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$

- On introduit la série entière $\sum a_n x^n$
- On exprime sa somme sur $]-1,\ 1[$ à l'aide des fonctions usuelles : $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ est alors la limite de $f(x)$ et 1^-.

2. <u>Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de la somme d'une Série Entière</u> :

LEMME : **Rayon de convergence d'une série et de ses séries dérivées.**

les séries entières $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq k} a_n \frac{n!}{(n-k)!} z^n$ ont les mêmes rayons de convergence.

Preuve : On sait que $\sum a_n z^n$ et $\sum n^\alpha a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

THÉORÈME : **Caractère $\mathcal{C}^\infty$ de S sur $]-R,\ R[$**

S est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,\ R[$ et pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \quad \forall x \in]-R,\ R[$$

Preuve : Par application du théorème de transfert $\mathcal{C}^\infty$ d'une série uniformément convergente.

⚠ *on ne peut rien dire de la définition et donc de la régularité en R et $-R$.*

Exercice : 9

Justifier que la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin^n(x)}{2^n}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$.

Exercice : 10

Justifier que la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{4n^2-1}$ est $\mathcal{C}^1$ en 1 et -1.

COROLLAIRE : Si S est la somme de $\sum a_n x^n$ alors on a pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$a_n = \frac{S^n(0)}{n!}$$

Preuve : On dérive n fois S et on évalue en 0.

3. <u>Primitivation</u> : On note $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

DÉFINITION : On appelle *série entière primitive* de $\sum a_n x^n$ la série $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

PROPOSITION : $\sum a_n x^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont le même rayon de convergence.

Preuve : On a vu que $\sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ et $\sum (n+1) \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ ont le même rayon de convergence.

THÉORÈME : **Primitivation**

Soit $\sum a_n x^n$ de somme S et de rayon R. Alors :

La fonction $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ est la primitive de S sur $]-R,\ R[$ s'annulant en 0.

Preuve : Simple vérification.

Exemples :

1. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ pour $x \in]-1,\ 1[$, on obtient par primitivation un DSE de $-\ln(1-x)$.
2. Comme $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ pour $x \in]-1,\ 1[$, on obtient par primitivation un DSE de $\arctan x$.

Nous venons de voir dans cet exemple, une méthode (dîte de "primitivation") permettant de déterminer le DSE d'une fonction à partir d'un autre DSE.

3 Développement en série entière

Dans cette partie, nous cherchons à savoir si une fonction f donnée coïncide avec la somme d'une série entière au voisinage de 0. Si c'est le cas, on dit que f est développable en série entière (DSE) au voisinage de 0.

Nous présentons en particulier les différentes méthodes qui permettent d'obtenir le DSE d'une fonction :

- Par détermination de son développement de Taylor
- Par produit ou combinaison linéaire de DSE
- Par dérivation et/ou primitivation
- A l'aide d'une équation différentielle

Nous allons ainsi montrer que de nombreuses fonctions $\mathcal{C}^\infty$ (mais pas toutes !!!) sont DSE sur un voisinage de 0.

1. Définition :

DÉFINITION : **Fonction Développable en Série Entière** (DSE)

On dit que $f : I \to \mathbb{C}$ est DSE (au voisinage de 0) lorsqu'il existe $r > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall x \in]-r,\ r[, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Bien entendu, dans ce cas $r \leq R$ le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$.

Exemples : Les fonctions suivantes sont DSE

- $f(x) = \frac{1}{1-x}$,
- $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$,
- $h(x) = e^x$.

2. Existence et unicité d'un DSE ?

(a) Sur l'existence :

Proposition : CN d'existence

Une fonction DSE est de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

Preuve : Facile !

C/Exemple : Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto \lfloor x \rfloor$ ne sont donc pas DSE.

Remarques :

- Nous verrons en 3. toute une série de conditions suffisantes justifiant l'existence d'un DSE.
- Un exemple traité plus loin montre que cette condition n'est malheureusement pas suffisante.

(b) Sur l'unicité :

Théorème : Unicité et expression du DSE

Si f est DSE sur $]0,\ r[$ alors $f(x)$ est la somme de la série entière : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Il y a donc unicité du développement en série entière d'une fonction.

Preuve : Si $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ au voisinage de 0 alors nous avons vu que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

Définition : Série de Taylor d'une fonction $\mathcal{C}^\infty$ au $\mathcal{V}(0)$

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0.

On appelle "série de Taylor" de f la série : $\displaystyle\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Application de l'unicité

Si au voisinage de 0, on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_n = b_n$.

Exemple : Le DSE de la série génératrice d'un variable aléatoire X naturelle permet de déterminer la loi de X.

Exercice : 11

$(*)$ Soit S telle que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur un voisinage de 0 avec les a_n non tous nuls.

Montrer que S n'est pas nulle sur un voisinage de 0.

Corollaire : Comparaison DSE et DL(0,n)

Lorsqu'une fonction f admet $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour DSE alors $f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n)$

Preuve : Une fonction DSE est $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 et admet donc un DL(0,n) donné par Taylor-Young.

Recherche des premiers termes d'un DSE avec un DL

Lorsque f admet un DSE, on peut obtenir ses premiers termes à l'aide d'un DL(0,n) de f.

Exemple : Soit f définie par $\begin{cases} f(x)=\frac{x}{e^x-1} \text{ si } x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$ dont on admet l'existence d'un DSE.

Déterminer les 3 premiers termes du DSE de f.

Corollaire : Parité et imparité

Soit $\sum a_n x^n$ de rayon $R>0$ et de somme S.

- S paire $\iff$ $a_{2p+1}=0$ pour tout p.
- S impaire $\iff$ $a_{2p}=0$ pour tout p.

Preuve : On applique l'unicité du DSE en remarquant que $S(-x)=S(x)$ au voisinage de 0.

Un contre-exemple à bien connaître !

Soit f définie par $\begin{cases} f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

On démontre que f est $\mathcal{C}^\infty$ en 0 et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $f^{(n)}(0)=0$. (Cf FIN du chapitre)
Si f était DSE, alors elle serait nulle sur un voisinage de 0 ce qui n'est pas le cas.
f n'est donc pas DSE !

Plus généralement :

- Le fait que f soit $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 ne suffit pas à prouver que f est DSE.
- Le fait que la série de Taylor converge ne suffit pas à prouver que f est DSE.

3. Comment prouver l'existence d'un DSE ?

Nous avons le choix entre plusieurs méthodes :

- Avec la formule de Taylor et majoration du reste.
- Par opérations
- Par dérivation et ou primitivation
- A l'aide d'une équation différentielle

(a) Avec la formule de Taylor :

Méthode : Pour étudier si f est DSE, on peut vérifier si

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \to f(x) \quad \text{au} \quad \mathcal{V}(0)$$

Avec par exemple l'inégalité de Taylor-Lagrange (Majoration du reste intégral).

Exemple : On montre facilement avec cette méthode que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Exercice : 12

($*$) Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[-1,\ 1]$ et vérifiant $\|f^{(n)}\|_\infty \leq MK^n n!$.
Montrer que f est DSE au voisinage de 0.

(b) Par opérations :

PROPOSITION : **Combinaison linéaire et Produit**

Si f et g sont DSE sur $]-r,\ r[$ alors $\left\{ \begin{array}{l} \lambda f + \mu g \\ fg \end{array} \right.$ sont DSE sur $]-r,\ r[$.

On obtient alors les DSE par simples calculs.

Bien entendu, ces résultats se généralisent à une CL ou un produit de n fonctions

Preuve : Vu dans la partie précédentes sur les "opérations sur les séries entières".

Exemples :

- sh et ch sont DSE sur $\mathbb{R}$.
- f définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x}$ est DSE sur $]-1,\ 1[$

Exercice : 13

($\heartsuit\heartsuit$) Soit u et v deux fonctions admettant un DSE avec $v(0) = 0$.
Prouver que $u \circ v$ admet également un DSE.

Vous pourrez utiliser le théorème d'échange de signes $\sum$ pour les familles sommables

Proposition : **Parties Réelles et Imaginaires**

Si f est DSE sur $]-r,\ r[$ alors $\begin{cases}\mathrm{Re}(f)\\ \mathrm{Im}(f)\end{cases}$ le sont aussi avec : $\begin{cases}\mathrm{Re}(f)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}(a_n)x^n \\ \mathrm{Im}(f)(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Im}(a_n)x^n\end{cases}$

La réciproque est vraie mais ne présente pas vraiment d'intérêt.

Preuve : Pas de difficulté en passant par les sommes partielles.

Exemple : A partir de $e^{ix} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n!}x^n$, on en déduit le DSE de cos et sin.

(c) Par dérivation / Primitivation :

Proposition : **Dérivation**

Si f est DES sur $]-r,\ r[$, alors ses dérivées successives le sont aussi avec : $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} na_nx^n$

Preuve : Voir le théorème de dérivations successives de la somme d'une série de fonctions.

Exemple : Par dérivation de $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$, on en déduit les DSE de $\dfrac{1}{(1-x)^p}$.

Le résultat obtenu est très souvent utilisé dans l'étude des variables aléatoires.

Voir l'exercice 2 de la banque CCINP.

Proposition : **Primitivation**

Si f est DSE sur $]-r,\ r[$ alors ses primitives F le sont aussi avec : $F(x) = F(0) + \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$

Exemples : Déterminer les DSE des fonctions suivantes :

- $f(x) = \ln(1+x)$

  D/ On remarque que $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. On primitive alors le DSE de $\frac{1}{1+x}$.
  On peut prolonger l'égalité en 1 avec le théorème d'Abel-Radial.

- $f(x) = \arctan x$:

  D/ Même principe.
  On peut prolonger l'égalité en 1 et -1 avec Abel-Radial.

Voir l'exercice 22 de la banque CCINP.

Méthode de recherche d'un DSE

Si l'obtention d'un DSE à partir de $f(x)$ semble compliqué, on peut envisager de s'intéresser à $f'(x)$.

Exercice : 14

- $f(x) = \ln(1 + x + x^2)$:

Preuve : On recherche plutôt un DSE de $f'(x) = \frac{1+2x}{1+x+x^2}$.
On l'obtient sans grande difficulté sur $]-1,1[$ en remarquant que $1 + x + x^2 = \frac{1-x^3}{1-x}$.

- $f(x) = \arcsin(x)$.
  Appliquer le théorème d'Abel-Radial pour en déduire l'évaluation d'une somme.

Preuve : On recherche plutôt un DSE de $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et on trouve :

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{sur} \quad]-1,1[$$

On trouve alors le DSE de arccos *en appliquant la formule* $\arccos = \frac{\pi}{2} - \arcsin$.

(d) A l'aide d'une équation différentielle :

Méthode : Pour déterminer un DSE d'une fonction f

- On montre que f est solution d'une ED linéaire sur un voisinage de 0
- On recherche une solution g DSE de cette ED
- On montre que f et g coïncident à l'aide d'un théorème d'unicité (Cauchy-Linéaire!)

Proposition : **Développement de** $(1+x)^\alpha$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est DSE sur $]-1,\ 1[$ avec :

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n \qquad = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$$

La notation $\binom{\alpha}{n}$ est bien entendu un "abus de notation".

Preuve :

- On constate que $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ est solution sur $]-1,\ +\infty[$ de $(\mathcal{E}) : (1+x)y' = \alpha y$.
- On recherche alors une solution g de $(\mathcal{E})$ développable en série entière
- On applique enfin le théorème de Cauchy-Lipschitz par conclure que $f = g$.

Cas particuliers :

- Lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$: On retrouve la formule du binôme.
- Lorsque $\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$: on trouve après simplifications $\dfrac{1}{(1+x)^{p+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \binom{n+p}{n} x^n$.
- Lorsque $\alpha = -\frac{1}{2}$: on trouve après simplifications $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} x^n$.
- Et si $\alpha = \frac{1}{2}$?

Voir l'exercice 51 de la banque CCINP.

Exercice : 15

Développer en série entière la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Preuve :
- On remarque que $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$ sur $]-1,\ 1[$.
- On recherche une solution g de $(1-x^2)y' - xy = 1$ DSE, $\begin{cases} \text{impaire} \\ \text{vérifiant } g(0) = f(0) \end{cases}$.

  On trouve une relation de récurrence sur a_n en remplaçant dans l'équadiff.
- On trouve finalement : $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!} x^{2n+1}$.

4. Exemples de quelques fonctions rationnelles :

Déterminer les DSE des fonctions f dont l'expression est la suivante :

- $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$

Preuve : On met a en facteur...

- $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)^2}$

Preuve : Par dérivation de la précédente...
Par dérivations successives on trouve également les DSE de $\frac{1}{(x-a)^p}$

- $f(x) = \dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$ avec $a \neq b$

Preuve : Par DES puis combinaison linéaire.

- $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2(x+2)}$

Preuve : DES puis application des résultats précédents.

- $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$ (Cas très spécifique !)

Preuve : On remarque que $f(x) = \dfrac{1-x}{1-x^3}$ puis application des résultats précédents $\begin{cases} a_{3n} = 1 \\ a_{3n+1} = -1 \\ a_{3n+2} = 0 \end{cases}$.

- $f(x) = \dfrac{1}{x^2+ax+b}$ avec $\Delta < 0$ (Cas général !)

Preuve : Par DES dans $\mathbb{C}(X)$.

- Bilan des DSE usuels à connaître :

$e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	sur $\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	sur $]-1,\ 1[$
$\mathrm{ch}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	sur $\mathbb{R}$	$\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	sur $]-1,\ 1[$
$\mathrm{sh}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	sur $\mathbb{R}$	$(1+x)^\alpha = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$	sur $]-1,\ 1[$
$\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	sur $\mathbb{R}$	$\arctan x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	sur $]-1,\ 1[$

Savoir également retrouver rapidement les DSE des fonctions suivantes :

- $\frac{1}{1+x^2}$
- $\frac{1}{(1-x)^p}$
- $\sqrt{1+x}$
- $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$
- $\arcsin x$

4 Exemples de calculs de sommes d'une série entière

Une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence non nul étant donné, nous cherchons ici à calculer sa somme.

Méthode pour calculer la somme d'une SE

On transforme $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0} a_n x^n$ en cherchant à faire apparaître un ou des DSE connu(s).

- Exemple 1 : Par un calcul presque direct.

Calculer $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(n+1)!}$ pour tout x appartenant au domaine de convergence.

Preuve :

→ En appliquant le critère de d'Alembert, on trouve $R = +\infty$.

→ En transformant, on obtient : $xS(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = 1 - e^{-x^2}$.

- Exemple 2 : Par calcul direct avec disjonction de cas.

Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$ pour tout x appartenant au domaine de convergence.

Preuve :

→ En appliquant le critère de d'Alembert, on trouve $R = +\infty$.

→ On obtient pour $x \geq 0$: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{x}^{2n}}{(2n)!} = \operatorname{ch} \sqrt{x}$.

→ On obtient pour $x \leq 0$: $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{|x|}^{2n}}{(2n)!} = \cos \sqrt{|x|}$.

On peut en déduire que le raccordement des deux fonctions en 0 est $\mathcal{C}^\infty$.

- Exemple 3 : Par calcul direct avec $\begin{cases} \text{une DES} \\ \text{une application du théorème d'Abel-Radial} \end{cases}$.

Calculer $S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} x^n$ pour tout x appartenant au domaine de convergence.

Preuve :

→ En appliquant le critère de d'Alembert, on trouve que $R = 1$.
De plus il y a convergence en 1 et -1 donc l'intervalle de convergence est $[-1,\ 1]$.

→ Après DES on obtient : $S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{+\infty} (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1})(-x)^n$

→ En calculant les deux sommes pour $x \in]-1,\ 1[$ et $x \neq 0$, on obtient :

$$S(x) = \frac{1}{2}(x - \frac{1}{x}) \ln(1+x) + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x$$

→ En 0 : $S(0) = 0$.

→ En ± 1 : la fonction est continue d'après le théorème d'Abel-Radial.
On obtient alors les valeurs de $S(1)$ et $S(-1)$ par passage à la limite.

- Exemple 4 : Par dérivation / primitivation.

Calculer $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ pour tout x appartenant au domaine de convergence.

Reprendre l'exemple 3 et le traiter par dérivation.

- Exemple 5 : Par dérivation / primitivation.

Calculer $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{\sin(n)}{n}x^n$ pour tout x appartenant au domaine de convergence.

- Exemple 6 : Par primitivation.

Calculer $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)x^n$ pour tout x appartenant au domaine de convergence.

Voir l'exercice 47 de la banque CCINP.

5 Applications

Le développement en série entière d'une fonction présente plusieurs intérêts :

- Calcul de la somme d'une série numérique avec Abel-Radial
- Etude du caractère $\mathcal{C}^\infty$ d'une fonction
- Calcul d'une intégrale (Par échange $\sum \leftrightarrow \int$)
- Recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle
- Calcul de la fonction génératrice d'une VA naturelle (déjà vu)

1. Calcul de la somme d'une série numérique : (avec Abel-Radial)

La méthode pour calculer $\sum_{n=0}^{+\infty}a_n$

- On introduit une fonction développable en série entière $f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$
- On obtient la somme souhaitée :
  $\to$ soit par spécification ($x=x_0$)
  $\to$ soit par continuité avec le théorème d'Abel Radial.

Exercice : 16

($*$) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2-1}$ en utilisant le résultat obtenu dans l'exemple 3 précédent.

2. Etude du caractère $\mathcal{C}^\infty$ et calcul de $f^{(n)}(0)$:

Méthode pour étudier le caractère $\mathcal{C}^\infty$

- On montre que la fonction est DSE au voisinage de 0.
  Il faut parfois également utiliser les théorèmes généraux pour conclure.

- Si on obtient un DSE, les coefficients a_n nous donnent les valeurs de $f^{(n)}(0)$.

Exemple 1 : Montrer que la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \operatorname{ch}\sqrt{x} \text{ lorsque } x \geq 0 \\ f(x) = \cos\sqrt{-x} \text{ lorsque } x < 0 \end{cases}$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Exemple 2 :

- Montrer que le prolongement en 0 de $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-1}{x}$ est $\mathcal{C}^\infty$ en 0.

Preuve :
→ On détermine facilement le prolongement de f en série entière.
→ On en déduit que f est $\mathcal{C}^\infty$ et que $f^{(n)}(0) = \frac{1}{n+1}$

- De même pour $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

- Montrer que $h(x) = \dfrac{\sin x}{e^x - 1}$ se prolonge en une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Preuve :
→ C'est le produit $g \times \frac{1}{f}$ avec $g(x) = \frac{\sin x}{x}$ et $f(x) = \frac{1-e^x}{x}$ prolongées par continuité en 0.
→ g est DSE au voisinage de 0 et est donc $\mathcal{C}^\infty$ en 0.
→ f est $\mathcal{C}^\infty$ et $f(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$ alors $\frac{1}{f}$ est également $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$
→ h est donc $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice : 17

(♡) **Une alternative au théorème de transfert $\mathcal{C}^\infty$**

Etudier la régularité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^n x}{2^n n^2}$.

Voir l'exercice 24 de la banque CCINP.

3. Calcul d'une intégrale :

Pour calculer $\int_I f(t)\ \mathrm{d}t$ ou l'exprimer sous la forme $\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n$

Méthode pour calculer une intégrale $\int_I f(t)\ \mathrm{d}t$

- On écrit $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)$ à l'aide des DSE connus
- Pour calculer $\int_I f(t)\ \mathrm{d}t = \int_I \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\ \mathrm{d}t$, on peut alors :
  → Soit passer par le théorème d'intégration terme à terme par CVU. (plutôt rare !)
  → Soit passer par le théorème d'intégration terme à terme par intégrabilité. (fréquent !)

- Exemple 1 : Intégration sur $[a,\ b] \subset]-R,\ R[$ **Avec la CVU !**

La méthode : On applique le théorème d'intégration terme à terme par CVU ou par intégrabilité. Cela est possible car la série entière CVN sur $[a,\ b]$.

Exemple : Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{\pi^{2n+1}}{2n+1}$.

- Exemple 2 : Intégration sur $[0,\ R[$ **Avec le théorème d'ITT par intégrabilité**

La méthode : On applique le théorème d'intégration terme à terme par intégrabilité.

Exemple : Calcul de : $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\ln(1+t)\ \mathrm{d}t$.

Dans cet exercice, il était également possible d'appliquer le théorème d'échange par CVU.

Exercice : 18

$(**)$ **CCINP 2019 - MP1 - Exo1**

Justifier la convergence et calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt$.

On pourra admettre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

4. Recherche d'une solution particulière d'une équation différentielle :

Méthode de recherche d'une solution particulière à une ED

Pour les équations différentielles (E) linéaires à coefficients polynômiaux sur I.

- On recherche une solution y_0 de (E) sous la forme $y_0(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ au voisinage de 0.
- On vérifie que la solution obtenue est bien définie au voisinage de 0. $(R > 0)$
- On tente si possible d'exprimer la somme de la SE obtenue à l'aide des fonctions usuelles.

Cette technique à été illustrée précédemment pour les deux équations différentielles suivantes :

- $(1+x)y' = \alpha y$
- $(1+x^2)y' - xy = 1$

Exemple : Rechercher une solution particulière de $(\mathcal{E})$: $(1-x^2)y'' + xy' - \dfrac{1}{4}y = 0$ sur $]-1,\ 1[$.

5. Fonction génératrice d'une VA naturelle

Rappels

- La fonction génératrice d'une VA à valeurs dans $\mathbb{N}$ est définie sur au moins $[-1,\ 1]$ par

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n$$

- Cette fonction permet de :
  - → Déterminer la loi d'une variable aléatoire
  - → Vérifier l'existence et calculer l'expérance d'une VA
  - → Vérifier l'existence et calculer la variance d'une VA

Exercice : 19

(♡) **Détermination de la loi d'une VA**.

1. Déterminer la loi de la somme de $n \in \mathbb{N}^*$ variables mutuellement indépendantes suivant chacune une même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,\ 1]$.

2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres λ et μ. Démontrer que $Z = X + Y$, suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Exercice : 20

(♡) **Détermination de l'espérance et de la variance d'une VA.**

Soient $p \in]0,\ 1[$ et X une variable aléatoire à valeurs naturelles dont la loi est donnée par :

$$P(X = n) = a(n+1)p^n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}$$

En employant la fonction génératrice de X déterminer a et calculer l'espérance et la variance de X.

6. Divers : Prouver que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch} t \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

6 Musculation

1. Musculation 1 : Exemple de fonction $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de 0 mais non DSE en 0.

   Soit f définie par $f(x) = e^{-1/x^2}$.

Rappels de MPSI

- Soit f un fonction $\begin{cases} \text{continue sur un voisinage de } 0 \\ \text{dérivable sur un voisinage de } 0 \text{ privé de } 0 \end{cases}$ avec $f'(x) \xrightarrow[x \to 0]{} l \in \mathbb{K}$.

  Alors :

  $\rightarrow$ f est $\mathcal{C}^1$ en 0

  $\rightarrow$ $f'(0) = l$.

- Soit f un fonction $\begin{cases} \text{continue sur un voisinage de } 0 \\ \mathcal{C}^\infty \text{ sur un voisinage de } 0 \text{ privé de } 0 \end{cases}$ avec $f^{(n)}(x) \xrightarrow[x \to 0]{} l_n \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}$.

  Alors :

  $\rightarrow$ f est $\mathcal{C}^\infty$ en 0

  $\rightarrow$ $f^{(n)}(0) = l_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Etape 1 : On montre que le prolongement en 0 est $\mathcal{C}^\infty$ en utilisant les limites des dérivées $n$ième en 0. Pour cela, on montre qu'au voisinage de 0, on a $f^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ puis croissances comparées.

Etape 2 : On en déduit également que $f^{(n)}(0) = 0$ et donc que si f était DSE alors sa série serait nulle et donc elle serait également nulle sur un voisinage de 0... Faux !

---

2. Musculation 2 : Notion de fonction absolument monotone

Soit f de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r,\ r[$ telle que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout n.
On dit que f est *absolument monotone.*
On remarquera que f est positive et croissante.
Montrer que f est développable est série entière sur $]-r,\ r[$.

Réponse : On applique Taylor avec reste intégrale pour $x \in]-r,\ r[$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x) \quad \text{avec} \quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$$

Méthode 1 :

- On applique le changement de variable usuel $t = ux$ et on obtient :

$$R_n(x) = x^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(xu)\ \mathrm{d}u$$

- Ruse : On prend alors ρ tel que $|x| < \rho < r$ d'après la croissance des dérivées :

$$|R_n(x)| \leq |x|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(\rho u)\ \mathrm{d}u \leq \left|\frac{x}{\rho}\right|^{n+1} R_n(\rho) \leq \left|\frac{x}{\rho}\right|^{n+1} f(\rho) \to 0$$

Méthode 2 :

- Compte-tenu des hypothèses, la série de Taylor converge car elle est croissante et majorée par $f(x)$.

- On en déduit que $\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ce qui permet de montrer que $R_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.