
L'essentiel : Equations différentielles scalaires

Ici, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Dans cette synthèse, nous présentons les méthodes de résolutions des équations différentielles de la forme :

$$(E) : x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_1(t)x' + a_0(t) = b(t) \quad \text{avec} \quad \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \begin{cases} a_k \\ b \end{cases} \text{ continues sur } I \subset \mathbb{R}$$

Le coefficient de $x^{(n)}$ valant 1, on dit qu'une telle équation est *normalisée*.

Plan :

I] Résultats généraux

II] Cas des équations de la forme : $x' + a(t)x = b(t)$

III] Cas général des équations de la forme : $x'' + a(t)x' + b(t)x = c(t)$

IV] Cas particulier des équations de la forme : $x'' + ax' + bx = c(t)$

V] Autres méthodes possibles

(a) Changement de variable ou de fonction

(b) Cas des équations d'Euler

(c) Cas des équations à variables séparables

VI] Equations différentielles linéaires scalaires d'ordre $n \geq 3$

VII] Raccordements de solutions

I] Résultats généraux

$$(E) : x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \cdots + a_0(t)x = b(t)$$

DÉFINITION : Les solutions de (E) sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les applications :

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{telles que} \quad \begin{cases} \varphi \text{ est } n \text{ fois dérivable sur } I \\ \forall t \in I, \varphi^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)\varphi(t) = b(t) \end{cases}$$

Ne négligez pas l'importance de cette définition !

PROPOSITION : **Problème de Cauchy**

$$(E) \text{ admet une unique solution vérifiant des CI de la forme } \begin{cases} x(t_0) = x_0 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$



Preuve

On se ramène à un système différentiel pour appliquer une version connue du théorème de Cauchy.

Exemples :

- Une solution y de $y' + a(t)y = 0$ qui s'annule est nécessairement nulle. Les autres sont de signe constant.
- Une solution y de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ vérifiant $y(t_0) = y'(t_0) = 0$ est nécessairement nulle

PROPOSITION : Structure de l'ensemble des solution

- $\underline{S}_H$: L'ensemble S_H des sol^o de $(H) : x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x = 0$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n
- $\underline{S}$: Les solutions de (E) sont les f^o de la forme $x = \tilde{x} + x_H$ où $\begin{cases} x_H \text{ est une solution de } (H) \\ \tilde{x} \text{ est une solution particulière de } (E) \end{cases}$.
 $S = \tilde{x} + S_H$



Preuve

- En considérant les deux applications linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} f : \mathcal{C}^2(I, \mathbb{K}) &\longrightarrow \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) \\ x &\mapsto x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x \end{aligned}$$

et pour $t_0 \in I$:

$$\begin{aligned} \varphi_{t_0} : S_H &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x &\mapsto ((x(t_0), x'(t_0), \dots, x^{(n-1)}(t_0))) \end{aligned}$$

- Soit x une fonction dérivable sur I . On a alors :

$$\begin{aligned} x \text{ solution de } (E) &\iff \forall t \in I, x^{(n)}(t) + \dots + a(t)x(t) = b(t) \\ &\iff \forall t \in I, x^{(n)}(t) + \dots + a(t)x(t) = \tilde{x}^{(n)}(t) + a(t)\tilde{x}(t) \\ &\iff \forall t \in I, (x - \tilde{x})^{(n)}(t) + \dots + a(t)(x - \tilde{x}) = 0 \\ &\iff x - \tilde{x} \in S_H \\ &\iff x \in \tilde{x} + S_H \end{aligned}$$

PROPOSITION : Régularité des solutions

Les solutions de (E) sont de classe $\mathcal{C}^n$ sur I .



Preuve

Facile.

I] Equations Différentielles scalaires linéaires d'ordre 1

$$(E) : x' + a(t)x = b(t)$$

Objectif : Résoudre les équations différentielles de la forme $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ avec $\begin{cases} a \\ b \end{cases}$ continues sur $I \subset \mathbb{R}$.

DÉFINITION : Les solutions de (E) sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les applications :

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{telles que} \quad \begin{cases} \varphi \text{ est dérivable sur } I \\ \varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = b(t), \quad \forall t \in I \end{cases}$$



Exemple

Vérifier que φ définie par $\varphi(t) = e^{t^2} - 1$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $(E) : y' - 2ty = 2t$

Preuve :

- Cette application est bien dérivable sur $\mathbb{R}$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi'(t) - 2t\varphi(t) = 2te^{t^2} - 2t(e^{t^2} - 1) = 2t$.

PROPOSITION : Régularité des solutions

- Les solutions de (E) sont $\mathcal{C}^1$ sur I .
- Si a et b sont $\mathcal{C}^n$ sur I , alors les solutions sont $\mathcal{C}^{n+1}$ sur I .
- Si a et b sont $\mathcal{C}^\infty$ sur I , alors les solutions sont $\mathcal{C}^\infty$ sur I .



Preuve

Par récurrence...

Ce résultat est souvent demandé en exercice.

Méthode générale de résolution

- Etape 1 : On résout l'équation $(H) : y' + a(t)y = 0$ et on note y_H la forme générale des solutions.

L'ensemble S_H des solutions de (H) est une droite vectorielle de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

- Etape 2 : On recherche une solution particulière $\tilde{y}$.
- Conclusion : Les solutions de (E) sont alors les fonctions : $y = \tilde{y} + y_H$.

L'ensemble S des solutions de (E) est une droite affine passant par $\tilde{y}$ de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.



Preuve

Voir le raisonnement effectué dans le cas général.
 Vous devez être capables de justifier cette démarche.

Résolution de $(H) : y' + a(t)y = 0$

- On recherche A une primitive de a sur I
- Les solutions de (H) sont alors : $y_H = \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

L'abus de notation précédent est largement utilisé.



Preuve

y est une solution de $(H) \iff e^{A(t)}(y' + a(t)y) = 0 \iff (ye^{A(t)})' = 0 \iff y = \lambda e^{-A(t)}$



Exemple : Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$ l'équation $(H) y' + \frac{1}{t}y = 0$.

Réponse : $A : t \mapsto \ln t$ est une primitive de $a : t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et donc :

$$y_H = \lambda e^{-\ln t} = \frac{\lambda}{t} \quad \text{avec} \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

Recherche d'une solution particulière $\tilde{y}$

- Soit par intuition en recherchant $\tilde{y}$ sous une forme particulière.

- Soit avec la méthode de *variation de la constante* :

→ On cherche $\tilde{y}$ sous la forme $\tilde{y}(t) = C(t)e^{-A(t)}$

→ On a alors :

$$\tilde{y} \text{ est solution de } (E) \iff \forall t \in I, C'(t)e^{-A(t)} = b(t)$$

Ce qui permet de trouver une fonction C , et donc une fonction $\tilde{y}$, qui convient.

- Lorsque $b(t) = b_1(t) + b_2(t)$, on peut appliquer le principe de superposition des solutions.



Exemple : Solution particulière de $(E) : y' + \frac{1}{t}y = \cos t$ sur $\mathbb{R}^{+*}$

Réponse :

- Les solutions de l'équation homogène sont $y_H = \frac{\lambda}{t}$
- On recherche donc une solution particulière sous la forme $\tilde{y}(t) = \frac{\lambda(t)}{t}$.
- $\tilde{y}$ est solution $\iff \forall t > 0, \frac{\lambda'(t)}{t} = \cos t \iff \forall t > 0, \lambda'(t) = t \cos t$.

Une intégration par partie nous donne :

$$\tilde{y} \text{ solution} \iff \lambda(t) = \int^t x \cos x \, dx = t \sin t - \int^t \sin t \, dt = t \sin t + \cos t + C \quad (\text{on prend } C = 0)$$

Ainsi $\tilde{y} = \frac{1}{t}(t \sin t + \cos t)$ est une solution particulière de (E) .

Ce raisonnement prouve que (E) admet bien des solutions.

Problème de Cauchy pour $(E) : y' + a(t)y = b(t)$

- (E) admet une unique solution y vérifiant $y(t_0) = y_0$ (CI) lorsque $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$
- Graphiquement : Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela signifie qu'en un point du plan, il ne passe qu'une seule solution.
- Applications : ♡ On utilise souvent ce théorème pour prouver l'égalité de deux applications en montrant qu'elles sont l'une et l'autre solutions d'une même équation différentielle avec les mêmes CI.

Par exemple, pour trouver une CNS pour qu'une solution φ soit :

- | | |
|--------------|--|
| → nulle | → paire ou impaire |
| → périodique | → symétrique par rapport à $D : x = a$ |

Exercice : 1

(*) Déterminer la solution réelle sur $]1, +\infty[$ de $(E) : y' - \frac{x}{x^2 - 1}y = 2x$ vérifiant la condition initiale $y(0) = 1$.

Preuve :

Exercice : 2

(♡) Soit $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ avec a et b continues sur $\mathbb{R}$ et a impaire. Déterminer une CNS pour que (E) admette une solution paire.

Preuve :

Exercice : 3

(♡) Soit $(E) : y' + 2y = \varphi(t)$ avec $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et périodique de période $T > 0$.

1. Montrer qu'une solution y de (E) est T -périodique si et seulement si $y(0) = y(T)$.
2. En déduire que (E) admet une unique solution T -périodique.

Preuve :

II] Equations Différentielles scalaires linéaires d'ordre 2

$$(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$$

Objectif : Savoir résoudre les équations de la forme $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ avec $\begin{cases} a \\ b \\ c \end{cases}$ continues sur $I \subset \mathbb{R}$.

1) Résultats généraux

DÉFINITION : Les solutions de (E) sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ sont les applications :

$$\varphi : I \rightarrow \mathbb{K} \quad \text{telles que} \quad \begin{cases} \varphi \text{ est 2 fois dérivable sur } I \\ \forall t \in I, \varphi''(t) + a(t)\varphi'(t) + b(t)\varphi(t) = c(t) \end{cases}$$

PROPOSITION : Régularité des solutions

- Les solutions de (E) sont $\mathcal{C}^2$ sur I .
- Si a, b et c sont $\mathcal{C}^n$ sur I , alors les solutions de (E) sont $\mathcal{C}^{n+2}$ sur I .
- Si a, b et c sont $\mathcal{C}^\infty$ sur I , alors les solutions de (E) sont $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

 **Preuve**

Par récurrence...

Ce résultat est souvent demandé en exercice.

Problème de Cauchy pour $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$:

- (E) admet une unique solution y vérifiant $\begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y'_0 \end{cases}$ (CI) où $t_0 \in I$ et $y_0, y'_0 \in \mathbb{K}$.

 Des CI de la forme $\begin{cases} y(t_0) = a \\ y(t_1) = b \end{cases}$ ne permettent pas d'appliquer le résultat précédent.

- Graphiquement : Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ cela signifie qu'en un point $M_0(t_0, y_0)$, il ne passe qu'une seule solution de (E) de tangente fixée passant par M_0 . Il n'y a donc pas unicité de la solution passant par M_0 .
- Applications : ♥ On utilise souvent ce théorème pour prouver l'égalité de deux applications en montrant qu'elles sont l'une et l'autre solutions d'une même équation différentielle avec les mêmes CI.

Par exemple, pour trouver une CNS pour qu'une solution φ soit :

→ nulle

→ paire ou impaire

→ périodique

→ symétrique par rapport à $D : x = a$

Exemple : Soit f une solution de $(E) : y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ avec p et q continues sur I .
Montrer que s'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0) = f'(t_0) = 0$ alors $f = 0$.

Preuve :

Exercice : 4

(♥) Montrer que u la solution de $(E) : y'' + \cos^2(x)y = 0$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} u(0) = 1 \\ u'(0) = 0 \end{cases}$ est une fonction paire.

Preuve :

Exercice : 5

(♥) Montrer que les zéros d'une solution d'une EDSL2 sont des points isolés.

Preuve :

Méthode générale de résolution

- Etape 1 : On résout $(H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ en recherchant 2 solutions indépendantes φ_1 et φ_2 .

On a alors :

$$S_h = \text{Vect}(\varphi_1, \varphi_2)$$

Le couple (φ_1, φ_2) est appelé un Système Fondamental de Solutions (SFS).

On note habituellement y_H les solutions de (H) .

- Etape 2 : On recherche une solution particulière $\tilde{y}$.
- Conclusion : Les solutions de (E) sont alors les fonctions : $y = \tilde{y} + y_H$.

$$S = \tilde{y} + S_H$$

S est un plan affine passant par $\tilde{y}$.

2) Résolution de (H)

Rappel : Comme S_H est un plan vectoriel, il suffit de déterminer deux solutions indépendantes.



Prouver que S_H est un plan vectoriel

a) Recherche d'une première solution

⚠ Contrainement à la résolution des EDLH1, il n'existe pas de formule générale donnant S_H .

On peut trouver une solution particulière :

- soit par intuition
- soit sous une forme particulière (Polynomiale, ...)
- soit sous la forme d'un développement en série entière (Forme la plus générale que l'on peut proposer)

Si on a de la chance, on trouve directement 2 solutions indépendantes (voir les exemples suivants!).



Exemple 1 : Recherche d'une solution polynomiale

Trouver une solution polynômiale de $(E) : (t^2 + 2t + 2)y'' - 2(t + 1)y' + 2y = 0$ sur $\mathbb{R}$ puis finir la résolution.

Réponse :

- Une analyse du degré montre que $n = 1$ ou $n = 2$.
En effet, en posant $a_n x^n$ le terme dominant de cette solution, on obtient par unicité de l'écriture d'un polynôme :
$$n(n-1)a_n - 2na_n + 2a_n = 0 \quad \text{et donc } (a_n \neq 0) \quad n^2 - 3n + 2 = 0$$
- On trouve alors deux solutions indépendantes $\begin{cases} \varphi(t) = t^2 - 2 \\ \psi(t) = t + 1 \end{cases}$ qui forment (chance!) un SFS



Exemple 2 : Recherche d'une solution DSE

Trouver une solution DSE de $(E) : (1 - t^2)y'' - 4ty' - 2y = 0$ sur $] -1, 1[$ puis finir la résolution.

Réponse : On recherche une sol° y sous la forme $y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

- Sur $] -R, R[$, on a alors $\begin{cases} y'(t) = \dots \\ y''(t) = \dots \end{cases}$.
- Ainsi : y est solution de $(E) \iff \forall t \in] -R, R[, (1 - t^2)y'' - 4ty' - 2y = 0 \iff \dots$
- Finalement : y est solution de $(E) \iff a_{n+2} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ce qui nous donne :
$$y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{+\infty} t^{2n+1} = a_0 \frac{1}{1-t^2} + a_1 \frac{t}{1-t^2}.$$

Pour valider ces solutions, on doit vérifier que $R > 0$.

- Conclusion : On obtient ainsi un système fondamental de solutions (chance!).

La solution générale est alors :
$$y(t) = \frac{\lambda + \mu t}{1 - t^2} \quad \text{sur }] -1, 1[$$

b) Recherche d'une deuxième solution

Si la recherche d'une première solution ne permet pas d'en trouver une deuxième indépendante (cas le plus fréquent), alors on recherche une deuxième solution en appliquant l'une des 2 méthodes présentées dans cette partie :

- La méthode utilisant le wronskien
- La méthode de Lagrange.

On suppose connaître une solution non nulle φ de (H) .

On souhaite alors déterminer une seconde solution ψ indépendante de φ .



Préliminaire : Le Wronskien

- Définition : Soit φ et ψ deux solutions de $(H) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.

La fonction w définie par $w(t) = \begin{vmatrix} \varphi(t) & \psi(t) \\ \varphi'(t) & \psi'(t) \end{vmatrix}$ est appelée le *wronskien* de φ et ψ .

- Propriétés :

→ Le wronskien est solution de l'équation différentielle : $y' + a(t)y = 0$.

→ « Le wronskien s'annule » si et seulement si « il est nul » si et seulement si « (φ, ψ) est liée ».

→ « Le wronskien est non nul » si et seulement si « (φ, ψ) est un SFS de (H) ».

- Applications :

→ Le wronskien permet de détecter les systèmes fondamentaux de solutions.

→ Le wronskien permet de déterminer une deuxième solution ψ indépendante de la première φ .



Preuve de $w'(t) + a(t)w(t) = 0$



Preuve de la Nullité et non nullité du wronskien

Exercice : 6

(♥) Soit f définie par $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une solution de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ avec $\begin{cases} a_0 \\ a_1 \end{cases}$ quelconques.

Pourquoi en prenant $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases}$ puis $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases}$, obtient-on un SFS ?

Solution : On montre que le wronskien des deux solutions obtenues est non nul.

THÉORÈME : Soit φ une solution non nulle de $(H) : x'' + a(t)x' + b(t)x = 0$.

1. Si y est une solution de E , alors $t \mapsto \begin{vmatrix} \varphi(t) & y \\ \varphi'(t) & y' \end{vmatrix}$ est une solution de $x' + a(t)x = 0$.
2. Soit w_0 est une solution non nulle de $x' + a(t)x = 0$.

Les solutions de $\begin{vmatrix} \varphi(t) & y \\ \varphi'(t) & y' \end{vmatrix} = w_0$ sont des solutions de (H) indépendantes de φ .

Preuve de ce théorème

On admet que φ ne s'annule pas sur I .

1.

2. L'ensemble des solutions de (H) est alors inclus dans une sev de dimension 2 : il est donc égal à cet ensemble.

Méthode utilisant le wronskien

On suppose ici connaître une solution non nulle φ de (H) .

- On résout $w' + a(t)w = 0$, on trouve un wronskien non nul w_0 .
- Résout alors l'équation différentielle $\begin{vmatrix} \varphi(t) & y \\ \varphi'(t) & y' \end{vmatrix} = w_0(t)$ avec y une fonction $\mathcal{C}^2$ sur I .

Les solutions non nulles de cette équation sont alors des solutions de (H) indépendantes de φ .

Exemple 3 : Recherche de 2 solutions indépendantes (avec le wronskien)

Déterminer une solution de $(H) : ty'' + (1 - 2t)y' + (t - 1)y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis finir la résolution.

- Première solution : On constate que la fonction φ définie par $\varphi(t) = e^t$ est solution de (H) .
- Deuxième solution : Avec la méthode du wronskien

→ Le wronskien est solution de $y' + \frac{1-2t}{t}y = 0$ où $A : t \mapsto \ln t - 2t$ est primitive de $a : t \mapsto \frac{1-2t}{t}$.

→ La fonction $w(t) = e^{-\ln t + 2t} = \frac{e^{2t}}{t}$ est donc un wronskien.

→ On recherche alors ψ qui vérifie $\varphi\psi' - \psi\varphi' = \frac{e^{2t}}{t}$, c'est à dire : $\psi' - \psi = \frac{e^t}{t}$

→ La solution homogène est $y_H = \lambda e^t$ et on cherche une solution particulière sous la forme $\tilde{y} = \lambda(t)e^t$

$$\tilde{y} \text{ est solution} \iff \lambda'(t)e^t = \frac{e^t}{t} \iff \lambda'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{on prend} \quad \lambda(t) = \ln t$$

La fonction $\tilde{y} = \ln t e^t$ convient.

→ $\psi = \ln t e^t$ est donc une deuxième solution du système.

- Les solutions du système sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$y(t) = \lambda e^t + \mu \ln t \cdot e^t \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$



Méthode de Lagrange

On recherche la nouvelle solution sous la forme $\psi(t) = \lambda(t) \cdot \varphi(t)$ avec λ deux fois dérivable.

On est alors ramené à une EDL1 d'inconnue λ' que l'on sait résoudre à condition que φ ne s'annule pas sur I .



Preuve de la méthode de Lagrange



Exemple 3 : Recherche de 2 solutions indépendantes (Avec Lagrange)

Déterminer une solution de $(H) : ty'' + (1 - 2t)y' + (t - 1)y = 0$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ puis finir la résolution.

- Première solution : On constate que la fonction φ définie par $\varphi(t) = e^t$ est solution de (H) .
- Deuxième solution : Avec la méthode de Lagrange
 - On recherche une solution ψ sous la forme $\psi(t) = \lambda(t)e^t$.
 - On commence par calculer $\psi'(t)$ et $\psi''(t)$.
 - On a alors ψ solution de (H) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si ... ssi $\lambda'(t) = \frac{A}{t}$ avec $A \in \mathbb{R}$. Prenons alors $A = 1$ ce qui nous donne par exemple $\lambda(t) = \ln(t)$.
 - La fonction définie par $\psi(t) = \ln t \cdot e^t$ est donc une deuxième solution du système.
- Les solutions du système sont donc les fonctions définies sur $\mathbb{R}^{+*}$ par :

$$y(t) = \lambda e^t + \mu \ln t \cdot e^t \quad \text{avec} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

3) Recherche d'une solution particulière

Après avoir déterminé une SFS de (H) , nous devons trouver une solution particulière de (E) .

Méthode : Pour trouver $\tilde{y}$ une solution particulière de (E)

- Méthode 1 : Lorsque $\begin{cases} a \text{ et } b \text{ sont polynômiales} \\ c \text{ est DSE} \end{cases}$, on peut rechercher $\tilde{y}$ sous la forme d'un DSE.
- ♡ Méthode 2 : Sinon, on peut utiliser la méthode de variation des constantes :

→ On recherche $\tilde{y}$ sous la forme $\tilde{y} = \lambda(t)\varphi + \mu(t)\psi$ où $y_H = \lambda\varphi + \mu\psi$ est solution de (H) .

→ Si λ et μ vérifient le système $\begin{cases} \lambda'\varphi + \mu'\psi = 0 \\ \lambda'\varphi' + \mu'\psi' = c(t) \end{cases}$ alors $\tilde{y}$ est solution de (E) .

Il y a bien un unique couple de solutions $(\lambda'(t), \mu'(t))$ car le déterminant est un wronskien non nul.



Preuve du théorème précédent

Montrer qu'en prenant λ et μ solutions du système la fonction $\tilde{y}$ est bien une solution de (E) .



Exemple : $(E) \ y'' - 2y' + y = \frac{e^t}{1+t^2}$ sur $\mathbb{R}$

- Solutions homogènes : Les solutions de l'équation homogène sont : $y_H(t) = (at + b)e^t$ avec $a, b \in \mathbb{K}$.
- Solution particulière : Avec la méthode de variation des constantes.

On recherche donc une solution particulière sous la forme : $\tilde{y}(t) = a(t)te^t + b(t)e^t$.

→ Nous savons alors que $\tilde{y}$ sera une solution de (E) dès lors que : $\begin{cases} a'(t)te^t + b'(t)e^t = 0 \\ a'(t)(1+t)e^t + b'(t)e^t = \frac{e^t}{1+t^2} \end{cases}$.

C'est à dire : $\begin{cases} a'(t)t + b'(t) = 0 \\ a'(t)(1+t) + b'(t) = \frac{1}{1+t^2} \end{cases}$.

→ Les formules de Cramer donnent : $a'(t) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{1+t^2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{1+t^2}$ et $b'(t) = -\begin{vmatrix} t & 0 \\ 1+t & \frac{1}{1+t^2} \end{vmatrix} = \frac{-t}{1+t^2}$.

→ Nous pouvons donc prendre : $\begin{cases} a(t) = \arctan t \\ b(t) = -\frac{1}{2} \ln(1+t^2) \end{cases}$ et donc : $\tilde{y}(t) = t \arctan(t)e^t - \ln \sqrt{1+t^2}e^t$.

- Solutions générales : Les solutions de (E) sont alors les fonctions y de la forme :

$$y(t) = \left(t \arctan(t) - \ln \sqrt{1+t^2} + at + b \right) e^t \quad \text{avec} \quad a, b \in \mathbb{K}$$

Exercice : 7

(♥) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' + y = f(t)$ où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.



Réponse

III] Résolution de $y'' + ay' + by = c(t)$ (Rappels MPSI)

Solutions COMPLEXES de $(H) : y'' + ay' + by = 0$

- On note $\mathcal{C} : r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique de (H) .
- On obtient un système fondamental de solutions selon la nature des racines :

→ Si $\Delta \neq 0$: En notant r_1 et r_2 les deux racines, $\begin{cases} t \mapsto e^{r_1 t} \\ t \mapsto e^{r_2 t} \end{cases}$ forment un SFS.

→ Si $\Delta = 0$: En notant r la racine double, $\begin{cases} t \mapsto e^{rt} \\ t \mapsto te^{rt} \end{cases}$ forment un SFS.



Exemple : Solutions complexes de $y'' - 2y' + 2y = 0$

- Les racines de $r^2 - 2r + 2 = 0$ sont $r = 1 \pm 2i$
- Les solutions complexes sont donc les fonctions y de la forme :

$$y(t) = Ae^{(1+2i)t} + Be^{(1-2i)t} \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{C}$$

Solutions REELLES de $(H) : y'' + ay' + by = 0$

- On note $\mathcal{C} : r^2 + ar + b = 0$ l'équation caractéristique de (H) .
- On obtient un système fondamental de solutions selon la nature des racines :

→ Si $\Delta > 0$: En notant r_1 et r_2 les deux racines réelles, $\begin{cases} t \mapsto e^{r_1 t} \\ t \mapsto e^{r_2 t} \end{cases}$ forment un SFS.

→ Si $\Delta = 0$: En notant r est la racine double, $\begin{cases} t \mapsto e^{rt} \\ t \mapsto te^{rt} \end{cases}$ forment un SFS.

→ Si $\Delta < 0$: En notant $r = \alpha \pm i\omega$ les racines complexes, $\begin{cases} t \mapsto e^{\alpha t} \cos(\omega t) \\ t \mapsto e^{\alpha t} \sin(\omega t) \end{cases}$ forment un SFS.



Rappel : Cas des suites linéaires d'ordre 2

Pour déterminer le terme u_n d'une suite (u_n) vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, la démarche est semblable.

- Lorsque $\Delta > 0$, les suites sont de la forme : $U_n = Ar_1^n + Br_2^n$
- Lorsque $\Delta = 0$, les suites sont de la forme : $U_n = (An + B)r^n$
- Lorsque $\Delta < 0$, il faut écrire les racines de $(\mathcal{C})$ sous forme trigonométrique : $r = \rho e^{i\theta}$.
On obtient alors :

$$u_n = \rho^n (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$



Autre formule dans le cas où $\Delta > 0$

Lorsque $\begin{cases} r_1 = \alpha + \beta \\ r_2 = \alpha - \beta \end{cases}$ sont les racines de l'équation caractéristique, $\begin{cases} t \mapsto e^{\alpha t} \operatorname{ch}(\beta t) \\ t \mapsto e^{\alpha t} \operatorname{sh}(\beta t) \end{cases}$ forment un SFS de (E) .

Justification : On peut vérifier que ces deux fonctions sont bien solutions de (E) .

Le plus simple est de développer leur expression : $\begin{cases} e^{\alpha t} \operatorname{ch}(\beta t) = \frac{1}{2}(e^{(\alpha+\beta)t} + e^{(\alpha-\beta)t}) \\ e^{\alpha t} \operatorname{sh}(\beta t) = \frac{1}{2}(e^{(\alpha+\beta)t} - e^{(\alpha-\beta)t}) \end{cases}$.

On constate alors que ces deux fonctions sont bien de la forme des solutions de (E) .

Comme leur wronskien est non nul (vérification immédiate!) cela prouve qu'elles forment bien un SFS de (E) .



Exemple 1 : Solutions réelles de $y'' - 2y' + y = 0$

- $r^2 - 2r + 1 = 0$ possède $r = 1$ pour racine double.
- Les solutions réelles sont donc les fonctions y de la forme :

$$y(t) = (A + Bt)e^t \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$



Exemple 2 : Solutions réelles de $y'' - 2y' + 2y = 0$

- Les racines de $r^2 - 2r + 2 = 0$ sont $r = 1 \pm 2i$
- Les solutions réelles sont donc les fonctions y de la forme :

$$y(t) = e^t (A \cos(2t) + B \sin(2t)) \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$



Exemple 3 : Solutions réelles de $y'' - 2y' - 2y = 0$

- Les racines de $r^2 - 2r - 2 = 0$ sont $r = 1 \pm \sqrt{3}$.
- Les solutions réelles sont donc les fonctions y de la forme :

$$y(t) = e^{-t} (A \operatorname{ch}(\sqrt{3}t) + B \operatorname{sh}(\sqrt{3}t)) \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Solution particulière dans deux cas particuliers : (Rappels de MPSI)

- Cas où $c(t) = Ae^{\alpha t}$: On peut trouver une solution particulière sous la forme :

→ $\tilde{y}(t) = Ce^{\alpha t}$ si α n'est pas racine de l'équation caractéristique $\mathcal{C}$.
→ $\tilde{y}(t) = Cte^{\alpha t}$ si α est racine simple de l'équation caractéristique $\mathcal{C}$.
→ $\tilde{y}(t) = Ct^2e^{\alpha t}$ si α est racine double de l'équation caractéristique $\mathcal{C}$.

- Cas où $c(t) = A \cos(\alpha t)$ ou $A \sin(\alpha t)$:

On cherche une solution particulière avec $\tilde{c}(t) = Ae^{i\alpha t}$ et on prend sa partie réelle ou imaginaire.



Exemple 1 : Solutions réelles de $(E) : y'' - 2y' + y = e^t$

- $r^2 - 2r + 1 = 0$ possède $r = 1$ pour racine double et $y_H(t) = (A + Bt)e^t$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
- Le second membre est $c(t) = e^t = e^{1 \cdot t}$.
Comme 1 est racine double de (C) , on cherche une solution particulière sous la forme $\tilde{y}(t) = \lambda t^2 e^t$:

$$\tilde{y} \text{ est solution de } (E) \iff \lambda(t^2 + 4t + 2)e^t - 2\lambda(t^2 + 2t)e^t + \lambda t^2 e^t = e^t \iff \lambda = \frac{1}{2}$$

- Les solutions réelles de (E) sont donc les fonctions y de la forme :

$$y(t) = \frac{1}{2}t^2 e^t + (A + Bt)e^t \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$



Exemple 2 : Solutions réelles de $(E) : y'' - 2y' + y = \cos t$

- $r^2 - 2r + 1 = 0$ possède $r = 1$ pour racine double et $y_H(t) = (A + Bt)e^t$ avec $A, B \in \mathbb{R}$.
- Le second membre est $c(t) = \cos t = \operatorname{Re}(e^{it})$.
→ On recherche une solution particulière de $y'' - 2y' + y = e^{it}$.
Comme i n'est pas racine de (C) , on cherche une solution particulière sous la forme $\tilde{y}(t) = \lambda e^{it}$:

$$\tilde{y} \text{ est solution de } (E) \iff -\lambda e^{it} - 2i\lambda e^{it} + \lambda e^{it} = e^{it} \iff \lambda = \frac{1}{2}i$$

→ Ainsi $\tilde{y}(t) = \operatorname{Re}(\frac{1}{2}ie^{it}) = -\frac{1}{2}\sin t$ est une solution particulière de (E) .

- Les solutions réelles de (E) sont donc les fonctions y de la forme :

$$y(t) = -\frac{1}{2}\sin t + (A + Bt)e^t \quad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

IV] Autres méthodes possibles

1) Changement de fonction inconnue

Le principe :

On se ramène, par équivalences successives, à une nouvelle équation (plus simple à résoudre) vérifiée par une nouvelle fonction.

- On pose z une nouvelle fonction inconnue définie en fonction de y .
- On calcule y' et y'' en fonction de z , z' et z'' , ou le contraire si les calculs sont nettement simplifiés.
- On transforme alors l'équation initiale par équivalences successives.



Exemple : Résolution de $(E) : (1 + t^2)y'' + 4ty' + (1 - t^2)y = 0$ sur $\mathbb{R}$ en posant $z = (1 + t^2)y$

- On remarque que z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec
$$\begin{cases} z = (1 + t^2)y \\ z' = 2ty + (1 + t^2)y' \\ z'' = (1 + t^2)y'' + 4ty' + 2y \end{cases} \quad \text{et ainsi :}$$

$$(1 + t^2)y'' + 4ty' + (1 - t^2)y = 0 \iff z'' - z = 0$$

Si cette équivalence ne vous paraît pas évidente, vous pouvez la retrouver en calculant plutôt y , y' et y'' en fonction de z , z' et z'' .

- On en déduit que $z(t) = Ae^t + Be^{-t}$ et donc que :

$$y(t) = \frac{Ae^t + Be^{-t}}{1 + t^2}$$

On peut utiliser ce résultat pour déterminer un DSE des fonctions $t \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$ et $t \mapsto \frac{e^{-t}}{1+t^2}$.



Exemple : Résolution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $(E) : t^2y'' + ty' - y = 0$ avec la méthode de réduction de l'ordre

- On constate que $\varphi(t) = t$ est solution de l'équation (H) qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$.

En posant $y(t) = \lambda(t)t$ nous avons λ deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ avec
$$\begin{cases} y = t\lambda \\ y' = \lambda + t\lambda' \\ y'' = t\lambda'' + 2\lambda' \end{cases}.$$

Ainsi :

$$t^2y'' + ty' - y = t^2 \iff t^2(t\lambda'' + 2\lambda') + t(\lambda + t\lambda') - t\lambda = t^2 \iff t^3\lambda'' + 3t^2\lambda' = t^2 \iff \lambda'' + \frac{3}{t}\lambda' = \frac{1}{t}$$

- On détermine λ' puis λ et enfin une nouvelle solution y de (E) .

A finir...

2) Changement de variable

Le principe : On note ici x la variable de la fonction y inconnue

Le principe est le même que le changement de fonction sauf qu'ici, on se ramène à une nouvelle fonction qui dépend d'une nouvelle variable.

- On pose $t = u(x)$ où u est une fonction bijective et $\mathcal{C}^2$
- On pose alors $z(t) = y(x)$ la nouvelle fonction inconnue
- On calcule y' et y'' en fonction de z , z' et z'' (ou le contraire!) en prenant garde à la variable de dérivation. ⚠
- On transforme alors l'équation initiale par équivalences successives.



Exemple : Résolution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $(E) : x^2 y'' + 3xy' + y = 0$ en posant $t = \ln x$

⚠ « $t = \ln x$ » signifie que $\begin{cases} t \text{ est une fonction de } x \\ x \text{ est une fonction de } t \end{cases}$.

- Il existe une fonction z telle que $z(t) = y(x)$ Il s'agit de $z(t) = y(e^t)$

- La fonction z est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\begin{cases} y(x) = z(t) \\ y'(x) = z'(t) \frac{1}{x} \\ y''(x) = z''(t) \frac{1}{x^2} + z'(t) \frac{-1}{x^2} \end{cases}$.

Ainsi :

$$x^2 y'' + 3xy' + y = 0 \iff x^2 \left(z'' \frac{1}{x^2} + z' \frac{-1}{x^2} \right) + 3xz \frac{1}{x} + z = 0 \iff z'' + 2z' + z = 0$$

- Terminer la résolution... et montrer qu'on obtient :

$$y(x) = \frac{\lambda \ln x + \mu}{x}$$

Exemple usuel : Résolution des équations différentielles d'Euler

- Les équations d'Euler sont les équations de la forme : $x^2 y'' + axy' + by = 0$
- Pour résoudre ces équations sur $\mathbb{R}^{+*}$, on pose :

$$t = \ln x$$

Preuve : Prouver la validité de cette méthode.

Exercice : 8

(*) Pour résoudre les équations d'Euler, on peut également rechercher une solution sous la forme $\varphi(t) = t^r$. Appliquer cette méthode pour résoudre l'équation différentielle précédente.

Preuve :

3) Equations différentielles à variables séparables

- **Définition** : Il s'agit des équations différentielles de la forme : $f(y)y' = g(t)$ (*)

- **Méthode** : On raisonne par équivalences en intégrant l'équation (*)

$$(*) \iff F(y) = G(t) + C \iff y = F^{-1}(G(t) + C)$$

⚠ Il faut parfois adapter l'intervalle I de résolution à la constante C .



Exemple 1 : Résoudre $y' - xe^{-y} = 0$ sur I à déterminer

Par équivalences en intégrant par rapport à x :

$$y' - xe^{-y} = 0 \iff y'e^y = x \iff e^y = \frac{x^2}{2} + \lambda \iff y(x) = \ln\left(\frac{x^2}{2} + \lambda\right)$$

On remarque que la solution trouvée n'est valable que si $\frac{x^2}{2} + \lambda > 0$.

Or :

$$\frac{x^2}{2} + \lambda > 0 \iff x^2 > -2\lambda \dots$$

On discute alors selon le signe de λ .



Exemple 2 : Limites de la méthode

Résoudre $y' \cos x = y \sin x$ sur I à déterminer.

- Méthode au programme :

En normalisant, on peut appliquer la méthode usuelle sur tout intervalle $]\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi[$.

- Autre méthode : En remarquant que cette équation différentielle est à variables séparables.

On constate que cette méthode complique la résolution en imposant de nombreuses restrictions inutiles à l'intervalle I de résolution.

Exemples à traiter : Résoudre les équations différentielles suivantes.

- $y^2 + (x+1)y' = 0$
- $y' = \ln y$
- $yy' = x$
- $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$

V] Equations Différentielles linéaires scalaires d'ordre $n \geq 3$

Il s'agit maintenant de résoudre :

$$(E) : x^{(n)} = a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \dots + a_0(t)x + b(t) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a_0, \dots, a_{n-1} : I \rightarrow \mathbb{K} \\ b : I \rightarrow \mathbb{K} \end{cases} \quad \text{continues}$$

1) Méthode générale

La méthode a été vue dans le cours sur les systèmes différentiels linéaires.

Méthode : On résout (E) en se ramenant au système différentiel :

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_{n-1}' \\ x_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Les solutions x_1 de ce système sont alors les solutions de (E) .



Preuve

$\Rightarrow$ Supposons que x soit solution de l'EDLn.

$$\text{En posant } \begin{cases} x_1 = x \\ x_2 = x' \\ \vdots \\ x_n = x^{(n-1)} \end{cases}, \text{ on a alors : } \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1}' = x_n \\ x_n' = a_0(t)x_1 + \dots + a_{n-1}(t)x_n + b(t) \end{cases}.$$

x est donc la composante x_1 d'un tuple $(x_1, \dots, x_n)$ solution du système Σ .

$\Leftarrow$ Supposons que x_1 soit solution du système.

En reformulant la dernière équation, on constate que x_1 est bien solution de (E) .

Rappel de la méthode de résolution d'un SDL1 :

- On tente de résoudre Σ en diagonalisant ou en trigonalisant A .
Cela ne marche que si la matrice de passage est indépendante de la variable.
- Sinon, on est bien embêtés... Cependant, lorsque les fonctions a_k sont constantes, les solutions de (H) sont les fonctions de la forme $X(t) = \exp(tA).X_0$
 - $\rightarrow$ On met alors les solutions homogènes sous la forme : $X(t) = \lambda_1 X_1(x) + \dots + \lambda_n X_n(t)$
 - $\rightarrow$ Ce qui nous permet d'obtenir une solution particulière de Σ avec la méthode de Δ° des constantes (HP)
 - $\rightarrow$ On peut alors en déduire les solutions x_1 cherchées.

En pratique, cette technique sera surtout utile lors de la résolution numérique de l'EDLS2.



Résoudre $y^{(3)} = -2y'' - 5y' + 3y + \cos t$ avec Python

Déterminer le graphe de la solution y vérifiant les conditions initiales $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \\ y''(0) = -5 \end{cases}$ sur $[0, 5]$.

Méthode : On se ramène à la résolution du système différentiel :

$$\begin{pmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_0(0) = 0 \\ x_1(0) = 2 \\ x_2(0) = -5 \end{cases}$$

Python

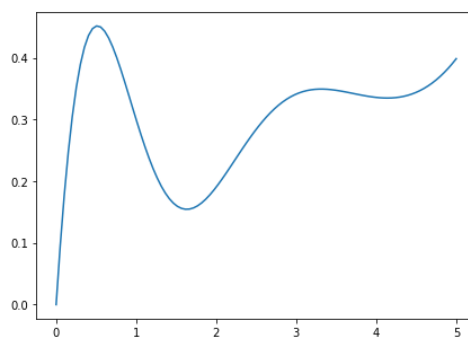
```
from matplotlib.pyplot import plot

def Euler(x0,y0,z0,t0,tN,N,f1,f2,f3):
    p = (tN-t0)/N
    x = [x0]
    y = [y0]
    z = [z0]
    t = [t0]
    for k in range(1,N+1):
        t.append(t[k-1]+p)
        x.append(x[k-1]+p*f1(x[k-1],y[k-1],z[k-1],t[k-1]))
        y.append(y[k-1]+p*f2(x[k-1],y[k-1],z[k-1],t[k-1]))
        z.append(z[k-1]+p*f3(x[k-1],y[k-1],z[k-1],t[k-1]))
    plot(t,x)

from matplotlib.pyplot import cos

f1 = lambda x,y,z,t : y
f2 = lambda x,y,z,t : z
f3 = lambda x,y,z,t : 3*x - 5*y - 2*z + cos(t)

Euler(0,2,-5,0,5,100,f1,f2,f3)
```



La fonction `odeint()` donne également une solution numérique de ce système, mais son application est un peu technique lorsque son utilisation est occasionnelle.

2) Musculation - Cas où les coefficients sont constants

Il s'agit ici de rechercher les **solutions complexes** de :

$$(H) : x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_1x' + a_0x = 0 \quad \text{où} \quad \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, a_k \in \mathbb{C}$$

Etude

- Reformulation du problème : On note $\begin{cases} D \text{ l'opération de dérivation} \\ P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_1X + a_0 \end{cases}$.

Nous avons alors :

$$x \in S_H \iff x \in \ker(P(D))$$

L'équation $P(x) = 0$ est appelée l'équation caractéristique.

- Décomposition de $\ker(P(D))$ en supplémentaires : On note $P(X) = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k)^{\alpha_k}$.

Les λ_k sont donc les solutions complexes de l'équation caractéristique.

Le lemme de décomposition des noyaux nous donne alors :

$$\ker(P(D)) = \bigoplus_{k=1}^p \ker((D - \lambda_k \text{id})^{\alpha_k})$$

- Eléments de $\ker((D - \lambda_k \text{id})^{\alpha_k})$:

→ Lorsque $\alpha_k = 1$, on a facilement : $x \in \ker((D - \lambda_k \text{id})) \iff x \in \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda_k t})$

→ Lorsque $\alpha_k \geq 2$, on recherche x sous la forme $x = e^{\lambda_k t} z$. (*changement de fonction*)

Avoir vérifié que $(D - \lambda_k \text{id})^{\alpha_k}(e^{\lambda_k t} z) = e^{\lambda_k t} z^{(\alpha_k)}$, on obtient :

$$x \in \ker((D - \lambda_k \text{id})^{\alpha_k}) \iff z^{(\alpha_k)} = 0 \iff x \in \text{Vect}(t \mapsto e^{\lambda_k t}, t \mapsto t e^{\lambda_k t}, \dots, t \mapsto t^{\alpha_k-1} e^{\lambda_k t})$$

- Conclusion : On obtient ainsi une généralisation de la méthode de résolution de $y'' + ay' + by = 0$ selon l'ordre de multiplicité des solutions de l'équation caractéristique.

L'étude des solutions réelles lorsque les a_k sont réels peut se faire en prenant les parties réelles des solutions complexes obtenues avec la méthode précédente.

Exercice : 9

(*) Rechercher les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ de $(E) : y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.

VI] Raccordements de solutions

1) Equations d'ordre 1

$(E) : a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sur I avec $a(t)$ qui s'annule une fois sur I en t_0

Méthode :

- On commence par résoudre (E) sur $\left\{ \begin{array}{l}]-\infty, t_0[\cap I \\]t_0, +\infty[\cap I \end{array} \right\}$ avec les méthodes usuelles.

On note respectivement y^- et y^+ les solutions trouvées.

- On recherche alors les solutions sur I par analyse/synthèse :

→ Analyse : Soit y une solution de (E) sur I . Cette solution y est alors de la forme :

$$y : \begin{cases} y(t) = y^-(t) \text{ lorsque } t < t_0 \\ y(t_0) = \frac{c(t_0)}{b(t_0)} \\ y(t) = y^+(t) \text{ lorsque } t > t_0 \end{cases} \quad (\text{en prenant } t = t_0 \text{ dans } (E))$$

On traduit alors le fait que f est continue, puis dérivable en t_0 ce qui impose souvent des contraintes sur les paramètres qui définissent y^+ et y^- .

→ Synthèse : Les fonctions déterminées en analyse conviennent par construction.



Exemple 1 : Résolution sur $\mathbb{R}$ de (E) $ty' - y = t^2$

- Sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ nous avons $(E) \iff y' - \frac{1}{t}y = t$.

On montre facilement que les solutions de E sur ces deux intervalles sont : $\begin{cases} y^-(t) = t^2 + \lambda t \\ y^+(t) = t^2 + \mu t \end{cases}$.

- Analyse : Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est de la forme $y : \begin{cases} y(t) = t^2 + \lambda t \text{ lorsque } t < 0 \\ y(0) = 0 \\ y(t) = t^2 + \mu t \text{ lorsque } t > 0 \end{cases}$.

→ On constate que cette fonction est bien continue en 0

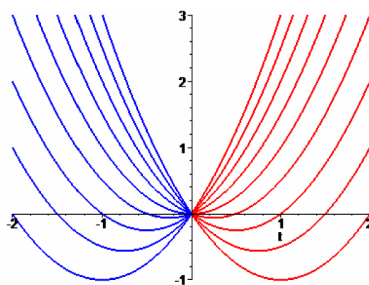
→ Cette fonction est dérivable en 0, donc $\lambda = \mu$

- Synthèse : les fonctions trouvées précédemment conviennent par construction.

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions y de la forme :

$$y(t) = t^2 + \lambda t$$

Dans cet exemple, une chaque solution sur $\mathbb{R}^{-*}$ se raccorde à une seule solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.





Exemple 2 : Résolution sur $\mathbb{R}$ de $(E) \quad ty' + y = t^2$

- Sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ nous avons $(E) \iff y' + \frac{1}{t}y = t$.

On montre facilement que les solutions de E sur ces deux intervalles sont : $\begin{cases} y^-(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{\lambda}{t} \\ y^+(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{\mu}{t} \end{cases}$.

- Analyse : Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. Cette fonction est de la forme $y : \begin{cases} y(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{\lambda}{t} \text{ lorsque } t < 0 \\ y(0) = 0 \\ y(t) = \frac{t^2}{3} + \frac{\mu}{t} \text{ lorsque } t > 0 \end{cases}$.

→ Cette fonction est continue en 0 et donc $\lambda = \mu = 0$

→ La fonction obtenue $(y(x) = \frac{t^2}{3})$ est bien dérivable en 0

- Synthèse : la fonction trouvée précédemment convient par construction.

(E) admet donc sur $\mathbb{R}$ la fonction $y : t \mapsto \frac{t^2}{3}$ pour seule solution.

Dans cet exemple, une seule solution sur $\mathbb{R}^{-}$ se raccorde à une seule solution sur $\mathbb{R}^{+*}$*



Exemple 3 : Résolution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $(E) \quad t(\ln t)y' + y = 0$

- Sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$ nous avons $(E) \iff y' + \frac{1}{t \ln t}y = 0$.

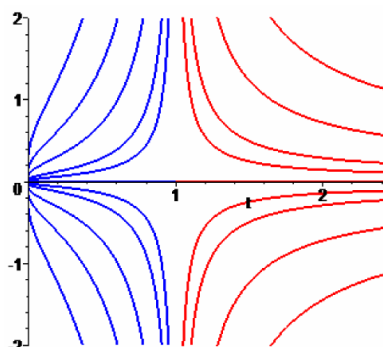
On montre facilement que les solutions de E sur ces deux intervalles sont : $\begin{cases} y^-(t) = \frac{A}{\ln(t)} \\ y^+(t) = \frac{B}{\ln t} \end{cases}$.

- Analyse : Soit y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$. y est de la forme $\begin{cases} y(t) = \frac{A}{\ln(t)} \text{ lorsque } t < 1 \\ y(1) = 0 \\ y(t) = \frac{B}{\ln(t)} \text{ lorsque } t > 1 \end{cases}$.

→ Cette fonction est continue en 1 et donc $A = B = 0$

→ Dans ce cas, y est la fonction nulle et est donc bien dérivable en 1

- Synthèse : La fonction nulle est bien solution de l'équation sur $\mathbb{R}^{+*}$ et c'est la seule !



Exercice : 10

Résolution sur $\mathbb{R}$ de : $ty' - y = t$

Preuve : Résoudre cet exercice.

Exercice : 11

(**) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation : $y' - |y| = -t$.

Preuve : On pourra commencer par poser $y = x - t$.

2) Equations d'ordre 2

$(E) : a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$ sur I avec $a(t)$ qui s'annule une fois sur I en t_0

Méthode :

- On commence par résoudre (E) sur $\begin{cases}]-\infty, t_0[\cap I \\]t_0, +\infty[\cap I \end{cases}$ avec les méthodes usuelles.
- On recherche là encore les solutions sur I par ANALYSE/SYNTHESE.
Cette fois il faut s'assurer en analyse que la fonction y solution est bien :
 - continue en t_0
 - dérivable et $\mathcal{C}^1$ en t_0
 - dérivable deux fois et $\mathcal{C}^2$ en t_0



Exemple : Résoudre $(E) : x^2y'' + xy' - y = 0$ sur $\mathbb{R}$

- On montre que les solutions sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sur $\mathbb{R}^{-*}$ sont de la forme $y(x) = ax + \frac{b}{x}$
- Analyse : y une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ est de la forme $\begin{cases} y(x) = ax + \frac{b}{x} \text{ lorsque } x < 0 \\ y(0) = 0 \\ y(x) = cx + \frac{d}{x} \text{ lorsque } x > 0 \end{cases}$
 - y sera continue en 0 uniquement lorsque $b = d = 0$
 - y sera dérivable en 0 lorsque $a = c$ et donc lorsque l'expression de y sur $\mathbb{R}$ est $y(x) = ax$.
 - y est alors deux fois dérivable en 0.
- Synthèse : Par construction, les fonctions de cette forme sont bien solution de (E) .

Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions y de la forme :

$$y(x) = ax$$

Exercice : 12

Résolution sur $\mathbb{R}$ de : $(t - 1)y'' - ty' + y = 0$.

Preuve : Résoudre cet exercice.