Les systèmes différentiels

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

20 mars 2025

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n.
I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION : On appelle EDL d'ordre 1 définie sur I et à valeurs dans E, toute équation d'inconnue x de la forme :

$$x' = a(t)(x) + b(t) \quad \text{où} \quad \begin{cases} t \mapsto a(t) \text{ est une application continue de } I \text{ dans } \mathcal{L}(E) \\ b : I \to E \text{ est continue} \\ x : I \to E \text{ est dérivable} \end{cases}$$

Remarque : Bien noter que $a(t)$ est un endomorphisme de E et que x est une fonction vectorielle à valeurs dans E.

Cas particulier

Lorsque $E = \mathbb{K}$, $a(t)$ est de la forme $a(t) : x \mapsto \alpha(t)x$.
On retrouve alors un type d'équation différentielle traitée en MPSI : $x' = \alpha(t)x + \beta(t)$.

En se plaçant dans une base e de E, on introduit les matrices associées à a, x et b et l'EDL1 s'exprime sous la forme :

$$(S) \ : \ X' = A(t)X + B(t) \quad \text{avec} \begin{cases} A \\ B \end{cases} \text{ continues sur } I$$

Cette EDL1 se présente alors sous la forme d'un *système différentiel* (SDL1).

C'est en général sous cette forme que l'on donne ou que l'on traite la résolution des EDL1.

Table des matières

1 Systèmes différentiels d'ordre 1 (Cas général) **2**

2 Système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants **6**

3 Equations scalaires d'ordre n **9**

4 Résolution numérique d'un système différentiel **11**

1 Systèmes différentiels d'ordre 1 (Cas général)

1. Définition :

Définition : **SDL1**
On appelle système différentiel linéaire d'ordre 1 d'inconnue $X \in \mathcal{C}^1(I, \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, l'équation :

$$(S) \ : \ X' = A(t)X + B(t) \quad \text{avec} \begin{cases} A \\ B \end{cases} \text{ continues sur } I$$

Définition : Résoudre (S) signifie :

« Déterminer toutes les fonctions $X \in \mathcal{D}^1(I,\ \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ vérifiant : $\quad \forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$ »

Exemples : $(S) : \begin{cases} x_1' = tx_1 + 2x_2 + e^t \\ x_2' = (1-t)x_1 + tx_2 \end{cases}$ s'écrit aussi $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} t & 2 \\ (1-t) & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$.

Proposition : Les solutions de $X' = A(t)X + B(t)$ sont des applications C^1 sur I.

Preuve : X' est somme et produit de fonctions continues.

2. Problème de Cauchy : on s'intéresse toujours à $X' = A(t)X + B(t)$ avec $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ continues sur I.

Définition : Soit $(t_0,\ X_0) \in I \times \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} \text{associé à } (E) : X' = A(t)X + B(t) \\ \text{de condition initiale } X(t_0) = X_0 \end{cases}$ consiste à déterminer :

"les" solutions X de (E) vérifiant $X(t_0) = X_0$

Remarque : en MPSI on a vu que pour les EDL1 scalaires, le pb de Cauchy admettait une unique solution.

Théorème Fondamental : **Théorème de Cauchy Linéaire**

Pour $(t_0,\ X_0) \in I \times \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Lorsque $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ sont $\mathcal{C}^0$ sur I, le pbl de Cauchy $\begin{cases} X' = A(t)X + B(t) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$ admet une unique solution.

En d'autres termes, il existe une unique solution qui prend une valeur X_0 donnée en un t_0 donné.

Preuve : Hors-programme.

Par isomorphisme canonique, nous avons aussi l'unicité de la solution du problème de Cauchy : $\begin{cases} x' = a(t)(x) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$

Exercice : 1
(♡) Soit $X' = A(t)X$ où la fonction $t \mapsto A(t)$ est continue et impaire sur $\mathbb{R}$.
Montrer que ce système différentielle admet une unique solution impaire.

Applications usuelles de Cauchy-Linéaire

Le théorème de Cauchy-Linéaire permet de justifier l'unicité d'une sol° vérifiant $X(t_0) = X_0$.
Il est en particulier souvent utilisé pour montrer :

- que deux solutions $\tilde{X}$ et $\tilde{Y}$ sont égales,
- qu'une solution $\tilde{X}$ est nulle,
- que le système admet une solution paire, impaire ou périodique,
- déterminer la dimension de S_H.

♡ Toute la suite de ce cours repose sur le théorème de Cauchy-Linéaire !

---

3. L'ensemble des solutions de (S) ?

On s'intéresse toujours à $(E) : X' = A(t)X + B(t)$ avec $\begin{cases} A \\ B \end{cases}$ deux fonctions continues sur I.

(a) Résolution de l'équation complète

THÉORÈME : L'ensemble des sol° de (E) est un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I,\ \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ de direction S_H :

$$X \in (E) \iff X = \tilde{X} + X_H \quad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{X} \text{ est une solution particulière de } (E) \\ X_H \text{ est la solution générale de } (H) \end{cases}$$

Preuve : Facile par équivalences successives.
Vous devez absolument savoir rédiger cette démonstration.

Méthode théorique de résolution de (E)

On commence par reconnaître un SDL1, puis :

- On recherche l'ensemble des solutions homogène S_H.
- On recherche une solution particulière : $\tilde{X}$
- On conclut que les solutions sont les fonctions $X = \tilde{X} + X_H$ où $X_H \in S_H$.

Questions en attente de réponse :

- Quelle est la structure de S_H et donc de S ?
- Comment déterminer S_H ?
- Comment déterminer une solution particulière $\tilde{X}$?

(b) Equation homogène : $(H) : X' = A(t)X$

DÉFINITION : Les solutions de (H) sont appelées les solutions homogènes et leur ensemble est noté S_H.

LEMME : S_H est un sev de $\mathcal{C}^1(I,\ \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$

Preuve : S_H est le noyau d'une AL bien choisie.

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Dimension du sev** S_H

- S_H est un sev de $\mathcal{C}^1(I,\ \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ de dimension n.
- $S = \tilde{X} + S_H$ est donc un sous-espace affine de $\mathcal{C}^1(I,\ \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$ de dimension n.

Preuve : Soit $t_0 \in I$.

L'application $f : \begin{array}{ccc} S_H & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & X(t_0) \end{array}$ est un isomorphisme d'après le théorème de Cauchy-Linéaire.

♡ *Retenir qu'on détermine la dimension de S_H grace au théorème de Cauchy-Linéaire.*

Détermination théorique de S_H

Il suffit donc de déterminer n solutions indépendantes pour obtenir TOUTES les solutions de S_H.

En général, ceci est plus facile à dire qu'à faire...

Exemple : L'ensemble des solutions de $\begin{cases} x' = a(t)x + b(t)y \\ y' = c(t)x + d(t)y \end{cases}$ est un plan vectoriel.

Pour résoudre ce système, une méthode consiste donc à rechercher 2 solutions indépendantes.

DÉFINITION : **Système fondamental de solutions de (H)**

Une base de S_H est appelée un *Système Fondamental de Solutions* (SFS) de :

$$(H) : X' = A(t)X$$

Un tel système est constitué de $n = \dim \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ fonctions solutions indépendantes de S_H.

PROPOSITION : **Solutions de (H)**

Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ est un système fondamental de solutions de (H).
La solution générale de (H) est alors :

$$X_H(t) = \lambda_1 X_1(t) + \cdots + \lambda_n X_n(t) \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$$

D/ Car $\dim S_H = n$.

Question : Comment déterminer un système fondamental de solutions de (H) ?

Il n'y a malheureusement pas de méthode systématique.
On y parvient lorsque $A(t)$ est diagonalisable ou trigonalisable dans une base INDEPENDANTE de t.

Une solution de $X' = A(t)X$ dans un cas particulier

Lorsque $A(t)$ admet un vecteur propre constant V.

On peut rechercher une solution sous la forme $X(t) = \alpha(t)V$ avec α une fonction dérivable sur I.

Preuve :

Exemple : Appliquer cette méthode pour trouver une solution du système $\begin{cases} x_1' = (2-t)x_1 + (t-1)x_2 \\ x_2' = 2(1-t)x_1 + (2t-1)x_2 \end{cases}$.

Méthode GENERALE de Résolution de $X' = A(t)X + B(t)$

- Méthode 1 : Si $A(t)$ est diagonalisable/trigonalisable avec P indépendante de t.

  On se ramene à un nouveau système différentiel beaucoup plus simple à résoudre en posant :

  $$Y = P^{-1}X$$

  Cette méthode pourra en particulier être utilisée lorsque $A(t)$ est constante : $X' = AX + B(t)$

- Méthode 2 : Sinon, on se réfère à l'énoncé ou à son intuition pour trouver une SFS de (H)

  → L'énoncé peut nous proposer une démarche permettant de trouver une ou plusieurs solutions
  → On peut proposer une solution par intuition
  → On peut rechercher des solutions sous des formes qui nous semblent probables

  Une fois un SFS obtenu, il nous reste encore à déterminer une solution particulière $\tilde{X}$.
  Voir plus loin...

Preuve : Méthode 1

Exercice : 2

(∗) Résoudre les systèmes différentiels suivants :

- $\begin{cases} x_1' = (t+3)x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -4x_1 + (t-3)x_2 \end{cases}$ (diagonalisation)
- $\begin{cases} x_1' = (1+t)x_1 + tx_2 \\ x_2' = -tx_1 + (1-t)x_2 \end{cases}$ (trigonalisation)

Méthode de résolution de $(E) : X' = AX + B(t)$ **(Cas où** $A(t)$ **est constante)**

- Méthode 1 : On peut tenter de diagonaliser ou trigonaliser A (P sera bien indépendante de t)
- Méthode 2 : Nous verrons plus loin une formule générale qui donne les solutions de (H).

Exercice : 3

(∗) Résoudre le système $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 + e^t \\ x_2' = x_1 + e^t \end{cases}$.

(c) Recherche d'une solution particulière :

Nous avons uniquement le théorème suivant à notre disposition :

PROPOSITION : **Principe de superposition des solutions**

Lorsque $B(t) = B_1(t) + B_2(t)$, on obtient une solution particulière de (E) en ajoutant :

$$\begin{cases} \text{une solution particulière de } X' = A(t)X + B_1(t) \\ \text{une solution particulière de } X' = A(t)X + B_2(t) \end{cases}$$

Preuve : Facile.

Remarque : Il existe cependant une méthode de *variation des constantes* vue dans l'exercice suivant et qui n'est plus au programme.

Exercice : 4

Méthode de variation des constantes

On dispose ici d'un SFS $(X_1, \ldots, X_n)$ de $X' = A(t)X$.
Montrer qu'il existe une solution particulière de $X' = A(t)X + B(t)$ sous la forme :

$$\tilde{X} = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n \quad \text{avec les} \quad \lambda_k : I \to \mathbb{K} \text{ dérivables}$$

♡ AVEC ♡ : $\tilde{X}$ solution de $X' = A(t)X + B(t) \iff \lambda_1' X_1 + \cdots + \lambda_n' X_n = B$

Preuve :

- $\tilde{X}$ solution $\iff \cdots \iff \lambda_1' X_1 + \cdots + \lambda_n' X_n = B$.
- Cela nous donne un système linéaire de la forme :

$$U(t)\Lambda'(t) = B(t) \quad \text{avec} \quad U(t) = (X_1(t) \ \ldots \ X_n(t))$$

- Or pour tout $t \in I$, l'application $E_t : \begin{array}{ccc} S_H & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & X(t) \end{array}$ est un isomorphisme.
  Comme un isomorphisme transforme une base en une base et donc $U(t)$ est inversible.
- Le système donne alors $\Lambda'(t) = U(t)^{-1}B(t)$.
  Comme la fonction $t \mapsto U(t)^{-1}B(t)$ est continue, on peut donc trouver les λ_k en primitivant.

2 Système différentiel d'ordre 1 à coefficients constants

Dans cette partie, la matrice $A(t)$ ne dépend plus de t.

DÉFINITION : On appelle *Equation linéaire d'ordre 1 à coefficient constant* définie sur I à valeurs dans E toute équation de la forme :

$$x' = a(x) + b \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a \in \mathcal{L}(E) \\ b : I \to \text{continue} \end{cases}$$

L'application linéaire a ne dépend plus de la variable t.

En se plaçant dans une base, on est ramené à un système différentiel à coefficients constants.

$$X' = AX + B(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ B \in \mathcal{C}^0(I,\ \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})) \end{cases}$$

1. Résolution théorique de l'équation homogène :

Rappels : Exponentielle d'une matrice en dimension finie

- Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons : $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ avec $\exp(0_n) = I_n$.
- $t \mapsto \exp(t.A)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et : $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\exp(tA)) = A.\exp(tA)$.

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Résolution de $X' = AX$**

Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
L'ensemble des solutions homogènes est :

$$S_H = \{t \mapsto \exp(t.A)X_0 \mid X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$$

Ainsi, les solutions de $x' = a(x)$ sont : $x(t) = \exp(ta)(x_0)$ avec $x_0 \in E$.

Preuve : *Vous devez être capable de refaire cette démonstration !*

- $U_0 : t \mapsto \exp(t.A)X_0$ est bien dérivable et on obtient facilement $X' = AX$.
- On obtient facilement la deuxième inclusion grace au théorème de Cauchy-Linéaire.

COROLLAIRE : **Solution du problème de Cauchy**

Pour $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
L'unique solution au problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = X_0 \end{cases}$ est la fonction $X : t \mapsto \exp(tA)X_0$.

Preuve : On a bien $X(0) = X_0$.

Question : Quelle est la solution au problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$?

Méthodes générales de résolution de $X' = AX + B(t)$

- Méthode 1 : On diagonalise/trigonalise A et on se ramène à un SDL1 simple à résoudre.
- Méthode 2 :
  → On applique la formule $X_H(t) = \exp(tA)X_0$ avec $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
  → On recherche une solution particulière par la méthode de variation de la constante X_0. (HP ?)

2. Cas où A est diagonalisable :

Idée : On obtient les solutions de (H) en décomposant X_0 dans une base de vecteurs propres.

LEMME : Si V est vecteur propre de A associé à la valeur propre λ, on a :

$$\exp(tA)V = e^{\lambda t}V$$

Exemple

Si $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre $\lambda = -5$ alors

$$t \mapsto e^{-5t}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \text{est une solution particulière de} \quad X' = AX$$

♡ *En prenant des vecteurs propres de A indépendants on obtient des solutions indépendantes de S_H.*

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Forme générale des solutions de S_H**

Lorsque A est diagonalisable la solution générale de S_H est :

$$X_H(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}V_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t}V_n \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n \text{ quelconques dans } \mathbb{K} \\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n \text{ les valeurs propres de } A \\ V_1,\ \ldots,\ V_n \text{ une base de vecteurs propres} \end{cases}$$

Ou algébriquement :

En notant $(v_1,\ \ldots,\ v_n)$ une base de vecteurs propres associés à $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$, on obtient :

$$x_H(t) = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}v_1 + \cdots + \alpha_n e^{\lambda_n t}v_n \quad \text{avec} \quad \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n \in \mathbb{K}$$

Preuve : Immédiat.

Méthode alternative de résolution de $X' = AX$ (Cas où A est diagonalisable)

La résolution de $X' = AX$ se limite à la diagonalisat° de la matrice A.
Après avoir obtenu une base $(V_1,\ \ldots,\ V_n)$ de vecteurs propres, on en déduit directement S_H.

Exemple : Résoudre $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 4x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$

3. Cas où A n'est pas diagonalisable :

- Méthode 1 : On peut envisager de trigonaliser A.
- Méthode 2 : On peut envisager de calculer $\exp(tA)$.

Exemple ♡ : Résoudre $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' = -2x_1 - x_2 \end{cases}$ en appliquant chacune des deux méthodes précédentes.

Résolution de $X' = AX$ lorsque A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (HP)

→ On recherche les sous-espaces propres E_{λ_k} mais pas les $E_{\bar{\lambda}_k}$

→ On obtient alors un système fondamental de solutions en considérant $\mathrm{Re}(e^{\lambda_k t}X_k)$ et $\mathrm{Im}(e^{\lambda_k t}X_k)$

Comme la démonstration de ce résultat est hors-programme, il faudra vérifier en pratique que les fonctions obtenues forment bien un SFS.

Exemple : Résoudre $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 5x_2 \\ x_2' = 2x_1 - 3x_2 \end{cases}$

Dans le cas des systèmes différentiels de taille 2, on peut aussi se ramener par analyse/synthèse à des EDL2 à coef constants (cf MPSI)

Voir l'exercice 74 de la banque CCINP.

3 Equations scalaires d'ordre n

1. Transformation en un SDL1 :

DÉFINITION : On appelle *Equation différentielle scalaire d'ordre n* une ED de la forme :

$$(E) : x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)x + b(t) \quad \text{avec} \begin{cases} a_0, \ldots, a_{n-1} : I \to \mathbb{K} \\ b : I \to \mathbb{K} \end{cases} \text{ continues}$$

PROPOSITION : Les solutions d'une telle équation sont C^n sur I.

D/ Evident !

Exercice : 5

(♡) Montrer que les solutions de (E) sont $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K})$ lorsque les fonctions $a_0, \ldots, a_{n-1}, b$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

LEMME : **Transformation en système différentiel**

Soit $x : I \to \mathbb{K}$ n fois dérivable.

x est solution de (E) $\iff$ x est la composante x_1 d'un tuple $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ solution du système :

$$\Sigma \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = a_0(t)x_1 + \cdots + a_{n-1}(t)x_n + b(t) \end{cases}$$

Preuve :

$\Rightarrow$ Supposons que x soit solution de l'EDLn.

En posant $\begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ \vdots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{cases}$, on a alors : $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = a_0(t)x_1 + \cdots + a_{n-1}(t)x_n + b(t) \end{cases}$.

x est donc la composante x_1 d'un tuple $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ solution du système Σ.

$\Leftarrow$ Supposons que x_1 soit solution du système.
En substituant dans la dernière équation, on constate que x_1 est bien solution de (E).

Bien maitriser cette technique de transformation afin de pouvoir appliquer la fonction `odeint()` *de Python, ou plus simplement pour pouvoir résoudre une EDL d'ordre n à l'aide des méthodes développées dans les parties précédentes.*

---

2. Problème de Cauchy :

On étudie $(E) : x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_o(t)x + b(t)$ et on note $\sum$ le système ci-dessus

DÉFINITION : Soit $(t_0,\ x_0,\ \ldots,\ x_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$.

Un problème de Cauchy associé à (E) en t_0 consiste à déterminer les sol° de (E) vérifant les CI :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad x^{(k)}(t_0) = x_k$$

Remarque : Ce problème se traduit en un problème de Cauchy associé au système $\sum$.

THÉORÈME : Il y a unicité de la solution au problème de Cauchy.

Preuve : Car le problème de Cauchy pour le système différentiel admet une unique solution.

3. Structure de l'ensemble des solutions :

(a) Equation homogène :

DÉFINITION : L'équation homogène associée à $x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_o(t)x + b(t)$ est :

$$(H) : x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_o(t)x$$

THÉORÈME : L'ensemble des solutions du système homogène est un sev de $\mathcal{C}^n(I,\ \mathbb{K})$ de dimension n.

Preuve :
- SEV : On montre facilement que S_H est le noyau d'une application linéaire.
- Dimension : On considère $E_0 : S_H \to E$ définie par $x(t_0) = (x(t_0),\ \ldots,\ x^{(n-1)}(t_0))$.
  C'est un isomorphisme d'après le théorème de Cauchy !

Ce résultat est essentiel car il permet de déterminer S_H dès lors qu'on connaît n solutions indépendantes.

(b) Equation complète :

THÉORÈME : L'ensemble S des solutions de (E) est un sous espace affine de $C^n(I,\ \mathbb{K})$ de direction S_H :

$$y = \tilde{y} + y_H \quad \text{où} \quad \begin{cases} \tilde{y} \text{ est une solution particulière} \\ y_H \text{ est la solution générale de } S_H \end{cases}$$

D/ Usuel.

Méthode générale de résolution d'un EDL d'ordre n

Pour résoudre $(E) : x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_o(t)x + b(t)$:
- On résout l'équation homogène (en recherchant n solutions indépendantes)
- On recherche une solution particulière.
- On conclut.

4 Résolution numérique d'un système différentiel

Pour faciliter l'exposé, on se limite ici à la résolution d'un système différentielle à deux équations.

BUT : Résoudre numériquement $\begin{cases} x' = f(x,y,t) \\ y' = g(x,y,t) \end{cases}$ pour $t \in [t_0,\ t_N]$ avec pour CI : $\begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$.

Remarques :
- *Cette forme inclut le cas des SDL1 de taille* 2×2.
- *Les méthodes suivantes se généralisent facilement à des systèmes* $n \times n$

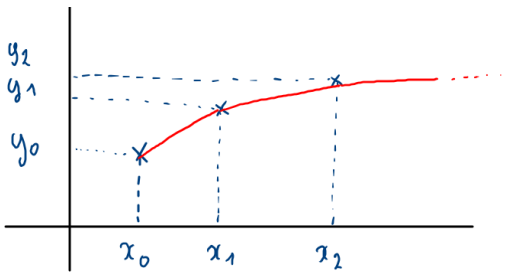
Le principe consiste :

- à discrétiser l'intervalle de temps $[t_0,\ t_N]$: $t_n = t_0 + np$ avec $p = \dfrac{t_N - t_0}{N}$ et $n \in [\![0, N]\!]$
- à construire des suites $\begin{cases} (x_n) \\ (y_n) \end{cases}$ de de sorte que :

  → en les reliant, les points $M_n(x_n, y_n)$ on obtient une approximation de la trajectoire du point $M(t)\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

  → en les reliant, les points $M_n(t_n, x_n)$ on obtient une approximation de la courbe de la solution x

  → en les reliant, les points $M_n(t_n, y_n)$ on obtient une approximation de la courbe de la solution y



Méthode 1 : Avec l'algorithme d'Euler (Plutôt facile !)

Le système différentiel est ici définit par les deux fonctions f_1 et f_2.

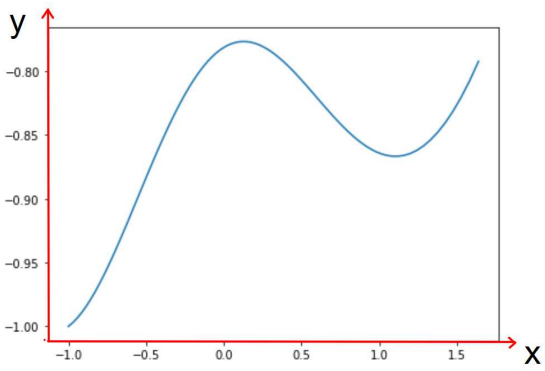
Pour construire la courbe intégrale passant par $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ en t_0, les suites $\begin{cases} (x_n) \\ (y_n) \end{cases}$ sont définies par :

$$\begin{cases} x_0 \\ y_0 \end{cases} \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N}^* \quad \begin{cases} x_{n+1} = x_n + pf_1(x_n, y_n, t_n) \\ y_{n+1} = y_n + pf_2(x_n, y_n, t_n) \end{cases}$$

Python
```
from matplotlib.pylab import plot

def Euler(x0,y0,t0,tN,N,f1,f2):
    p = (tN-t0)/N
    x = [x0]
    y = [y0]
    t = [t0]
    for k in range(1,N+1):
        t.append(t[k-1]+p)
        x.append (x[k-1]+p*f1(x[k-1],y[k-1],t[k-1]))
        y.append (y[k-1]+p*f2(x[k-1],y[k-1],t[k-1]))
    plot(x,y)                                    # ou plot(t,x) et plot(t,y)
```

Exemple : Résolution de $\begin{cases} x' = 2tx + t^2y + \cos(t) \\ y' = t^2x + 2ty + \sin(t) \end{cases}$ sur $[-1, 1]$ avec les conditions initiales $\begin{cases} x(-1) = -1 \\ y(-1) = -1 \end{cases}$.

Python
```
from matplotlib.pylab import cos, sin

f1 = lambda x,y,t : 2*t*x+t**2*y+cos(t)
f2 = lambda x,y,t : 2*t*y+t**2*x+sin(t)

Euler(-1,-1,-1,1,100,f1,f2)
```



Méthode 2 : Avec la fonction odeint(F,[x0,y0],[t0,t1,t2,...,tN]) (Pour les spécialistes !)

On utilise ici la fonction `odeint` de la bibliothèque `scipy.integrate`.

- `F` définit le système différentiel.
  Dans notre exemple, il s'agit de la fonction F :

$$F([x, y], t) = (f_1(x, y, t),\ f_2(x, y, t))$$

⚠ Syntaxe Python : [x,y] est noté X et donc x = X[0] et y = X[1]

- `[x0,y0]` définit les CI, c'est à dire les valeurs de x et y en t_0.
- `[t0,t1,t2,...,tN]` définit l'intervalle de temps discrétisé.
  Il s'agit d'une liste donnant les valeurs discrétisées de l'intervalle de variation de la variable t.
  Pour définir cette liste, on utilise la commande `[t0 + k*p for k in range(N+1)]`.

La fonction `odeint` renvoie le tableau de points :

```
sol = array([[x0,y0], [x1,y1], ..., [xN,yN]])
```

On peut donc tracer la courbe intégrale en extrayant les listes $\begin{cases} \texttt{x = sol[:,0]} \\ \texttt{y = sol[:,1]} \end{cases}$ et en appliquant `plot(x,y)`.

Python

```
from scipy.integrate import odeint
from matplotlib.pylab import plot, cos, sin

x0 = -1                    # Conditions initiales
y0 = -1

t0 = -1                    # Intervalle de temps
tN = 1

N = 100                    # Division de l'intervalle de temps
p = (tN - t0)/N            # Calcul du pas

F = lambda X,t:(2*t*X[0]+t**2*X[1]+cos(t),
                t**2*X[0]+2*t*X[1]+sin(t))      # Ne pas remplacer X par [x,y]

temps = [t0 + k*p for k in range(N+1)]

sol = odeint(F,[x0,y0],temps)
plot(sol[:,0],sol[:,1])                         # Bien noter la syntaxe !
```

Exercice : 6

$(*)$ Solution numérique sur $[0,3]$ de $y'' = 3ty' - \sin(t)y + \cos(t)$ avec les conditions initiales $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$.