Suites et Séries de fonctions vectorielles

Les fonctions exponentielles

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

10 mars 2025

Il s'agit ici de généraliser les résultats vus dans le cas des suites (f_n) et séries $\sum f_n$ de fonctions numériques.
Dans ce chapitre, E et F sont deux EVN de dimension finie sur le même corps $\mathbb{K}$.
Le choix des normes n'a pas d'incidence sur les résultats énoncés.

Table des matières

1 Modes de convergence

Les définitions des différents modes de convergence est analogue à celles vu dans le cours sur les suites et séries de fonctions numériques.

1. <u>Suites de fonctions</u> : (u_n) une suite de fonctions telles que $u_n : X \subset E \to F$.

Définition : **CVS et CVU pour une suite de fonctions**

- On a $(u_n) \underset{X}{\overset{CVS}{\longrightarrow}} u$ lorsque : $\quad \forall x \in E, \quad u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} u(x)$
- On a $(u_n) \underset{X}{\overset{CVU}{\longrightarrow}} u$ lorsque : $\begin{cases} \|u_n - u\|_\infty \text{ existe à partir d'un certain rang} \\ \|u_n - u\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$

Remarquons que : $\quad u_n \overset{CVU}{\to} u \iff u_n - u \overset{CVU}{\to} \tilde{0}.$

2. Proposition : CVU $\Rightarrow$ CVS vers la même limite.

   Pour les suites de fonctions, on commence par déterminer la limite simple u avant d'étudier la convergence uniforme.

3. Séries de fonctions : (u_n) une suite de fonctions telles que $u_n : X \subset E \to F$.

   La convergence de $\sum u_n$ correspond à la convergence de la suite (S_n) de terme général $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$.

Définition : Convergence simple (CVS) de $\sum u_n$

$\sum u_n$ converge SIMPLEMENT sur X lorsque $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in X$.

Lorsqu'il y a convergence :

- La somme de la série est alors la fonction S définie sur X par $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$.
- Le reste de rang n est alors la fonction R_n définie sur X par $R_n(x) = S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)$.

Définition : Convergence uniforme (CVU) de $\sum u_n$

$\sum u_n$ converge UNIFORMEMENT lorsque $\begin{cases} \sum u_n \text{ converge simplement} \\ R_n \overset{CVU}{\to} \tilde{0} \end{cases}$

♡ *En général, la somme d'une série n'étant pas connue explicitement, l'évaluation de R_n pose problème. Pour cette raison, la convergence uniforme se démontre en prouvant la convergence normale de la série.*

Remarque : Lorsque les séries de sont pas à valeurs dans $\mathbb{R}$, la majoration de $|R_n|$ obtenue à l'aide du CSSA ne peut pas s'appliquer.

Définition : Convergence normale (CVN) de $\sum u_n$

On dit que $\sum u_n$ converge NORMALEMENT lorsque :

- les fonctions u_n sont bornées à partir d'un certain rang.
- $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

Proposition : La convergence normale entraîne la convergence uniforme

Preuve : Supposons que $\sum u_n$ CVN, c'est à dire que $\sum \|u_n\|_\infty$ converge.

- CVS : On a CVA car : $\forall x \in X,\ \|u_n(x)\| \leq \|u_n\|_\infty$ avec $\sum \|u_n\|_\infty$ qui converge.
- CVU : Pour tout $x \in X$, $\|R_n(x)\| = \|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_n(x)\| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_n\|_\infty$ donc :

$$\|R_n\|_\infty \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|u_n\|_\infty \to 0$$

Voir l'exercice 15 de la banque CCINP.

2 Etude de la limite et de la somme uniforme

La convergence uniforme (CVU) permet d'étudier la continuité, les limites, la dérivabilité et l'intégrabilité de la limite d'une suite de fonctions ou de la somme d'une série de fonctions.

Les théorèmes qui suivent sont analoguent et se démontrent de la même façon que les théorèmes rencontrés dans le chapitre sur les suites et séries de fonctions numériques : il suffit de substituer $\|.\|$ à $|.|$.

1. Etude de la continuité :

   But : Prouver que $\left\{\begin{array}{l}\text{la limite } u \text{ d'une suite de fonctions}\\ \text{la somme } S \text{ d'une série de fonctions}\end{array}\right.$ sont continues.

   > Théorème : **Transfert $\mathcal{C}^0$ par CVU**
   >
   > - si $\left\{\begin{array}{l}\text{les } u_n \text{ sont continues sur } X\\ (u_n) \text{ CVU vers } u \text{ sur } X\end{array}\right.$ alors u est continue sur X.
   > - si $\left\{\begin{array}{l}\text{les } u_n \text{ sont continues sur } X\\ (\sum u_n) \text{ CVU sur } X\end{array}\right.$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur X.

   Exemple : Montrer que la somme de $\sum u_n$ avec $u_n(x,\ y) = \dfrac{1}{(n+x^2)(n+y^2)}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

   Preuve :

   Remarque : En cas de difficulté pour prouver la CVU, on peut se placer sur "tout compact" de X.

   Exemple : Etude de $\displaystyle S(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(ny)}{1+n^2x}$ sur $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

   Preuve :

   Exemple : Etude de $\displaystyle L(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

   Preuve :

   Exemple : Etude de $\displaystyle S(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{zn^2+1}$ sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$

Preuve :

2. Etude des Limites aux Bornes : Soit $u_n : X \to F$ et $a \in \bar{X}$

Nous avons voir ici comment étudier la limite en un vecteur a de $\left\{ \begin{array}{l} \text{la limite } u \text{ d'une suite } (u_n) \\ \text{la somme } S \text{ de } \sum u_n \end{array} \right.$.

Théorème : Limites aux bornes par CVU

Soit $u_n : X \to F$ et $a \in \bar{X}$

- Lorsque $\left\{ \begin{array}{l} (u_n) \text{ CVU sur } X \\ u_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n \end{array} \right.$ alors $\left\{ \begin{array}{l} (l_n) \text{ converge vers } l \in F \\ u(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \end{array} \right.$.

  Il s'agit d'un théorème d'échange de limites.

- Lorsque $\left\{ \begin{array}{l} \sum u_n \text{ CVU sur } X \\ u_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n \end{array} \right.$ alors $\left\{ \begin{array}{l} \sum l_n \text{ converge} \\ \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \sum_{n=0}^{+\infty} l_n \end{array} \right.$.

  Il s'agit d'un théorème d'échange du symbole lim *et du signe* $\sum$.

Remarque : Inutile de chercher à appliquer ce théorème lorsque (l_n) ou $\sum l_n$ diverge.

Méthode pour prouver la NON-CVU

Il suffit de trouver une valeur $a \in \bar{X}$ telle que :

- Pour une suite (u_n) : $u_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n$ avec $(l_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui diverge
- Pour une série u_n : $u_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} l_n$ avec $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} l_n$ qui diverge

Exemples :

- Non convergence uniforme des séries étudiées précédemment.

Preuve :

- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(ny)}{1+n^2x}$ sur $D = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.
- $\displaystyle\sum \frac{z^n}{n}$ sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n+z}$ sur $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$

- Existe-t-il une suite de fonctions polynômes qui CVU sur $]0,\ 1]$ vers la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$?

Preuve :

3. Intégration et dérivation

⚠ Ici la variable $x \in I \subset \mathbb{R}$ avec I un intervalle et $u_n : I \to E$ où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

(a) Intégration sur un segment $[a,\ b]$: (u_n) une suite d'éléments de $\mathcal{F}(I,\ E)$.

On s'intéresse ici à l'intégrale sur un segment de la limite ou de la somme d'une suite de fonctions.

THÉORÈME : **Intégration de la limite ou de la somme**

- Si $\begin{cases} u_n \text{ est } C^0 \text{ sur } [a,\ b] \\ (u_n) \text{ CVU vers } u \text{ sur } [a,\ b] \end{cases}$ alors u est continue sur $[a,\ b]$ et $\displaystyle\int_a^b u_n \to \int_a^b u$.

Il s'agit d'un théorème d'échange d'une limite et du signe $\int$.

- Si $\begin{cases} u_n \text{ est } C^0 \text{ sur } [a,\ b] \\ \sum u_n \text{ CVU sur } [a,\ b] \end{cases}$ alors $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est continue sur $[a,\ b]$ et $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n$.

Il s'agit d'un théorème d'échange du signe $\sum$ et du signe $\int$.

(b) Dérivation : ici $I \subset \mathbb{R}$ et est d'intérieur non vide.

THÉORÈME : **Transfert $\mathcal{C}^1$ par CVU**

- Si $\begin{cases} u_n \text{ est } C^1 \text{ sur } I \\ (u_n) \text{ CVS vers } u \text{ sur } I \\ (u_n') \text{ CVU sur tout segment} \end{cases}$ alors u est C^1 sur I et $\forall x \in I, \quad u_n'(x) \to u'(x)$.

Il s'agit d'un théorème d'échange d'une limite et d'une dérivée.

- Si $\begin{cases} u_n \text{ est } C^1 \text{ sur } I \\ \sum u_n \text{ CVS vers } S \text{ sur } I \\ \sum u_n' \text{ CVU sur tout segment} \end{cases}$ alors S est C^1 sur I et $S' = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'$.

Il s'agit d'un théorème d'échange d'une dérivée et du signe $\sum$.

Exercice : 1

$(*)$ On suppose $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ muni d'une norme $\|.\|$ vérifiant $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pour tout $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle et pour $|t| < \frac{1}{\|A\|}$, on pose $f(t) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} A^k$.

1. Montrer que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $(I - tA)f'(t) = A$.

Remarque : On peut énoncer un résultat analogue pour les fonctions C^n.

3 Les fonctions exponentielles

Nous allons maintenant pouvoir définir et étudier les propriétés des fonctions $\left\{\begin{array}{l}\text{exponentielle complexe}\\ \text{exponentielle matricielle}\\ \text{exponentielle d'endomorphisme}\end{array}\right.$.

1. L'exponentielle complexe :

   Cette partie nous donne en particulier une définition précise des fonctions sinus et cosinus qui nous permet de retrouver rigoureusement les formules de trigonométrie usuelles.

   DÉFINITION : Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente (car CVA) et on pose :

   $$\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \qquad \text{(noté également } e^z\text{)}$$

   Preuve : On montre la CVA qui entraine la CVG car $\mathbb{C}$ est de dimension finie.

   Remarque :

   Cette fonction coïncide sur $\mathbb{R}$ avec l'exponentielle réelle bien connue. Mais coïncide-t-elle également avec l'exponentielle imaginaire et l'exponentielle complexe définies en MPSI ?

   THÉORÈME : Pour tout $z,\ z' \in \mathbb{C}$, on a :

   $$\exp(z + z') = \exp(z).\exp(z')$$

   Preuve : Conséquence du théorème sur les produits de Cauchy.

   Remarque :

   On en déduit que $\exp(a + ib) = \exp(a).\exp(ib)$ avec $\exp(a) = e^a$ l'exponentielle réelle.
   Mais $\exp(ib)$ coïncide-t-elle avec l'exponentielle imaginaire définies en MPSI ?

   PROPOSITION : Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

   $$\exp(i\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \theta^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

   Preuve : On peut regroupes les termes selon la parité de n car il y a CVA.
   Les deux sommes obtenues sont les Développements en Séries Entières de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$.

   Remarque :

   $\exp(i\theta)$ correspond donc bien à la définition de l'exponentielle imaginaire vue antérieurement.
   Et d'après la remarque précédente, $\exp(z)$ correspond bien à l'exponentielle complexe vue en MPSI.
   La définition donnée plus haut de $\exp(z)$ permet donc d'unifier les définitions des 3 exponentielles vues antérieurement.

PROPOSITION : $\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z})$

Preuve : Par passage à la limite et continuité de la fonction *conjugaison*.

Remarque : On peut alors prouver facilement les formules trigonométriques usuelles.

PROPOSITION : **Quelques formules de trigonométrie**

- $|e^{i\theta}|^2 = 1$ donne $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.
- $e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ donne $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$ et $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.
- $e^{i(\theta+\beta)} = e^{i\theta}.e^{i\beta}$ donne $\cos(a+b) = ...$ et $\sin(a+b) = ...$
- $e^{i\theta} + e^{i\beta} = e^{i\frac{\theta+\beta}{2}}\cos(\frac{\theta-\beta}{2})$ donne $\cos(\theta)+\cos(\beta) = \cos(\frac{\theta+\beta}{2})\cos(\frac{\theta-\beta}{2})$.

Remarques :

- On peut également définir $\cos z$ et $\sin z$ pour $z \in \mathbb{C}$ en utilisant les DSE vus précédemment.
- On définit π comme la moitié de la plus petite valeur $x > 0$ telle que $e^{ix} = 1$.
  Voir la musculation en fin de chapitre...
  A partir de $e^{i2\pi} = 1$ on peut alors déduire les formules trigonométriques faisant intervenir π :
  $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$... etc...

---

2. L'exponentielle d'une matrice :

Intérêt : Les exponentielles de matrices interviennent dans la résolution des systèmes différentiels (cf fin d'année).

DÉFINITION : $\exp(A)$ **avec** $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Pour toute matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, la série $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ converge.

On appelle *exponentielle matricielle* la fonction définie par : $A \mapsto \exp(A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$

Preuve :
- On munit $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ d'une norme subordonnée qui est alors sous-multiplicative.
- On conclut en utilisant le fait qu'en dimension finie : CVA $\Rightarrow$ CVG.

Exemples :

- $\exp(0_n) = I_n$
- $\exp(I_n) = eI_n$
- Calculer $\exp(P)$ lorsque $P^2 = P$
- Calculer $\exp(S)$ lorsque $S^2 = I_n$

Preuve :

PROPOSITION : Pour toute matrice $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

$$\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) \quad \text{lorsque} \quad AB = BA$$

On en déduit que :

- $\exp(-A)$ est inversible et $(\exp(A))^{-1} = \exp(-A)$.
- $\exp(A)^n = \exp(nA)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$
- $(\exp(A))^T = \exp(A^T)$

Preuve :

- Par produit de Cauchy en admettant que ce théorème s'applique pour les matrices. Ce qui est vrai : cf l'épreuve de math X MP 2012 A Q°7a.
- Conséquences du premier résultat.

PROPOSITION : La fonction $A \mapsto \exp(A)$ est continue.

Preuve : Classique par application du théorème de transfert $\mathcal{C}^0$ par CVU sur une boule fermée.

3. Calcul de l'exponentielles d'une matrice :

(a) Cas où A est diagonale :

LEMME : $\exp\begin{pmatrix}\lambda_1 & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}e^{\lambda_1} & & (0)\\ & \ddots & \\ (0) & & e^{\lambda_n}\end{pmatrix}$

Preuve : Pas de difficulté par passage à la limite dans les coefficients.

(b) Cas où A est diagonalisable :

LEMME : Si $A = PDP^{-1}$ alors $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$.

Preuve : Pas de difficulté par continuité de l'application $M \mapsto PMP^{-1}$ (linéaire en dimension finie).

Méthode 1 : Avec des calculs !

→ On diagonalise la matrice A : $A = PDP^{-1}$.

→ On applique alors la formule : $\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$.

Méthode 2 : Avec les polynômes de Lagrange ♡

Lorsque $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable admet pour valeurs propres λ_1, ..., λ_p.

→ On cherche un polynôme L tel que $\forall k \in [\![1,p]\!],\ L(\lambda_k) = e^{\lambda_k}$ (Polynôme de Lagrange !)

→ On a alors facilement $L(D) = \exp(D)$ et donc :

$$L(A) = \exp(A)$$

Exemple : $A = \begin{pmatrix}0 & -2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Preuve :

⋆ On trouve facilement $\mathrm{Sp}(A) = \{1,\ 2\}$

⋆ Prenons le poly. L tel que $\begin{cases} L(1) = e\\ L(2) = e^2\end{cases}$: $L(X) = \dfrac{X-2}{1-2}e + \dfrac{X-1}{2-1}e^2 = e(e-1)X + e(2-e)$.

⋆ On obtient alors $\exp(A) = e(e-1)A + e(2-e)I_2$.

(c) Cas où A est nilpotente : $\boxed{\exp(A) \text{ est alors une somme finie !!}}$

Exemple : Calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

(d) Cas général :

Méthodes générales pour déterminer $\exp(A)$

- on peut déterminer l'expression de A^k à l'aide :
  - $\rightarrow$ d'un polynôme annulateur
  - $\rightarrow$ d'une conjecture que l'on valide par récurrence
- On peut également utiliser la décomposition de Dunford de A si celle-ci s'obtient facilement :

$$\exp(A) = \exp(D+N) = \exp(D)\exp(N) \quad \text{car} \quad DN = ND$$

Exemple 1 : Calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

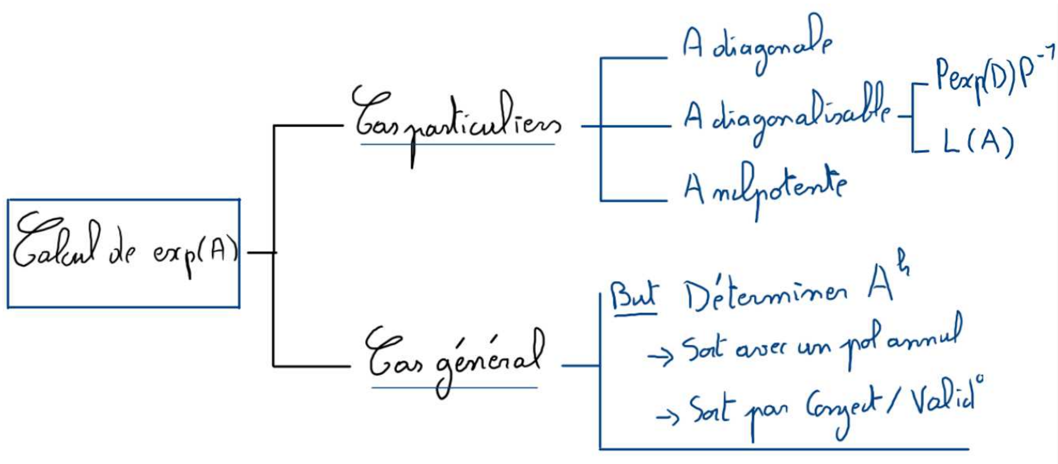
Preuve :

- $\star$ Par Cayley-Hamilton, on a $(A - I_3)^3 = 0$, on introduit donc $N = A - I_3$ et donc $A = I_3 + N$.
- $\star$ Ainsi, $\exp(A) = \exp(I_3)\exp(N) = e(I_3 + N + \frac{1}{2}N^2)$.

Exemple 2 : Calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec un polynôme annulateur.

Preuve :

- $\star$ On constate facilement avec Cayley-Hamilton que $A^3 = 2A$
- $\star$ On en déduit une expression de A^{2p} et de A^{2p+1}
- $\star$ Cela permet de calculer $\exp(A)$ en regroupant les termes d'indice pair et les termes d'indice impair dans une somme partielle.



(e) Exercices

Exercice : 2

($\heartsuit$) Soit T une matrice réelle carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ antisymétrique réelle.
Montrer que $\exp(T)$ est une matrice orthogonale.

Exercice : 3

(♡♡♡) Soit $A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer que : $\left(I_p + \dfrac{1}{n}A\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp(A)$.

Après développement par la formule du binôme, on pourra se ramener à déterminer la limite en $+\infty$ de la somme d'une série de fonctions définies sur $\mathbb{N}$.

Preuve :

- On développe $\left(I_p + \frac{1}{n}A\right)^n$ et on l'écrit comme somme de $\sum u_k(n)$ (en complétant par des f° nulles).
- On montre que cette série CVN sur $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
- On applique alors le théorème de limite aux bornes par CVU.

4. L'exponentielle d'un endomorphisme :

Les propriétés démontrées pour l'exponentielle matricielle reposent uniquement sur le fait que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est une $\mathbb{K}$-algèbre normée munie d'une norme sous-multiplicative. Comme c'est également le cas pour $(\mathcal{L}(E), +\circ, .)$ lorsque $\dim E < +\infty$, on retrouve ici la même définition et les mêmes propriétés.

Définition : $\exp(u)$ **avec** $u \in \mathcal{L}(E)$

Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$, la série $\sum \frac{u^n}{n!}$ est absolument convergente.
On définit alors :

$$u \mapsto \exp(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^n}{n!} \quad \exp(u) \in \mathcal{L}(E)$$

La notation u^n signifiant comme d'habitude $u \circ u \circ \cdots \circ u$.

Exemples : $\exp(\tilde{0}) = \mathrm{id}_E$ et $\exp(\mathrm{id}_E) = e\,\mathrm{id}_E$.

Proposition :

- Lorsque $u \circ v = v \circ u$, on a $\exp(u+v) = \exp(u) \circ \exp(v)$.
- $\exp(u)$ est un automorphisme de E et $(\exp(u))^{-1} = \exp(-u)$.
- $\exp(u)^n = \exp(nu)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$
- $u \mapsto \exp(u)$ est continue.

Exercice : 4

(♡) Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie.
Montrer que :

$$\ker(e^u - \mathrm{id}) = \ker u$$

On pourra procéder par l'absurde pour l'inclusion non évidente.

PROPOSITION : **Lien avec l'exponentielle matricielle**

Si $A = \mathrm{Mat}_e\, a$ alors $\mathrm{Mat}_e(\exp(a)) = \exp(A)$.

Preuve : $u \mapsto \mathrm{Mat}_e(u)$ est linéaire au départ de $\mathcal{L}(E)$ qui est de dimension finie : elle est donc continue.

5. Dérivation de $t \mapsto \exp(t.a)$: où $a \in \mathcal{L}(E)$ (avec $\dim E < +\infty$)

THÉORÈME : Soit $a \in \mathcal{L}(E)$ et la fonction $e_a : t \mapsto \exp(t.a) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} a^n$.
e_a est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $\left\{ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$:

$$e_a^{(n)}(t) = a^n \circ \exp(t.a) = \exp(t.a) \circ a^n$$

Preuve : On applique le théorème de transfert $\mathcal{C}^\infty$ par CVU.

On a un théorème analogue pour les matrices :

THÉORÈME : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
La fonction $e_A : t \mapsto \exp(t.A) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} A^n$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $\left\{ \begin{array}{l} k \in \mathbb{N} \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right.$:

$$e_A^{(k)}(t) = A^k . \exp(t.A) = \exp(t.A).A^k$$

Preuve : Par transfert $\mathcal{C}^\infty$ par CVU ou plus simplement en se ramenant à la question précédente avec l'isomorphisme canonique.

6. Musculation : Définition de π

• Montrer que cela revient à trouver le plus petit $a > 0$ tel que $e^{i2a} = 1$.

On considère $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array}$ où $\mathbb{U}$ est l'ensemble des complexes de module 1.

• Montrer que φ est un morphisme de groupes continu.

On s'intéresse alors au noyau de φ qui est donc un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

1. Montrer que si $\ker \varphi$ est dense dans $\mathbb{R}$ alors $\varphi = \tilde{1}$.
   Prouver que ceci est impossible en montrant que $\varphi(1) \neq 1$.

Par conséquent $\ker \varphi = a\mathbb{Z}$ *avec* $a \geq 0$.

2. Supposons que $a = 0$. φ est alors injectif.

   On peut alors montrer que φ *est surjectif et que sa bijection réciproque est également continue.*

   (a) Prouver que $\mathbb{U}$ est compact.

   (b) En déduire une contradiction.

3. Conclure en donnant une définition de π.

• Montrer que les fonctions sinus et cosinus sont 2π périodiques ?