Endomorphismes des espaces euclidiens

MP2 Prytanée National Militaire

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

17 mars 2025

E est un Espace EUCLIDIEN de dimension n.

Table des matières

1 Adjoint d'un endomorphisme

DÉFINITION : **Ajoint d'un endomorphisme**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
Il existe un unique endomorphisme $u^* \in \mathcal{L}(E)$ tel que :

$$\forall x,\ y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^*(y)\rangle$$

u^* est appelé l'*adjoint* de u.

Preuve :

- Unicité : En prenant une bon $e = (e_i)_{i\in[\![1,n]\!]})$, on a $\langle u(e_i), e_j\rangle = \langle e_i, u^*(e_j)\rangle$ pour tout $i,\ j \in [\![1, n]\!]$.
  Ainsi, les coordonnées de $u^*(e_j)$ dans la bon e sont parfaitement déterminées.
- Existence : On vérifie par un simple calcul que l'endomorphisme trouvé convient.

Complément

On peut également montrer que u^* existe et est unique en appliquant le théorème de Riesz sur les formes linéaires dans un espace euclidien. En effet, en fixant $y \in E$ et en considérant la forme linéaire $\varphi_y : x \mapsto \langle u(x), y \rangle$, on montre qu'il existe un unique a_y tel que $\varphi_y = \langle ., a_y \rangle$.
On note alors $u^* : y \mapsto a_y$. Reste à prouver que u^* est un endomorphisme...

Méthode pour déterminer u^*

On utilise tout simplement la définition.
Soit $x,\ y \in E$, Calculons :
$$\langle u(x), y \rangle = \cdots = \cdots = \langle x, v(y) \rangle$$
On en déduit que v est l'endomrophisme u^* cherché.

Exercice : 1

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AMA^T \end{array}$.
Déterminer l'adjoint de φ_A lorsque $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire usuel.

Pour tout $m, \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a :
$$\langle \varphi_A(M), N \rangle = \mathrm{Tr}((AMA^T)^T N) = \cdots = \langle M, A^T N A \rangle = \langle M, \varphi_A^*(N) \rangle$$
Nous avons alors $\varphi_A^* = \varphi_{A^T}$.

Corollaire : **Matrice de l'adjoint dans une bon**

Dans une bon e : $\quad A = \mathrm{Mat}_e(u) \quad \Rightarrow \quad A^T = \mathrm{Mat}_e(u^*)$

Preuve : Conséquence immédiate de la démonstration précédente.

Exercice : 2

($\heartsuit$) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

1. En se plaçant dans une bon, montrer que $\dim(\ker u) = \dim((\mathrm{Im}\, u^*)^\perp)$.
2. En déduire que $\ker(u) = (\mathrm{Im}\, u^*)^\perp$.

Exercice : 3

($\heartsuit$) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$. (on dit que u est un endomorphisme normal).
Montrer que si F est stable par u alors $F^\perp$ est stable par u.

On pourra procéder matriciellement en se plaçant dans une base adaptée à $E = F \oplus F^\perp$.

Remarque : Lorsque $u^* = u$, on dit que u est un endomorphisme autoadjoint (ou parfois *symétrique*).

Proposition : **Propriétés de l'adjoint**

- $(\lambda u + \mu v)^* = \lambda u^* + \mu v^*$
- $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
- $(u^*)^* = u$
- $\det(u^*) = \det(u)$
- $\chi(u^*) = \chi(u)$ et donc $\mathrm{Sp}(u^*) = \mathrm{Sp}(u)$
- $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$ lorsque $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$

Preuve :
- Meth1 : Via l'isomorphisme canonique à partir des propriétés de la transposition matriciel.
- Méth2 : En remarquant que $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle v(x), y\rangle \Rightarrow u = v$

Exemple : Montrer que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $(P(u))^* = P(u^*)$.

Exemple : Que dire de l'adjoint d'un projecteur ? D'une symétrie ?

PROPOSITION : **Sev stable**

Lorsque F est un sev stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u^*.

Preuve : Facile en posant proprement le problème.

Exercice : 4

(♡) Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$, montrer les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}(1)\ u \circ u^* = u^* \circ u \quad &\Longleftrightarrow \quad (2)\ \forall x,\ y \in E,\ \langle u^*(x), u^*(y)\rangle = \langle u(x), u(y)\rangle \\ &\Longleftrightarrow \quad (3)\ \forall x \in E,\ \|u^*(x)\| = \|u(x)\|\end{aligned}$$

- (1) $\Rightarrow$ (2) : par simple calcul direct.
- (2) $\Rightarrow$ (1) : en montrant que pour tout $x \in E$, on a $(u \circ u^* - u^* \circ u)(x) \in E^\perp$.
- (2) $\Rightarrow$ (3) : immédiat.
- (3) $\Rightarrow$ (2) : avec une formule de polarisation

2 Les matrices orthogonales

Cette partie est consacrée à la définition, la caractérisation et aux propriétés des matrices orthogonales. Ces matrices interviennent essentiellement dans l'étude des isométries qui sera abordée dans la partie suivante.

1. Définition :

DÉFINITION : **Matrice orthogonale**

On dit que $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale lorsque $A^T A = I_n$.

- Notations : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$.
- Remarques : $\det A = \pm 1$ et $A^{-1} = A^T$.
- Exemples : I_n, $-I_n$ sont orthogonales.

THÉORÈME : **Caractérisation**

$A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \Longleftrightarrow$ ses vecteurs colonnes (ou lignes) forment une bon pour le PS usuel de $\mathbb{R}^n$

Théorème utilisé en pratique pour reconnaître visuellement une matrice orthogonale !

Exemple : Les matrices $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ sont orthogonales.

Remarque : Lorsque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni de $\|.\|_2$, on a $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(0,\ \sqrt{n})$.

THÉORÈME : **Structure**

$O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé le *groupe orthogonal.*

Preuve : *Bien connaître cette démonstration !*

- Pas de difficulté pour montrer que c'est un sous-groupe.
- On remarque que $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{I_n\})$ où $f : \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ avec $f(A) = A^T A$.
  Or $\{I_n\}$ est un fermé et f est continue comme application dont les composantes sont des f° polynômiales en les coordonnées de A, donc $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
- Enfin, comme nous sommes en dimension finie, on montre que $O_n(\mathbb{R})$ est borné.
  C'est bien le cas puisque $O_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}(0, \sqrt{n})$ pour la norme euclidienne usuelle.

Remarque : Une application réelle continue sur $O_n(\mathbb{R})$ est bornée et atteint ses bornes (cf : la trace).

DÉFINITION : **Matrices orthogonales positive et positive**

Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. On a vu que $\det(A) = \pm 1$.

- Lorsque $\det A = 1$, on dit que A est une matrice orthogonale positive (ou directe).
- Lorsque $\det A = -1$, on dit que A est une matrice orthogonale négative (ou indirecte).

Notations :

- L'ensemble des matrices othogonales positives est noté $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$
- L'ensemble des matrices othogonales négatives est noté $\mathcal{O}_n^-(\mathbb{R})$ ou $\mathcal{O}^-(n)$

Exemple : I_n et $-I_n$.

Exemple : La matrice $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R})$ est-elle positive ou négative ?

THÉORÈME : $SO_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ appelé le groupe spécial orthogonal.

Preuve :

- C'est bien un sous-groupe.
- Remarquons que $SO_n(\mathbb{R}) = \det^{-1}(\{1\}) \cap O_n(\mathbb{R})$ où $\{1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ et det est continue.
  $SO_n(\mathbb{R})$ est donc un fermé inclus dans un compact de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, c'est également un compact.

Question : Quand rencontre-t-on les matrices orthogonales ?

- Elles sont utilisées dans les changements de bases orthonormales.
- Elles seront très utiles dans la réduction des isométries et des endomorpismes autoadjoints

2. Changement de bases orthonormales :

THÉORÈME : **Matrice de passage d'une bon vers une bon**

Soit e une bon et e' une base de E, alors :

$$e' \text{ est une bon} \iff P_e^{e'} \in O_n(\mathbb{R})$$

Dans ce cas, on a $P_{e'}^{e} = (P_e^{e'})^T$.

Preuve :

- Remarquons que les colonnes C_j de $P_e^{e'}$ sont les coordonnées de e'_j dans la bon e.
  On a donc $\langle e'_i, e'_j\rangle = C_i^T C_j$.
- Ainsi, e' est une bon si et seulement si $(C_i)_{1\leq i\leq n}$ bon pour le PS usuel de $\mathbb{R}^n$.

COROLLAIRE : **Formule de changement de bon**

Si e et e' sont deux bon, en notant $P = P_e^{e'}$, la formule de changement de bases s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{e'}(u) = P^T \,\mathrm{Mat}_e(u) P \quad \text{car} \quad P^{-1} = P^T$$

Vocabulaire : On dit alors que les matrices A et A' sont *orthogonalement semblables.*

Formule très souvent utilisée pour la diagonalisation des isométries et des endomorphismes auto-adjoints !

3. Orientation d'un espace vectoriel réel

DÉFINITION : **Bases de même orientation**

On dira que 2 bases e et e' de E ont la même orientation lorsque $\det_e(e') > 0$.

Preuve : On remarque que $\det_e(e')\det_{e'}(e) = 1$ et donc que $\det_e(e')$ et $\det_{e'}(e)$ sont de même signe.

Exemple : Choissez 2 bases de $\mathbb{R}^2$ et dîtes si elles ont la même orientation.

DÉFINITION : **Espace orienté**

On dira que E est orienté lorsqu'on choisit une orientation directe pour la base e dont il est munit.
On dit alors que e est une *Base Orthonormée Directe* (bond).

Vocabulaire : $\mathbb{R}^n$ est dit *euclidien orienté usuel* lorsque sa base canonique est une bon jugée directe.

LEMME : Si e et e' sont deux bond de E, alors $\det_e(e') = 1$.

Preuve : Nous avons $\det_e(e') = \det P_e^{e'}$ avec $P_e^{e'} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et e et e' de même orientation.

PROPOSITION : **Indépendance du déterminant vis à vis de la bond choisie**

Si e et e' sont deux bond de E, alors :

$$\forall (x_1,\ \ldots,\ x_n) \in E^n, \quad \det_e(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \det_{e'}(x_1,\ \ldots,\ x_n)$$

En d'autres termes, le déterminant d'un système de vecteurs ne dépend pas de la bond choisie.

Preuve : $\det_e(x_1,\ \ldots,\ x_n) = \det_e(e')\det_{e'}(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ d'après le caractère n-linéaire alterné.

La valeur commune précédente est appelé le *produit mixte* de $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ et est noté $[x_1,\ \ldots,\ x_n]$. (HP)

3 Introduction sur les Isométries

Dans cette partie, nous nous intéressons aux endomorphismes qui conservent la norme d'un vecteur que l'on nomme *isométrie*. Nous verrons en particulier :

- Les caractérisations des isométries à l'aide de :
  - $\rightarrow$ de la conservation du produit scalaire
  - $\rightarrow$ de la forme de leur matrice dans une bon
  - $\rightarrow$ de l'image d'une bon
- Un théorème très important qui précise comment réduire les isométries.
- Le cas des isométries en dimension 2 (rotations et réflexions) et les isométries positives en dimension 3

---

1. Définition :

DÉFINITION : **Isométrie (ou automorphisme orthogonal)**

Les isométries de E sont les endomorphismes $u \in \mathcal{L}(E)$ qui conservent la norme de E :

$$\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

Notation : On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Exemples :

- id_E et $-\mathrm{id}_E$ et les symétries orthogonales.
- Les projecteurs orthogonaux ne sont pas des isométries.

THÉORÈME : **Première caractérisation des isométries**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

u est une isométrie $\iff$ $\forall x,\ y \in E,\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ (u conserve le produit scalaire)

D/ Par double implication en utilisant une formule de polarisation.

PROPOSITION : **Valeurs propres d'une isométrie**

Pour $u \in \mathrm{O}(E)$.

- $\mathrm{Sp}(u) \subset \{-1,\ 1\}$.
- $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$ et donc $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$.

Preuve : Facile.

Exercice : 5

$(*)$ Soit $f \in \mathrm{O}(E)$ diagonalisable. Montrer que f est une symétrie.

Voir exercice 78 de la banque CCINP.

2. Caractérisation et structure :

THÉORÈME : **Autres Caractérisations des isométries**

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\boxed{e \text{ une bon}}$.

$$(i)\ u \in \mathrm{O}(E) \iff (ii)\ u(e) \text{ est une bon}$$
$$\iff (iii)\ \boxed{\mathrm{Mat}_e\, u \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})}$$
$$\iff (iv)\ u^* = u^{-1}.$$

Preuve :

- $(i) \Rightarrow (ii)$ Simple calcul de $\langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle = \delta_{i,j}$
- $(ii) \Rightarrow (iii)$ Car c'est la matrice de passage d'une bon vers une bon.
- $(iii) \Rightarrow (i)$ Par calcul matriciel de $\|u(x)\|^2$.
- $(iii) \iff (iv)$ ou $(i) \iff (iv)$ Immédiat.

Ce théorème est essentiel car il permet de reconnaître une isométrie grace à sa matrice !
Attention, pour l'appliquer, il faut bien vérifier que la base est une bon.

Exemple : La matrice $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & -4 \\ 8 & 1 & 4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ est-elle la matrice d'une isométrie ?

COROLLAIRE : Lorsque $u \in \mathrm{O}(E)$, on a : $\forall x,\ y \in E, \quad \langle u(x), y\rangle = \langle x, u^{-1}(y)\rangle$.

D/ Immédiat.

COROLLAIRE : **Structure de** $\mathrm{O}(E)$

$\mathrm{O}(E)$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ appelé le *groupe orthogonal.*

Preuve : Soit $\Phi : \mathcal{L}(E) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ l'isomorphisme canonique où la base e est une bon.

- Compact : Φ^{-1} est continue comme AL au départ d'un ev de dimension finie.
  Comme $\mathrm{O}(E) = \Phi^{-1}(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}))$ avec $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ qui est compact, alors $\mathrm{O}(E)$ est aussi compact.
- Groupe : Φ est un isomorphisme de groupes multiplicatifs, donc l'image réciproque d'un sous-groupe est un sous-groupe.

Remarques :

→ Si $u \in \mathrm{O}(E)$ alors $\det u = \pm 1$.
→ Une application réelle continue sur $\mathrm{O}(E)$ est bornée et atteint ses bornes.

3. Isométries directes et indirectes :

DÉFINITION :
- On appelle *isométries directes* (ou positives) les isométries de déterminant 1.
- On appelle *isométries indirectes* (ou négatives) les isométries de déterminant -1.

Notations :

- On note $\mathrm{SO}(E)$ l'ensemble des isométries directes de E.
- On note $\mathcal{O}^-(E)$ l'ensemble des isométries indirectes de E.

Exemples :

- id_E et $-\mathrm{id}_E$
- Les symétries orthogonales par rapport à F (le déterminant varie selon la dimension de F).
- Les réflexions sont des isométries indirectes.

PROPOSITION : $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe compact de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$ appelé le *groupe spécial orthogonal.*

Preuve :
- $\mathrm{SO}(E) = \mathrm{O}(E) \cap SL(E)$ où $SL(E)$ est le groupe des endomorphismes de déterminant 1.
- $\mathrm{O}(E)$ est un compact.
  $SL(E)$ est un fermé comme image réciproque d'un fermé par une applic° continue (det).

4. Isométries du plan : E_2 est ici un plan euclidien orienté.

   (a) Isométries directe

THÉORÈME : Les matrices orthogonales directes de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ sont les matrices :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \theta \in [0,\ 2\pi[\text{ ou }]-\pi,\ \pi]$$

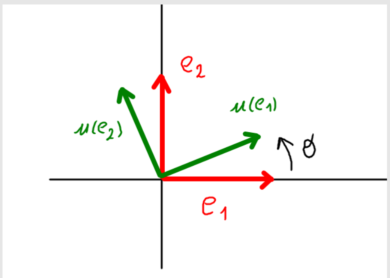
Ces matrices commutent et vérifient $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$.

Preuve :

Remarque : $(\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\ \times)$ est alors un groupe commutatif.

Corollaire : **Les éléments de** $\mathrm{SO}(()E_2)$

Soit $u \in \mathrm{SO}(()E_2)$.
En dimension 2, u a toujours la même matrice quelle que soit la bond e choisie.
Cette matrice est de la forme R_θ avec $\theta \in \mathbb{R}$ unique à 2π près.



$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{pour toute bond } e = (e_1, e_2)$$

On dit alors que u est la *rotation* d'angle θ.

Preuve : Facile en utilisant la commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.

Corollaire : **Formules**

Soit r est une rotation de $\mathrm{O}(E_2)$, d'angle α et $(e_1,\ e_2)$ une bon de E_2.
On a alors :

$$\begin{cases} r(e_1) = \cos\alpha.e_1 + \sin\alpha.e_2 \\ r(e_2) = -\sin\alpha.e_1 + \cos\alpha.e_2 \end{cases}$$

D/ Immédiat !

Exercice : 6

$(*)$ Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Peut-on affirmer que : $\quad \forall x \in E,\ \langle u(x), x\rangle = 0 \Rightarrow u = \tilde{0}$?

Corollaire : **Formules donnant l'angle**

Si r est une rotation de $\mathrm{SO}(E_2)$, alors son angle α est défini par :

$$\cos\alpha = \frac{\langle x, r(x)\rangle}{\|x\|^2} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{[x,\ r(x)]}{\|x\|^2} \quad \text{où} \quad x \neq 0$$

En pratique, on prend x le plus simple possible.

Preuve : Calculs en se plaçant dans une bond $e = (\frac{x}{\|x\|},\ e_2)$.

Méthodes pour calculer l'angle α d'une rotation r

- Méthode 1 : Si on connait la matrice de r dans une bond, on lit directement $\begin{cases} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{cases}$.
- Méthode 2 : Sinon, on peut prendre un vecteur $x \in E$ (le plus simple possible) et appliquer :

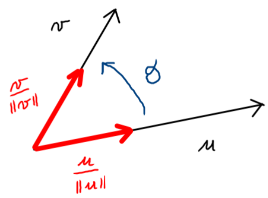
$$\cos\alpha = \frac{\langle x, r(x)\rangle}{\|x\|^2} \quad \text{et} \quad \sin\alpha = \frac{[x,\ r(x)]}{\|x\|^2}$$

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel orienté, reconnaître $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que, dans la base canonique :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

DÉFINITION : **Angle orienté entre deux vecteurs en dimension 2**

Soit u et v deux vecteurs non nuls de E de dimension 2.



- le couple $(u,\ v)$ définit un angle orienté $(u,\ v)$.
- Il existe une unique rotation transformant $\frac{u}{\|u\|}$ en $\frac{v}{\|v\|}$.
  L'angle de cette rotation est appelé la *mesure de l'angle orienté* $(u,\ v)$.

Preuve : On considère e et f les deux bond issues de $\frac{u}{\|u\|}$ et de $\frac{v}{\|v\|}$.
L'endomorphisme u qui transforme e en f est une rotation qui convient.
On montre alors que u est unique en calculant son angle sachant que $\frac{v}{\|v\|} = \cos(\theta).\frac{u}{\|u\|} + \sin(\theta).e_2$.

COROLLAIRE : **Formule de l'angle orienté** (u, v)

L'angle (u, v) est donné par les formules : $\cos(u,v) = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\|v\|}$ et $\sin(u,v) = \dfrac{[u,\ v]}{\|u\|\|v\|}$

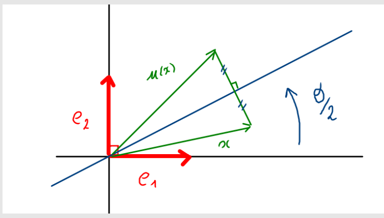
Où $[u,\ v]$ est le produit mixte de u et v qui se calcule en prenant leur déterminant dans une bond.

(b) Isométries indirectes :

THÉORÈME : Les matrices orthogonales indirectes de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ sont $S_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.
Ces matrices vérifient $(S(\theta))^2 = I_2$.

D/ Comme précédemment ou avec $\varphi : \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \to O_2^-(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(A) = JA$ avec $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Corollaire : **Les isométries indirectes en dimension 2**



- Les isométries indirectes sont les réflexions (symétries orthogonales par rapport à des droites).
- Il existe une bon e dans laquelle la matrice d'une isométrie indirecte est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Preuve :

- On vérifie que $\begin{cases} (\cos(\frac{\theta}{2}),\ \sin(\frac{\theta}{2})) \text{ dirige } \ker(S(\theta) - I_2) \\ (\sin(\frac{\theta}{2}),\ -\cos(\frac{\theta}{2})) \text{ dirige } \ker(S(\theta) + I_2) \end{cases}$.
- On se place dans une base adaptée ou on effectue une rotation du repère d'un angle $\frac{\theta}{2}$:
On vérifie alors facilement que $S(0) = R(-\frac{\theta}{2})S(\theta)R(\frac{\theta}{2})$.

Bilan : $\mathrm{O}(E_2) = \{\text{rotations}\} \cup \{\text{réflexions}\}$

4 Réduction des isométries vectorielles

1. Préliminaire : Montrer qu'en dimension 2, les rotations non triviales ne sont pas diagonalisables.

2. La théorie :

   (a) 2 Lemmes sont nécessaires :

Lemme : **Orthogonal d'un sev stable**

Pour $u \in \mathrm{O}(E)$. Si F est stable, alors :

- $F^\perp$ l'est aussi.
- $u_{|F}$ et $u_{|F^\perp}$ sont également des isométries vectorielles

Preuve : Facile.

Ce théorème est essentiel pour la suite...
On retrouve un théorème analogue pour les endomorphismes autoadjoints vus plus loin.

Lemme : En dimension finie, tout endomorphisme admet une droite ou un plan stable.

Preuve : Les deux démonstrations de ce théorème sont intéressantes à revenir.
- Matriciellement : en considérant un vecteur propre réel ou complexe.
- Avec Cayley-Hamilton : $\tilde{0} = \bigoplus_{k=1}^{p} P_k(u)$ avec $P_k(u) = u - \lambda_k \,\mathrm{id}_E$ ou $\left\{ \begin{array}{l} P_k(u) = u^2 + a_k u + b_k \,\mathrm{id}_E \\ \Delta < 0 \end{array} \right.$.

Appliquons ce résultat à la réduction des isométries.

Théorème Fondamental : Réduction d'une isométrie

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

Si $u \in \mathrm{O}(E)$ alors il existe une bon dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale par blocs de la forme (1), (-1) ou , $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ avec $\theta \in]-\pi, \ \pi[\setminus\{0\}$

On peut imposer $\theta \in]0, \ \pi[$ quitte à inverser l'ordre des vecteurs de la base.
La réciproque est vraie mais ne présente pas vraiment d'intérêt.

Preuve : Par récurrence sur la dimension de E.
- OK pour $n = 1$ et pour $n = 2$.
- On suppose la propriété vraie pour $n - 1$ et n.
  Soit E tel que $\dim E = n + 1$.
  On traite alors les cas où E admet une droite stable et un plan stable en considérant les endomorphismes induits sur leurs orthogonaux.

Autrement dit : Si $u \in \mathrm{O}(E)$ alors E est somme directe de $\left\{ \begin{array}{l} E_1(u) \\ E_{-1}(u) \\ \text{de plans sur lesquels } u \text{ opére une rotation} \end{array} \right.$.

C'est vraiment un théorème fondammental dans la mesure où il permet d'étudier assez facilement les diverses propriétés des isométries en dimension quelconque ! ! Autrement dit, il faut l'utiliser systématiquement dans les exercices afin de simplifier les raisonnements !

Corollaire : Réduction d'une matrice orthogonale

Soit $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
A est orthogonalement semblable à une matrice D diagonale par blocs de la forme :

$$(1), \quad (-1) \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \theta \in]0, \ \pi[$$

En d'autres termes, il existe $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\quad A = PDP^T \quad$ avec $\quad P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$

D/ Avec l'isométrie canoniquement associée.

Pour l'étude des matrices orthogonales, on pourra commencer par effectuer la réduction précédente.

Exercice : 7

(♡) Montrer que $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arc tandis que $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$ l'est.

3. Réduction des isométries positives en dimension 3 : E est une espace euclidien orienté de dimension 3.

   (a) Orientation induite :

   En dimension 3, un plan P n'admet a priori pas d'orientation définie.

   DÉFINITION : **Orientation d'un plan de E_3**

   On peut orienter un plan vectoriel de E en choisissant un vecteur n tel que $P = n^\perp$.
   Soit $(e_1,\ e_2)$ une base de P.

   On dira que $(e_1,\ e_2)$ est directe lorsque $(e_1,\ e_2,\ n)$ est directe et indirecte sinon.

   Vocabulaire : On dit qu'on a ainsi muni $P = n^\perp$ de l'orientation induite par celle de $D = \mathrm{Vect}(n)$.

   Remarque : Si on inverse l'orientation de D, celle de P est également inversée.

   (b) Rotation de l'espace :

   THÉORÈME : **Réduction d'une rotation en dimension 3**

   Soit r est une rotation de E.
   Il existe une bond (ou simplement une bon) $(u,\ v,\ w)$ (on a alors $u^\perp = \mathrm{Vect}(v, w)$) dans laquelle sa matrice est :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta \text{ unique à } 2\pi \text{ près} \\ u \text{ unique au signe près} \end{array} \right.$$

   On dit alors que u est la rotation $\left\{ \begin{array}{l} \text{d'axe } \mathrm{Vect}(u) \\ \text{d'angle } \theta \end{array} \right.$ et sera notée $Rot_{u,\theta}$.

   Les rotations d'angle π sont appelés des *retournements*.

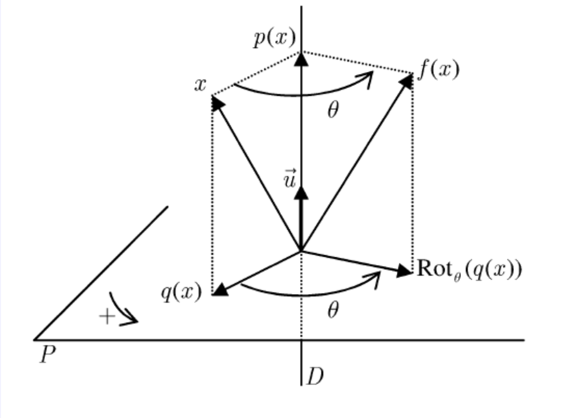
   Preuve : On applique le théorème de décomposition des isométries.

   Remarque : En d'autres termes, les endomorphismes induits sur $\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Vect}(u) \\ u^\perp \end{array} \right.$ sont $\left\{ \begin{array}{l} \text{l'identité} \\ \text{la rotation d'angle } \theta \end{array} \right.$.

   Dans une telle base, l'étude des rotations devient beaucoup plus simple...

   Interprétation géométrique d'une rotation f de E_3

   Si on décompose $x = x_1 + x_2$ avec $\left\{ \begin{array}{l} x_1 \in \mathrm{Vect}(u) \\ x_2 \in u^\perp \end{array} \right.$, on a : $f(x) = x_1 + r_\theta(x_2)$.



Proposition : Détermination de l'angle et de l'axe

Pour une rotation $r \neq \mathrm{id}_E$.

- L'axe de la rotation r est l'ensemble des vecteurs invariants.
- L'angle θ de la rotation vérifie $1 + 2\cos(\theta) = \mathrm{Tr}(u)$.

Preuve :

- 1 est valeur propre simple.
- Immédiat.

Proposition : Pour tout $\theta,\ \theta' \in \mathbb{R}$ et $u \in E_3$ non nul, on a :

- $Rot_{u,\theta} \circ Rot_{u,\theta'} = Rot_{u,\theta+\theta'}$ et donc $\begin{cases} Rot_{u,\theta} \circ Rot_{u,\theta'} = Rot_{u,\theta'} \circ Rot_{u,\theta} \\ Rot_{u,\theta}^{-1} = Rot_{u,-\theta} \end{cases}$.
- $Rot_{u,\theta} = Rot_{u,\theta'} \iff \theta = \theta'\ [2\pi]$

Preuve : En vérifiant ces propriétés pour les endomorphismes induits sur $\mathrm{Vect}(u)$ et sur $u^\perp$.

Remarque : Changer l'orientation de l'axe change l'angle de la rotation : $Rot_{u,\theta} = Rot_{-u,-\theta}$

Preuve : On recherche la matrice de $r_{u,\theta}$ dans la bon $(-u,\ w,\ v)$.

Exercice : 8

(♡♡) **Rotations qui commutent**

1. Montrer que si f et g sont deux rotations de même axe, alors elles commutent.
2. Montrer que si f et g sont deux retournements d'axes orthogonaux alors elles commutent.
3. Réciproquement, montrer que si deux rotations f et g commutent alors soit elles ont le même axe soit ce sont deux retournements d'axes orthogonaux.

On peut procéder matriciellement... ou pas...

(c) Musculation : Recherche des éléments caractéristiques d'une rotation

Hors-Programme

LEMME : Une rotation différente de id_E admet une droite vectorielle de vecteurs invariants.

D/ Facile en procédant matriciellement.

Méthode de reconnaissance d'un endomorphisme

But : Identifier l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel u canoniquement associé à $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

- On commence par calculer A^2 pour savoir s'il s'agit d'un projecteur ou d'une symétrie.
  Si c'est le cas, on détermine ses sous-espaces caractéristiques.
- Sinon, il est très probable que $A \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$. Dans ce cas :
  $\rightarrow$ u est une isométrie car la base canonique est une bon de $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel.
  $\rightarrow$ On calcule $\det A$ pour savoir si u est une rotation ou une isométrie négative.
  Si u est une rotation, voir la méthode suivante pour déterminer ses éléments caractéristiques.
  Si u n'est pas une rotation, alors $-u$ en est une...

Méthode de recherche de l'angle et de l'axe d'une rotation vectorielle

Soit la rotation r de matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

$\rightarrow$ L'axe $D = \mathrm{Vect}(u)$ est l'ensemble des vecteurs invariants $\ker(u - \mathrm{id})$.

$\rightarrow$ On obtient le cosinus de l'angle avec la trace : $\mathrm{Tr}\, A = 2\cos\theta + 1$

$\rightarrow$ On obtient le signe du sinus de l'angle en calculant le signe de $[u,\ x,\ r(x)]$ avec $x \notin \mathrm{Vect}(u)$
En général, on pend $x = (1, 0, 0)$.

Preuve : Du 3ème point
On se place dans une bond $(u,\ e_2,\ e_3)$ avec u qui dirige l'axe de la rotation.
On prend $x = \alpha u + \beta v + \gamma w$ avec $\beta\gamma \neq 0$ et on calcule $[u,\ x,\ f(x)] = \cdots = (\beta^2 + \gamma^2)\sin\theta$.

Exercice : 9

$(*)$ E est un espace eucliden orienté muni d'une bond e.

Déterminer l'endomorphisme f dont la matrice dans e est : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Preuve :

- Comme A est une matrice orthogonale de déterminant 1 et que e est une bon, f est une rotation.
- Vecteurs invariants : $D = \mathrm{Vect}(u)$ avec $u = (1, 1, 1)_e$.
- Angle : $1 + 2\cos\theta = 0$ donc $\theta = \pm\frac{2\pi}{3}$ et signe de θ : $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 > 0$

4. Réduction des isométries négatives en dimension 3 : (HP)

Mais une méthode simple consiste à remarquer qu'en dimension 3, l'opposée d'une isométrie négative est une rotation.

5 Endomorphismes autoadjoints et Matrices symétriques

E est ici un espace Euclidien.
Les endomorphismes autoadjoints (ou les matrices symétriques réelles) se rencontrent fréquemment et se caractérisent par le fait qu'ils (elles) sont diagonalisables dans une bon. Cette propriété est très souvent utilisée dans les exercices portant sur ces endomorphismes (matrices).

1. Définition :

DÉFINITION : **Endomorphisme autoadjoint (ou symétrique)**

$u \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme *autoadjoint* lorsque $u^* = u$, c'est à dire :

$$\forall x,\ y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$$

Notation : On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes autoadjoints de E.

Méthode pour prouver qu'un endomorphisme est autoadjoint

On utilise la définition.
Soit $x,\ y \in E$, Calculons : $\langle u(x), y\rangle = \cdots = \langle x, u(y)\rangle$.

Si on dispose d'une base de E, on peut se contenter de vérifier cette relation sur les vecteurs de la base.
Soit $i, j \in [\![1, n]\!]$, Calculons : $\langle u(e_i), e_j\rangle = \cdots = \langle e_i, u(e_j)\rangle$.

Exemples :

- Les homothéties vectorielles sont des endomorphismes autoadjoints.
- Les projecteurs orthogonaux et les symétries orthogonales sont autoadjoints.

Exercice : 10

(♡). Dans $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire de Laguerre.
Montrer que l'endomorphisme T défini par $T(P) = xP'' - (x-1)P'$ est auto-adjoint.

C'est grâce à cette propriété qu'on démontre que les polynômes de Laguerre forment une famille orthogonale pour le produit scalaire de Laguerre.

PROPOSITION : Si u est un endomorphisme autoadjoint, alors :

- $\operatorname{Im} u = (\ker u)^{\perp}$.
- $\ker(u) \oplus \operatorname{Im}(u) = E$

Preuve : Facile.

Remarque : On peut donc construire une bon de E en concaténant une bon de $\ker u$ et une bon de $\operatorname{Im} u$.

Proposition : **Projecteurs et symétries orthogonales**

- Un projecteur est orthogonal si et seulement si il est autoadjoint.
- Une symétrie est orthogonale si et seulement si elle est autoadjointe.

Preuve : Pour les projecteurs :

$\Leftarrow$ Soit p un projecteur orthogonal. Calculons $\langle p(x), y\rangle = ... = \langle p(x), p(y)\rangle = \langle x, p(y)\rangle$

$\Rightarrow$ Soit p un projecteur autoadjoint sur F parallèlement à G.
Pour $f \in F$ et $g \in G$, on a : $\langle f, g\rangle = \langle p(f), g\rangle = \langle f, p(g)\rangle = \langle f, 0\rangle = 0$

2. Matrice d'un endomorphisme autoadjoint :

Théorème : **Caractérisation matricielle des endomorphismes autoadjoints**

Pour $u \in \mathcal{L}(E)$: u est autoadjoint $\iff$ sa matrice dans une bon est symétrique.

D/ Facile sachant que si $e = (e_1, \ \ldots, \ e_n)$ est une bon, alors $\operatorname{Mat}_e(u) = (\langle u(e_j), e_i\rangle)_{i,j}$.

Ce résultat est fondamental ! ! N'oubliez pas qu'il n'est vrai que si la base e est une bon !

Construction d'un endomorphisme autoadjoint

Dans $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel, l'endomorphisme canoniquement associé à A symétrique réelle est un endomorphisme autoadjoint.

Exemple : L'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est autoadjoint.

Proposition : Si A est une matrice symétrique réelle, alors :

- $\operatorname{Im} A = (\ker A)^\perp$.
- $\ker(A) \oplus \operatorname{Im}(A) = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$

Preuve : Conséquence de la proposition analogue sur les endomorphismes autoadjoints.

Méthode pour reconnaître un projecteur ou une symétrie orthogonale ?

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On note $A = \operatorname{Mat}_e(u)$ où e est une bon de E.

- u est un projecteur orthogonal $\iff \begin{cases} A^2 = A \\ A^T = A \end{cases}$
- u est une symétrie orthogonale $\iff \begin{cases} A^2 = I_n \\ A^T = A \end{cases}$

Exemple : Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel de matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$

COROLLAIRE : **Structure de $\mathcal{S}(E)$**

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes autoadjoints est un sev de $\mathcal{L}(E)$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

D/ Via l'isomorphisme canonique $\varphi : \mathcal{L}(E) \to \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice : 11

$(*)$ Quels sont les endomorphismes autoadjoints orthogonaux d'un espace euclidien E ?

Exercice : 12

$(*)$ Soit f et g deux endomorphismes autoadjoints de E.
Montrer que $f \circ g$ est autoadjoint si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.

3. Théorème spectral :

La preuve du théorème spectral repose sur deux lemmes analogues aux lemmes énoncés précédemment pour la réduction des isométries.

- Les 2 lemmes :

Je vous conseille de bien les connaître, ainsi que leur démonstration.

LEMME : Soit F un sev stable par $u \in \mathcal{S}(E)$.

- $F^\perp$ est également stable par u.
- Les endomorphismes induits par u sur F et $F^\perp$ sont également autoadjoints.

D/ Facile.

LEMME : Un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet au moins une valeur propre réelle.

Preuve :

- Si $n=1$: OK.
- Si $n=2$: Dans une bon, la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$. La suite est simple...
- Si $n>2$: u admet au moins une droite ou un plan stable (vu précédemment !).
  On se retrouve alors dans l'un des deux cas précédents car l'endomorphisme induit sur l'un de ces sev est encore autoadjoint.

- Théorème spectral pour les endomorphismes autoadjoints :

C'est LE théorème qui est constamment utilisé dans l'étude des endomorphismes autoadjoints.

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Théorème spectral pour les endomorphismes**

Dans un espace euclidien :

Un endomorphisme est autoadjoint $\iff$ il est diagonalisable dans une bon

Cela signifie en particulier que toutes ses valeurs propres sont réelles.

Preuve :

- $\Rightarrow$ Par récurrence.
- $\Leftarrow$ Facile.

PROPOSITION : Les sev propres d'un endomorphisme autoadjoint sont deux à deux orthogonaux.

D/ Immédiat en écrivant $\langle u(x), y\rangle = \langle x, v(y)\rangle$ pour x et y associés à deux valeurs propres distinctes.

COROLLAIRE : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On a :

$$u \in S(E) \quad \iff \quad \exists \lambda_1,\ \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ tels que } E = E_{\lambda_1}(u) \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_p}(u)$$

Méthodes d'étude d'un endomorphisme autoadjoint

Pour étudier $u \in S(E)$, nous avons deux options :

- Soit on procède matriciellement en se plaçant dans une bon e de diagonalisation :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

- Soit on procède vectoriellement en décomposant E en sev propres supplémentaires :

$$E = E_{\lambda_1}(u) \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_p}(u)$$

Un calcul qui revient souvent en exercice

Soit $u \in S(E)$. On a alors : $E = E_{\lambda_1}(u) \overset{\perp}{\oplus} \dots \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_p}(u)$.

Pour tout $x \in E$, on peut alors décomposer x en somme de vecteurs propres orthogonaux :

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_p \qquad \text{avec} \qquad \forall k \in [\![1, p]\!],\ x_k \in E_{\lambda_k}(u)$$

D'après le théorème de Pythagore, on a alors : $\begin{cases} \|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 + \cdots + \|x_p\|^2 \\ \|u(x)\|^2 = \lambda_1^2\|x_1\|^2 + \lambda_2^2\|x_2\|^2 + \cdots + \lambda_p^2\|x_p\|^2 \end{cases}$

Exercice : 13

($\heartsuit$) Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.

Montrer que $\quad |||u||| = \sup\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$. $\qquad$ ($\rho_u = \sup\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} |\lambda|$ *est appelé le rayon spectral de* u).

Preuve : On décompose x en somme de vecteurs propres.

Exercice : 14

($\heartsuit$) Soit $u \in \mathcal{S}(E)$.
On note λ_{min} et λ_{max} la plus petite et la plus grande des valeurs propres.
Montrer que : $\quad \forall x \in E,\ \lambda_{min}\|x\|^2 \leq \langle u(x), x\rangle \leq \lambda_{max}\|x\|^2$

Preuve : On décompose x en somme de vecteurs propres.

Exercice : 15

($\heartsuit$) Déterminer les endomorphismes autoadjoints f de E vérifiant pour tout $x \in E$: $\langle f(x), x\rangle = 0$.

En particulier vrai pour les vecteurs propres.

Exercice : 16

($\heartsuit$) Soit u un endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien E.
Montrer que pour tout entier naturel p impair, il existe un endomorphisme autoadjoint v tel que $v^p = u$.

Par intuition après avoir diagonalisé u.

Exercice : 17

($\heartsuit$) **Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit**.
Soit u un endomorphisme diagonalisable E et F un sev de E stable par u.
On note e une base de vecteurs propres de E.

1. Justifiez qu'il existe sur E un produit scalaire tel que e soit une bon.
2. Montrer que u est autoadjoint dans l'espace euclidien obtenu.

3. En déduire que u_F est diagonalisable.

4. Diagonalisation des matrices symétriques réelles :

C'est LE théorème qui est constamment utilisé dans l'étude des matrices symétriques.

THÉORÈME : **Théorème Spectral pour les matrices**

- Toute matrice symétrique réelle $A \in S_n(\mathbb{R})$ est orthogonalement diagonalisable.

  En d'autres termes : $\exists P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \exists D \in D_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^T$.

- *Orthodiagonaliser* $A \in S_n(\mathbb{R})$ signifie *déterminer* $\left\{ \begin{array}{l} P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \\ D \in D_n(\mathbb{R}) \end{array} \right.$ telles que $A = PDP^T$.

Preuve : On considère u l'endomorphisme autoadjoint canoniquement associé dans $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel. On peut alors :

- Soit appliquer le théorème spectral à u puis la formule de changement de bon.
- Soit considérer une bon de vecteurs propres $(x_1, \ldots, x_n)$.
  Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $u(x_k) = \lambda_k x_k$, ce qui donne $AX_k = \lambda X_k$ dans la base canonique e.
  Les vecteurs colonnes $X_1, \ldots, X_n$ formant une bon pour le produit scalaire usuel, un calcul par bloc donne $A = PDP^T$ où $P = (X_1 \ \ldots \ X_n)$.

Voir exercices 63 et 68 de la banque CCINP.

Exemple : Orthodiagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice : 18

$(*)$ Soit J la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
Trouver $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ et D diagonale telle que $P^T JP = D$.

Preuve : Il s'agit simplement de trouver une bon de vecteurs propres...

Attention !

Une matrice symétrique à coefficients complexes n'est pas forcément diagonalisable.

Exemple : $A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$.

Comme $\chi_A = X^2$, alors $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et donc que si A était diagonalisable, elle serait nulle ! !

Dans les exercices suivants, les matrices étudiées sont symétriques réelles.
On commence donc par les diagonaliser dans des bon !

Exercice : 19

$(*)$ Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M + M^T$ soit nilpotente.
Montrer que M est anti-symétrique.

Preuve :

Exercice : 20

$(*)$ Si $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ vérifie $M^p = I_n$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Que vaut M^2 ?

Preuve :

Sachez reconnaître certaines matrices symétriques réelles !

Lorsque $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $X,\ Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les matrices suivantes sont symétriques réelles :

- XX^T
- A^TA
- $A^T + A$
- $XY^T + YX^T$

Définition : **Valeurs singulières d'une matrice (H-P)**

Pour tout $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, A^TA est diagonalisable car c'est une matrice symétrique réelle.
Ses valeurs propres sont appelées les *valeurs singulières* de A.

5. Endomorphismes autoadjoints positifs / Matrices symétriques positives

(a) Endomorphisme autoadjoint positif :

Définition : Soit u un endomorphisme autoadjoint.

→ On dit que u est *positif* lorsque : pour tout $x \in E$, on a $\langle u(x), x\rangle \geq 0$.
→ On dit que u est *défini-positif* lorsque : pour tout $x \neq 0$, on a $\langle u(x), x\rangle > 0$.

On note $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}^{++}(E)$ ces deux ensembles.

THÉORÈME : Pour $u \in \mathcal{S}(E)$, on a :

$$\begin{cases} u \text{ est positif} & \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^+ \\ u \text{ est défini-positif} & \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Sp}(u) \subset \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$$

Savoir démontrer ce résultat !

Preuve : Par équivalences successives en en décomposant E en sep supplémentaires orthogonaux.

Remarque : On en déduit que $\mathcal{S}^{++}(E) = \mathcal{S}^+(E) \cap \mathrm{GL}(\mathbb{E})$

Exercice : 21

(♡) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où E est une espace euclidien.
On note $|||.|||$ la norme subordonnées à la norme euclidienne $\|.\|$.

1. Montrer que $u^* \circ u \in \mathcal{S}_n^+(E)$.
   On note λ_p sa plus grande valeur propre (appelée le *rayon spectral* de $u^* \circ u$).
2. Montrer que $|||u||| = \sqrt{\lambda_p}$.

Pour $\|x\| = 1$, on pourra calculer $\|u(x)\|$ en décomposant E en sep supplémentaires orthogonaux.

(b) Matrice symétrique positive

DÉFINITION : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$.

→ On dit que A est positive lorsque : $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $X^T AX \geq 0$.
→ On dit que A est définie-positive lorsque : $\forall X \neq 0$, on a $X^T AX > 0$.

On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ ces deux ensembles.

Remarque : Avec le PS usuel de $\mathbb{R}^n$, on a $X^T AX = \langle AX, X\rangle$ ce qui permet une analogie avec $\mathcal{S}^+(E)$.

Exemple : Lorsque $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice $A^T A \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$

- est symétique et positive
- est définie positive lorsque de plus A est inversible

Coefficients diagonaux d'une matrice de $S_n^+(\mathbb{R})$

Les matrices symétriques positives ont leurs coefficients diagonaux positifs.

D/ Soit A symétrique réelle.
En notant X_i le ième vecteur de la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a $A_{i,i} = X_i^T AX_i \geq 0$.

Exemple : La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas symétrique positive.

Question : Que dire des coefficients diagonaux d'une matrice définie positive ?

Un résultat utile pour la suite

Lorsque $A = (a_{i,j}) \in S_n(\mathbb{R})$ et $X = (x_i) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$X^T AX = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}x_i^2 + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} a_{i,j}x_i x_j$$

Exercice : 22

(♡) Montrer que les matrices suivantes sont symétiques positives.

1. Les matrices de Hilbert : $H = \left(\dfrac{1}{i+j+1}\right) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

   Vous remarquerez que $\frac{1}{i+j+1} = \int_0^1 t^{i+j}\, \mathrm{d}t$.

2. Les matrices de Gram : $H = \Big(\langle u_i, u_j\rangle\Big) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$

Exercice : 23

(∗) En utilisant la définition, montrer que :

1. $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \Rightarrow A^2 \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

2. $\left\{\begin{array}{l} A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \\ B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \end{array}\right.$ avec $AB = BA \quad \Rightarrow \quad A^2B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.

Théorème : Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A \text{ est positive} & \iff & \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+ \\ A \text{ est définie-positive} & \iff & \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^{+*} \end{array}\right.$$

Preuve : On introduit l'endomorphisme canoniquement associé à A dans $\mathbb{R}^n$ euclidien usuel.

Savoir également démontrer le résultat précédent par un raisonnement purement matriciel.

Exercice : 24

($\heartsuit$) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $(A^T A)^2 = I_n$. Montrer que A est orthogonale.

Exercice : 25

($\heartsuit$) **Racine carrée d'une matrice définie positive**

Soit $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ les valeurs propres de S.
Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = A^2$.

Exercice : 26

($\heartsuit\heartsuit$) **Unicité de la racine carrée d'une matrice définie positive**.

On reprend les notations introduites dans l'exercice précédent.
Supposons qu'il existe une autre matrice $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que $B^2 = S$.

1. Montrer que A est un polynôme en B puis en déduire que $AB = BA$.

   On justifiera l'existence de $L \in \mathbb{R}[X]$ tel que $L(\mathrm{Diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)) = \mathrm{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_n})$.

2. Montrer que A et B sont co-diagonalisables.

3. En déduire que $A = B$.

Proposition : **Caractérisation des matrices de $S_n^+(\mathbb{R})$ (H-P)**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, alors :

$$A \in S_n^+(\mathbb{R}) \iff \exists M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \text{ telle que } A = M^T M$$

Preuve :

$\Rightarrow$ On ortho-diagonalise A et on décompose $D = \Delta^2$.

$\Leftarrow$ Pas de difficulté...

Compléments

- On a également : $A \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \iff \exists M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = M^T M$.
  On peut alors utiliser ce résultat pour montrer que A définit alors un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:
  $$\langle X, Y\rangle = X^T A Y \qquad (= (MX)^T (MX))$$
- En orthonormalisant la base canonique pour le produit scalaire précédent, on obtient la décomposition de Cholesky :
  $$A = P^T P \quad \text{avec} \quad P \text{ triangulaire supérieure à coefficients strictement positifs}$$

Voir les vidéos de F. Maalouf sur youtube.

Exercice : 27

(♡♡) **Décomposition de Cholesky**

Soit A une matrice symétrique réelle définie positive.
On considère $\langle X, Y\rangle = X^T AY$ le produit scalaire défini par A sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Soit E la base canonique de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   Justifier que $A = (\langle E_i, E_j\rangle)_{i,j\in[\![1,n]\!]}$.
2. Soit ε son orthonormalisé de Schmidt pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle$. On note $P = P_\varepsilon^e$.
   Rappeler pourquoi P est triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs.
   Exprimer $\langle X, Y\rangle$ en fonction de $X' = PX$ et $Y' = PY$.
   En déduire que $A = P^T P$.

Cette décomposition est intéressante car les matrices triangulaires facilitent la résolution des systèmes et le calcul de déterminants.

6 Musculation : Les Matrices de Gram

E est ici un espace préhilbertien réel.

Définition : La *matrice de Gram* de $(a_1, \ldots, a_p) \in E^p$ est la matrice de terme général $\langle a_i, a_j\rangle$.

Cette matrice est notée $G(a_1, \ldots, a_p)\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$.

Remarque :

- La famille $(a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ est orthogonale $\iff$ $G(a_1, \ldots, a_n)$ est diagonale.
- La famille $(a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ est orthogonale $\iff$ $G(a_1, \ldots, a_n) = I_n$.

Lemme : **Décomposition de** $G(a_1, \ldots, a_p)$

Soit $p \in [\![1, \dim E]\!]$, et $a_1, \ldots, a_p$ des vecteurs de E.

On considère $\begin{cases} F \text{ un sev de } E \text{ de dimension } p \text{ contenant les vecteurs } a_1, \ldots, a_p \\ e = (e_1, \ldots, e_p) \text{ une bon de } F \end{cases}$.

Nous avons alors :

$$G(a_1, \ldots, a_p) = A^T A \quad \text{où} \quad A = \mathrm{Mat}_e(a_1, \ldots, a_p) = (\langle a_j, e_i\rangle) \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$$

Preuve : Simple calcul du terme général $\langle a_i, a_j \rangle$ de $G(a_1, \ldots, a_p)$.

Cette proposition est importante pour déterminer des propriétés intéressantes des matrices de Gram.

Exemple : Déterminer cette décomposition pour $G(a_1, a_2, a_3)$ où $\begin{cases} a_1 = (1,2,3) \\ a_2 = (-1,0,1) \\ a_3 = (1,1,0) \end{cases}$ dans $\mathbb{R}^3$ euclicien usuel.

Corollaire : $G(a_1, \ldots, a_p)$ est une matrice réelle symétrique positive.

Preuve : On utilise la décomposition précédente fournie par le lemme précédent.

Exemple : On reprend les données précédentes.
Vérifier en calculant ses valeurs propres que $G(a_1, a_2, a_3) \in S_n^{++}(\mathbb{R})$.

Théorème Fondamental : **Expression matricielle d'une norme euclidienne**
Soit $\langle ., . \rangle$ un produit scalaire de E de dimension finie.
Il existe une bon e de E et une matrice $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in E, \quad \langle x, x \rangle = X^T S X \quad \text{où} \quad X = \mathrm{Mat}_e(x)$$

Preuve : La matrice $S = G(e_1, \ldots, e_n)$ où $(e_1, \ldots, e_n)$ est une bon quelconque de E convient.

Théorème Fondamental : **Caractérisation de la liberté d'une famille**

$$(a_1, \ldots, a_p) \text{ est libre} \iff G(a_1, \ldots, a_p) \text{ est inversible}$$

Et dans ce cas, $G(a_1, \ldots, a_p)$ est symétrique réelle définie positive.

Preuve : on note $G(a_1, \ldots, a_p) = AA^T$ avec $A = \mathrm{Mat}_e(a_1, \ldots, a_p) \in \mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$.
Le résultat est alors immédiat en prenant le déterminant.

Théorème Fondamental : **Application au calcul de distance**

Soit $x \in E$ et $(a_1, \ldots, a_p)$ une base d'un sev F.
On a alors :

$$d(x, F) = \sqrt{\frac{\det G(a_1, \ldots, a_p, x)}{\det G(a_1, \ldots, a_p)}}$$

Preuve : On peut commencer par vérifier cette formule lorsque $(a_1,\ \dots,\ a_p)$ une bon de F.
Plus généralement :

- En écrivant $x = y + z$ avec $y \in F$ et $z \in F^\perp$, on a alors $d(x, F) = \|z\|$.
- On calcule alors $\det G(a_1,\ \dots,\ a_n,\ x)$ en modifiant la dernière colone en sachant que :

$$\begin{cases} \langle a_i, x\rangle = \langle a_i, y\rangle \\ \langle x, x\rangle = \langle y, y\rangle + \langle z, z\rangle \end{cases}$$

- On décompose alors le déterminant selon la dernière colonne :

$$\det G(a_1,\ \dots,\ a_p,\ x) = \det G(a_1,\ \dots,\ a_p,\ y) + \det G(a_1,\ \dots,\ a_p)\|z\|^2$$

  Or la famille $(a_1,\ \dots,\ a_p,\ y)$ est liée et donc $\det G(a_1,\ \dots,\ a_p,\ y) = 0$.

Cette question est extrêmement classique !! Vous pouvez oublier le résultat, mais pas la démonstration.