Calcul matriciel et Déterminants

MP2 Prytanée National Militaire

Pascal DELAHAYE - d'après le cours de David Delaunay

9 octobre 2019

$\mathbb{K}$ représente $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{Q}$.
Rien de nouveau dans ce cours par rapport à ce qui a été vu en MPSI.

L'idée importante à retenir est que lorsque E et F sont de dimension finie, l'existence
- d'un isomorphisme de E dans $\mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$
- d'un isomorphisme de $\mathcal{L}(E,F)$ dans $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$
- d'un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

permet de traiter tous les problèmes vectoriels en dimension finie par une approche matricielle et réciproquement.

La dernière partie de ce cours est consacrée à la définition, au calcul et à l'utilisation des déterminants.

Table des matières

1 Calcul matriciel

Dans cette partie, nous nous intéressons uniquement aux matrices, sans faire pour l'instant le lien avec leur application en algèbre linéaire.

Cf cours MPSI

1. Matrices rectangulaires :

   Définition :

Une matrice rectangle $\left\{\begin{array}{l}\text{à coefficients dans } \mathbb{K}\\ \text{à } n \text{ lignes}\\ \text{à } p \text{ colones}\end{array}\right.$ est une applicat° de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$ dans $\mathbb{K}$.

THÉORÈME : **Structure de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$**
$\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev (car c'est $(\mathcal{F}([\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!],\ \mathbb{K}),+,.)$)

- de dimension np
- de base canonique $(E_{ij})_{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$.

DÉFINITION : **Produit matriciel**
Pour $\left\{\begin{array}{l} A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})\\ B \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{K})\end{array}\right.$, on définit $AB = (c_{ij}) \in \mathfrak{M}_{nq}(\mathbb{K})$ par : $\quad c_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$

Cas particulier : Lorsque $\left\{\begin{array}{l} A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})\\ X = (x_i) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})\end{array}\right.$, on a : $\quad (AX)_i = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}x_k.$

PROPOSITION : **Produit des matrices élémentaires** : $\quad E_{ab}E_{cd} = \delta_{bc}E_{ad}$

Formule : Produit matriciel par blocs.

Exemples de produits par blocs :

→ Calcul de A^2 pour $A = \begin{pmatrix} O_n & -I_n \\ I_n & 0_n \end{pmatrix}$,

→ Calcul de MX lorsque $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$.

→ Calcul des puissances de $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ avec $AB = BA$.

Exercice : 1
$(*)$ Déterminer l'ensemble des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent avec toutes les autres.

Exercice : 2

$(*)$ Déterminer l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ lorsque $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

---

2. Matrices carrées :

Définition : Lorsque $n = p$.

THÉORÈME : **Structure de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$** :

$(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +,\ \times,\ .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre $\left\{\begin{array}{l}\text{non intègre}\\ \text{non commutative}\end{array}\right.$ de neutres 0_n et I_n.

THÉORÈME : **Deux sous-algèbres remarquables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$** :
- L'ensemble des matrices diagonales est une sous-$\mathbb{K}$-algèbre commutative de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
- L'ensemble des matrices triang. sup (ou inf) est une sous-$\mathbb{K}$-algèbre non commutative de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice : 3

($*$) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On note C l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

Montrer que C est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dont on déterminera une base et la dimension.

3. Problème de commutation :

THÉORÈME : Les matrices commutant avec toutes les autres sont les λI_n (matrices scalaires).

D/ Avec les E_{ij}.

THÉORÈME : Soit D est diagonale à coef diagonaux deux à deux distincts.
Les matrices qui commutent avec D sont les matrices diagonales.

D/ Usuel...

THÉORÈME : Généralisation aux matrices scalaires par blocs...

Par exemple, pour $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$ on obtient les matrices de la forme $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

D/ Par blocs...

PROPOSITION : Le commutant d'une matrice est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Noyau, image et rang d'une matrice :

DÉFINITION : L'application linéaire canoniquement associée à une matrice $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ X & \mapsto & AX \end{array}$$

Nous verrons qu'il s'agit de l'appl° linéaire de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\ \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques est A.

DÉFINITION : $\ker A$, $\operatorname{Im} A$, $\operatorname{rg} A$ sont respectivement $\ker u$, $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{rg} u$.

PROPOSITION : $\operatorname{Im} A = \operatorname{Vect}(C_1,\ \dots,\ C_p)$ et $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(C_1,\ \dots,\ C_p)$.

PROPOSITION : On prouve à l'aide des applications linéaires associées que :

- $\operatorname{rg} A \leq \min(p, n)$
- $\operatorname{rg}(AB) \leq \min(\operatorname{rg} A,\ \operatorname{rg} B)$.

THÉORÈME : **Formule du rang** : $\operatorname{rg} A + \dim \ker A = p$ (le nombre de colonnes !)

PROPOSITION : **Algorithme du rang** :
On peut déterminer le rang d'une matrice à l'aide des OEC et des OEL.

Exercice : 4

($*$) Soit $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$. Prouver que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(A - B)$.

Exercice : 5

($**$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rang de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{ij} = (i + j - 1)^2$.

Exercice : 6

($**$) Soit $A \in \mathfrak{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, telles que : $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Déterminer les rangs de A et de B ainsi que la dimension de leurs noyaux.

(b) Remarquer que $A(BA - I_2)B = 0$ puis déduire de la question précédente que $(BA - I_2)B = 0$, puis que $BA - I_2 = 0$.

5. Matrices inversibles :

DÉFINITION : **Matrice inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$**
$A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *inversible* lorsqu'il existe $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\begin{cases} AB = I_n \\ BA = I_n \end{cases}$.

Remarque : $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est le groupe des unités de l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Formule : Pour A et B inversible on a $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

PROPOSITION :

- On ne modifie pas le rang d'une matrice en la multipliant par une matrice inversible.
- Le rang d'une matrice est la taille de sa plus grande matrice extraite inversible.

THÉORÈME : **Caractérisation** : Des matrices inversibles

$$\begin{array}{rcl} A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) & \iff & \ker A = \{0\} \\ & \iff & \mathrm{Im}\, A = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ & \iff & \mathrm{rg}\, A = n \\ & \iff & A \text{ inversible à droite} \\ & \iff & A \text{ inversible à gauche} \\ & \iff & \det A \neq 0 \end{array}$$

Exercice : 7

$(**)$ Montrer que la matrice $M = I_n + A$ est inversible lorsque $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique.

On pourra calculer ${}^tXAX$ *pour* $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Exercice : 8

$(**)$ Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, à *diagonale dominante*, c'est à dire : $\forall i \in [\![1, n]\!]^2, \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1\ (j\neq i)}^{n} |a_{ij}|$.

Montrer que la matrice A est inversible.

Exercice : 9

$(*)$ Montrer que $A + B = AB \Rightarrow AB = BA$.

On pourra remarquer que $(I_n - A)(I_n - B) = I_n$

Exercice : 10

$(*)$ Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec $n \neq p$.
Prouver que AB et BA ne peuvent être toutes les deux inversibles.

Calcul de A^{-1} :

- par inversion d'un système ♡
- par la méthode de Jordan
- En recherchant B telle que $AB = I_n$. (utilisée lorsque A vérifie une relation polynômiale)

Exercice : 11

$(*)$ Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A annule le polynôme : $P = X^3 - 3X^2 + X - 5$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

---

6. Transposition :

DÉFINITION : Pour $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$, on note A^T la matrice de $\mathfrak{M}_{pn}(\mathbb{K})$ telle que $(A^T)_{ij} = A_{ji}$

Calculs :

- transposée d'une CL
- transposée d'un produit
- transposée de la transposée
- transposée de l'inverse

Définition : Matrice symétrique et antisymétrique : $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$

On remarque que la transposition est un automorphisme involutif de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, c'est à dire une symétrie.
Ses sev caractéristiques sont $S_n(\mathbb{K})$ et $A_n(\mathbb{K})$, ils sont supplémentaires.
Donnez-en une base et les dimensions.

2 Représentations matricielles

Dans cette partie, nous établissons le lien entre l'univers des matrices et celui de l'algèbre linéaire en dimension finie.

Cf cours MPSI

E et F représentent respectivement des $\mathbb{K}$-ev de dimension p et n.
e et f représentent respectivement des bases de E et F.

1. Matrice des coordonnées d'un vecteur :

   Définition : Matrice d'un vecteur et d'une famille finie de vecteurs dans une base e.

   Exemples : $\operatorname{Mat}_e e_i$ et $\operatorname{Mat}_e e$.

   > Théorème Fondamental : **Isomorphisme**
   > Une base e étant fixé :
   > $$\varphi_1 : x \mapsto \operatorname{Mat}_e x \quad \text{est un isomorphisme de } E \text{ dans } \quad \mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$$

   Proposition : $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg}(x_1, \ldots, x_p)$ lorsque A est la matrice de la famille $(x_1, \ldots, x_p)$

---

2. Matrice d'une application linéaire :

   > Définition : **Matrice d'une application linéaire**
   > Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
   >
   > La matrice de u dans les bases e et f est la matrice de $(u(e_1), \ldots, u(e_p))$ dans la base f.
   > $$\operatorname{Mat}_{e,f} u = \operatorname{Mat}_f(u(e_1), \ldots, u(e_p)) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

   Exemples :

   - Matrice des applications $\lambda \operatorname{id}_E$.
   - Matrice de $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(a_0), \ldots, P(a_n)) \end{array}$:

     $\rightarrow$ dans les bases canoniques.

$\rightarrow$ dans la base de Lagrange associée à $(a_0, \ \ldots, \ a_n)$ et la base canonique de $\mathbb{K}^{n+1}$.

PROPOSITION : **Caractérisation matricielle** :

Soit $X = mat_e x$ et $U = \mathrm{Mat}_{e,f}\, u$.
La matrice de $u(x)$ dans la base f est UX et ainsi :

$$y = u(x) \quad \Longleftrightarrow \quad Y = UX$$

D/ Par l'isomorphisme φ_1.

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Isomorphisme** : e et f étant fixées

$\varphi_2 : u \mapsto \mathrm{Mat}_{e,f}\, u$ est un isomorphisme d'algèbres de $\mathcal{L}(E, \ F)$ dans $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

---

3. Matrice d'un endomorphisme :

Définition : C'est la matrice de l'application linéaire en prenant $e = f$.

THÉORÈME FONDAMENTAL : **Isomorphisme** : Une base e étant fixée

$\varphi_3 : u \mapsto \mathrm{Mat}_e\, u$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Voir l'exercice 71 de la banque CCP.

---

4. Transport du vectoriel au matriciel :

Il faut penser dans certains exercices à utiliser le principe du parapluie qui consiste ici à reformuler un problème vectoriel sous une forme matricielle, ou le contraire. Pour cela, on utilisera le tableau d'équivalences suivant :

	Vectoriellement	Matriciellement
Vecteurs	$x, \quad 0, \quad \lambda x + \mu y$	$X, \quad 0, \quad \lambda X + \mu Y$
Applications Linéaires 1	$u \in \mathcal{L}(E,\ F), \quad \tilde{0}, \quad y = u(x)$	$U \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \quad 0, \quad Y = UX$
Applications Linéaires 2	$\lambda u + \mu v, \quad u \circ v, \quad u$ isomorphisme	$\lambda U + \mu V, \quad UV, \quad U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
Applications Linéaires 3	$u^{-1}, \quad \operatorname{Im} u, \quad \ker u, \quad \operatorname{rg} u$	$U^{-1}, \quad \operatorname{Im} U, \quad \ker U, \quad \operatorname{rg} U$
Endomorphismes 1	$u \in \mathcal{L}(E), \quad \mathrm{id}_E, \quad u^n$	$U \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), \quad I_n, \quad U^n$
Endomorphismes 2	$u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}), \quad u^{-1}, \quad \det u, \quad \operatorname{Tr} u$	$U \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad U^{-1}, \quad \det U, \quad \operatorname{Tr} U$
Formes linéaires	$u \in E^*, \quad y = \varphi(x) \in \mathbb{K}$	$M \in \mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K}), \quad Y = MX \in \mathfrak{M}_{1,1}(\mathbb{K})$

Exercice : 12

$(*)$ Chercher les endomorphismes qui commutent avec tous les autres.

Exercice : 13

$(*)$ Calculer les puissances de $A = \begin{pmatrix} 0 & & (0) & 1 \\ 1 & \ddots & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Formules de changement de bases :

Définition : Matrice de passage :
La matrice de passage de e vers e' est la matrice $P_e^{e'} = \mathrm{Mat}_e(e'_1,\ \dots,\ e'_p)$.

Proposition :
- $\to$ $P_e^{e'} = \mathrm{Mat}_{e',e}\,\mathrm{id}_E \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$
- $\to$ $\left(P_e^{e'}\right)^{-1} = P_{e'}^{e}$.

THÉORÈME : **Formules de changement de base** :

→ Nouvelles coordonnées d'un vecteur : $X_e = P_e^{e'} X_{e'}$.

→ Nouvelle matrice d'une AL : $\operatorname{Mat}_{e',f'} u = P_{f'}^{f} \operatorname{Mat}_{e,f} u P_e^{e'}$.

→ Nouvelle matrice d'un endomorphisme : $\operatorname{Mat}_{e'} u = P_{e'}^{e} \operatorname{Mat}_e u P_e^{e'}$.

Exercice : 14

$(*)$ Déterminer la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ du projecteur $\begin{cases} \text{sur } F = \operatorname{Vect}(1,2,3) \\ \text{parallèlement à } G : x = y \end{cases}$.

6. Matrices équivalentes :

DÉFINITION : **Matrices équivalentes** :
$A,\ B \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes lorsqu'il existe $\begin{cases} Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \end{cases}$ telles que $B = QAP$.

Exemples : Deux matrices proportionnelles non nulles sont équivalentes.

DÉFINITION : **Caractérisation des matrices équivalentes**
2 matrices sont équivalentes SSI ce sont les matrices d'une même AL.

Remarque : L'équivalence entre matrice est une relation d'équivalence.

THÉORÈME FONDAMENTAL : Toute matrice de rang r de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est équivalente à la matrice $J_r(n,p)$.

Exemple : Cas des matrices de rang 1

COROLLAIRE :

- 2 matrices sont équivalentes ssi elles ont le même rang.
- Une matrice et sa transposée ont le même rang. $\operatorname{rg}(A^T) = \operatorname{rg} A$

Méthode : Pour prouver que A et B sont équivalentes et trouver les matrices P et Q

- On considère u l'application canoniquement associée à A dans les bases canonique e et f
- On cherche deux bases e' et f' telle que $B = \operatorname{Mat}_{e',\ f'} u$.

Si les matrices P et Q ne sont pas demandées, il suffit de montrer que les matrices ont même rang.

Exercice : 15

$(*)$ Trouver deux matrices inversibles P et Q telles que : $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & -6 & -4 & 4 \\ -3 & 12 & 12 & 6 & -9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = PJ_3(4,5)Q$.

Exercice : 16

$(**)$ Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.

Montrer qu'il existe r matrices $A_1, \ldots, A_r$ de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ de rang 1 telles que : $A = \sum_{k=1}^{r} A_k$.

Exercice : 17

$(**)$ Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
Montrer qu'il existe des matrices B et C respectivement dans $\mathfrak{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $\mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = BC$.

---

7. Matrices semblables :

Définition : $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Théorème : **Caractérisation** :
2 matrices sont semblables SSI ce sont les matrices d'un même endomorphisme dans des bases distinctes (ou pas !).

Remarque : Il s'agit d'une relation d'équivalence.

Proposition : Semblables $\Rightarrow$ Equivalentes $\Rightarrow$ Même rang.

Méthode : Pour prouver que A et B sont semblables

- On considère u l'application canoniquement associée à A dans la base canonique e
- On cherche une base e' telle que $B = \mathrm{Mat}_{e'}\, u$.

Exercice : 18

$(**)$ Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice : 19

$(*)$ Montrer que si $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$ alors A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & & & (0) \\ 1 & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice : 20

$(*)$ Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

A quoi peut servir un tel résultat ?

---

8. Trace :

- Trace d'une matrice carré

DÉFINITION : **Trace d'une matrice carrée** : Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} A_{k,k}$.

L'application "trace" est une forme linéaire non nulle.

PROPOSITION :
- Pour tout $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$
- 2 matrices semblables ont la même trace. (et même rang et même déterminant)

Exercice : 21
$(*)$ Existe-t-il deux matrices $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $AB - BA = I_n$?

Exercice : 22
$(*)$ Soient $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX)$.
Montrer que $A = B$.

Exercice : 23
Soit $H \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1.
1. Montrer qu'il existe deux matrices colonnes X et Y telles que $H = XY^T$
2. En déduire que $H^2 = \mathrm{Tr}(H)H$.

- Trace d'un endomorphisme :

DÉFINITION : **Trace d'un endomorphisme** :
La trace d'un endomorphisme u est la trace de sa matrice dans n'importe qu'elle base.

Exemples : $\mathrm{Tr}(\mathrm{id}_E)$, $\mathrm{Tr}(p)$, $\mathrm{Tr}(s)$.

PROPOSITION : $\mathrm{Tr}(u \circ v) = \mathrm{Tr}(v \circ u)$

Exercice : 24
$(**)$ Oral CCINP
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminer la trace de l'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX + XA \end{array}$ en fonction de la trace de A.

Exercice : 25
$(**)$ Déterminer la trace de l'endomorphisme "transposition".

9. Musculation : la décomposition de Jordan d'un endomorphisme nilpotent

Soit u un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n.

LEMME : Cas particulier où $\begin{cases} u^n = 0 \\ u^{n-1} \neq 0 \end{cases}$.

Il existe une base dans laquelle la matrice de u est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

Preuve : Facile et à connaître!!

Une telle matrice est appelée un bloc de Jordan de taille n.

THÉORÈME : **Trigonalisation des endomorphismes nilpotents**

Il existe une base dans laquelle la matrice de u est de la forme : $\begin{pmatrix} 0 & x_1 & \dots & x_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & x_q \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$

Preuve : Voir le cours sur la réduction algébrique des endomorphismes.
Un endomorphisme nilpotent a toutes ses valeurs propres nulles et annule le polynôme scindé X^p, il est donc trigonalisable.

THÉORÈME : **Réduction de JORDAN d'un endomorphisme nilpotent**

Il existe une base dans laquelle la matrice de u est de la forme : $\begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & J_{r-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & J_r \end{pmatrix}$.

où pour tout $k \in [\![1, r]\!]$, J_k est un bloc de Jordan.

Preuve : La démonstration se fait par récurrence sur l'ordre de nilpotence k de u.
Elle est hors-programme.

3 Déterminants

Cf cours MPSI

1. Définition du déterminant d'une famille de vecteurs dans une base e :

> Théorème Fondamental : **Déterminant d'une famille de vecteurs**
>
> L'ensemble $\mathcal{A}_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, muni d'une base e, est une droite vectorielle engendrée par l'application :
>
> $$\begin{array}{rccc} \det : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1,\ \dots,\ x_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n} \end{array} \quad \text{où } x_{ij} \text{ est la jième coordonnées de } x_i$$

On dit que l'expression du déterminant est polynômiale en les coordonnées des variables.

Définition : $\det_e(x_1,\ \dots,\ x_n)$ est appelé le déterminant du système de vecteurs $(x_1,\ \dots,\ x_n)$ dans e.

> Proposition : **Formule de changement de bases** : $\det_{e'} X = \det_{e'} e. \det_e X$

D/ On commence par remarquer que pour tout X, on a $\det_{e'} X = \lambda \det_e X$.

> Proposition : Pour E de dimension n et e une base quelconque de E :
>
> - $(x_1,\ \dots,\ x_n) \mapsto \det_e(x_1,\ \dots,\ x_n)$ est une forme n-linéaire alternée (et donc anti-symétrique).
> - $(x_1,\ \dots,\ x_n)$ base de $E \iff \det_e(x_1,\ \dots,\ x_n) \neq 0$.

Exercice : 26

$(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et e une base de E.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $(x_1,\ \dots,\ x_n) \in E^n$, on a :

$$\sum_{j=1}^{n} \det_e(x_1\ \dots,\ f(x_j),\ \dots,\ x_n) = \lambda. \det_e(x_1,\ \dots,\ x_n)$$

2. Déterminant d'une matrice carrée :

> Définition : **Déterminant d'une matrice carrée** :
>
> Pour $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ on définit : $\det A = \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$

Remarque : Le déterminant d'une famille de vecteurs dans une base e est le déterminant de leur matrice dans e.

Exemples : Savoir calculer immédiatement

$\rightarrow$ Un déterminant d'ordre 1 (égal à son unique coefficient).

→ Un déterminant d'ordre 2 (formule connue)
→ Un déterminant d'ordre 3 (formule de sarrus)
→ Le déterminant d'une matrice triangulaire (produit des coefficients diagonaux)
→ Autres... voir plus loin !

Exercice : 27
$(*)$ Justifier qu'une famille de $n+1$ polynômes non nuls à degrés étagés de $\mathbb{K}_n[X]$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Proposition : **Formules** :
→ $\det A^T = \det A$
→ $\det AB = \det BA = \det A . \det B$
→ $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$ et dans ce cas : $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$.

⚠ à la NON linéarité du déterminant

$$\det(A+B) \neq \det A + \det B \quad \text{et} \quad \det(\lambda A) = \lambda^n \det A$$

Exercice : 28
$(*)$ MQ un produit de matrices carrées ne peut être inversible si l'une des deux matrices ne l'est pas.

Exercice : 29
$(*)$ Comparer les déterminant des matrices $A = (a_{ij})$ et $B = ((-1)^{i+j} a_{ij})$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice : 30
$(*)$ Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A^T = \bar{A}$. Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

Exercice : 31
$(*)$ Montrer qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A = 0$ ne peut être inversible.

Exercice : 32
$(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall x \in [-\varepsilon,\ \varepsilon],\ A + xB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Corollaire : Deux matrices semblables ont le même déterminant (et même rang et même trace)

D/ Facile

Proposition : **Groupe Spécial Linéaire d'ordre** n :
$SL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de déterminant 1 est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

D/ Noyau du morphisme de groupes $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$.

Proposition : Le déterminant d'une matrice est une forme n-linéaire alternée de ses colonnes (et de ses lignes).

3. Déterminant d'un endomorphisme :

Définition : Il s'agit du déterminant de sa matrice dans n'importe quelle base.

Exemples : $\det(\mathrm{id}_E)$, $\det(p)$, $\det(s)$, $\det(T)$ (transposition).

Proposition : Formules :
- $\det(u \circ v) = \det(v \circ u) = \det u . \det v$
- $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \iff \det u \neq 0$ avec $\det u^{-1} = \dfrac{1}{\det u}$

Proposition : Groupe Spécial Linéaire de E :
$SL(E)$ l'ens. des endomorphismes de déterminant 1 est un sous-groupe de $\mathrm{GL}(\mathbb{E})$.

D/ Par isomorphisme ou en considérant le noyau du morphisme $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}^*$.

---

4. Opérations élémentaires sur les déterminants :

Théorème : Opérations élémentaires :
- $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ ne modifie pas un déterminant
- $C_i \leftrightarrow C_j$ multiplie le déterminant par -1
- $C_i \leftarrow \alpha C_i$ multiplie le déterminant par α
- Effectuer une permutation σ des colonnes multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.

Idem pour les lignes.

⚠ les OE doivent être effectuées SUCCESSIVEMENT.

Exercice : 33

(♡) Calculer $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{vmatrix}$.

Exercice : 34

(∗) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & (0) & (0) \\ \vdots & (0) & \ddots & (0) \\ 1 & (0) & (0) & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & & 0 & 1 \\ \vdots & \ddots & & 0 \\ \vdots & (1) & \ddots & \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n \end{vmatrix}$$

5. Calcul d'un déterminant diagonal par blocs :

THÉORÈME : Lorsque A et B sont deux matrices carrées, on a : $\begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix} = \det A.\det B$.

D/ Revoir la démonstration très intéressante vue en MPSI.

Bien entendu, ce résultat se généralise à n blocs diagonaux.

Exercice : 35

$(*)$ Soient $A,\ B,\ C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $D_1 = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}$ et $D_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$.

6. Développement d'un déterminant selon une ligne ou colonne :

DÉFINITION :

- Mineur "i,j" (noté $m_{i,j}$) : Il s'agit du déterminant de la matrice amputée de $\left\{\begin{array}{l} \text{sa } i\text{ème ligne} \\ \text{sa } j\text{ème colonne} \end{array}\right.$.
- Cofacteur "i,j" (noté $\Delta_{i,j}$) : $\Delta_{i,j} = (-1)^{i+j} m_{i,j}$

THÉORÈME : **Formules de développement** :

- Par rapport à la $i$ème ligne : $\det A = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\Delta_{i,j}$
- Par rapport à la $j$ème colonne : $\det A = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\Delta_{i,j}$

Exercice : 36

$(*)$ Lorsque $a,\ b,\ c \in \mathbb{K}$, calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} a & b & & (0) \\ c & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & b \\ (0) & & c & a \end{vmatrix}. \qquad \begin{vmatrix} a & & 0 & 0 & & b \\ & \ddots & & & \ddots & \\ 0 & & a & b & & 0 \\ 0 & & b & a & & 0 \\ & \ddots & & & \ddots & \\ b & & 0 & 0 & & a \end{vmatrix}.$$

7. Une méthode originale : Calculer $\begin{vmatrix} a & b & \dots & b \\ c & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ c & \dots & c & a \end{vmatrix}$, lorsque $a,\ b,\ c \in \mathbb{K}$ avec $b \neq c$

D/ On ajoute t à chaque coefficient et on choisit des valeurs de t judicieuses.

---

8. Déterminant de Vandermonde :

Théorème : **Formule** :

$$V_n(a_1, \dots,\ a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

Preuve : Cf le cours de MPSI ! On fait apparaître une relation de récurrence en étudiant $f(x) = V_{n+1}(a_1, \dots,\ a_n,\ x)$ puis on valide la conjecture par récurrence.

Exercice : 37

$(*)$ Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{N})$ de terme général $a_{ij} = i^j$.

Exercice : 38

$(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{x_1,\ \dots,\ x_n\}$ une famille de scalaires de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux.

Montrer que l'application $\phi \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ P & \mapsto & (P(x_1),\ \dots,\ P(x_n)) \end{array}$ est une bijection (avec la définition).

Exercice : 39

$(*)$ Soit $(a_1,\ \dots,\ a_n) \in \mathbb{K}^n$ distincts deux à deux.

Prouver en introduisant un polynôme bien choisi que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

---

9. Comatrice :

Définition : **Comatrice** :
La comatrice de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice de termes généraux les cofacteurs $\Delta_{i,j}$.

On la note : $com(A) = (\Delta_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition : **Formule** :

On a $A.com(A)^T = \det A.I_n$ puis lorsque A est inversible : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} com(A)^T$

C'est cette formule qu'on utilise lorsqu'on calcule directement l'inverse d'une matrice 2×2.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Exercice : 40

$(*)$ Montrer que l'inverse d'une matrice inversible à coefficients dans $\mathbb{Q}$ est à coefficients dans $\mathbb{Q}$.

Exercice : 41

$(*)$ Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

(a) Justifier que $\det A \in \mathbb{Z}$

(b) Montrer que l'inverse de A existe et est à coefficients entiers si et seulement si $\det A = \pm 1$

---

10. Musculation : Rang de la comatrice

Rappel : Le rang d'une matrice est la taille de la plus grande matrice extraite inversible.

Proposition : Rang de la comatrice :
- Si $\operatorname{rg} A = n$: $\operatorname{rg}\big(com(A)\big) = n$.
- Si $\operatorname{rg}(A) \leq n-2$: $\operatorname{rg}\big(com(A)\big) = 0$.
- Si $\operatorname{rg} A = n-1$: $\operatorname{rg}\big(com(A)\big) = 1$.

Preuve :
- $com(A)$ est inversible
- Les matrices associées aux cofacteurs ne peuvent être de rang $n-1$ et les cofacteurs sont donc nuls.
- $\rightarrow$ $A.com(A)^T = 0$ donc $\operatorname{Im}\big(com(A)^T\big) \subset \ker A$ de dimension 1.
  $\rightarrow$ Or $com(A)^T \neq 0$ car l'un des mineurs est non nul, donc $\operatorname{rg}\big(com(A)\big) = 1$.