Ce document présente les 3 cas usuels de trigonalisation d'une matrice de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{K})$.

EXEMPLE 1 : Matrice trigonalisable avec 2 valeurs propres

Trigonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$.

- Valeurs propres : On obtient par un calcul simple : $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$.

  Ce polynôme étant scindé, A est bien trigonalisable.

- Sous-espaces propres : On obtient par un calcul simple : $E_1(A) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $E_2(A) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

  La somme des dimensions des sep étant différente de 3, A n'est pas diagonalisable.

- Trigonalisation : Pour mieux comprendre, on introduit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associé à A :

$$\text{Mat}_e(u) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

  Il s'agit de trouver une base $f = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ telle que $\text{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

  ⋆ Les vecteurs propres définissant $E_1(A)$ et $E_2(A)$ s'imposent d'eux-même : $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_e$ et $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}_e$.

  ⋆ En prenant f_3 quelconque tel que $f = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, on obtient alors :

$$\text{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  On justifie le coefficient 2 obtenu en dernière colonne, par exemple par le fait que la trace doit valoir $\text{Tr}(A) = 5$, *ou par le fait que 2 est valeur propre d'ordre 2.*

  ⋆ On choisit donc par exemple $f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_e$.

  On obtient la trigonalisation de A en recherchant précisément cette matrice.
  Pour cela, on résout le système :

$$u(f_3) = bf_1 + cf_2 + 2f_3 \iff A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Après quelques calculs, on obtient : $u(f_3) = f_1 - 2f_2 + 2f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_e$.

- Conclusion :

  La matrice A est trigonalisable et :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Un théorème intitulé "Réduction de Jordan" montre qu'il est possible de choisir f_3 tel que $\text{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Vérifiez par le calcul que c'est effectivement le cas.

EXEMPLE 2 : Matrice trigonalisable avec 1 valeur propre λ et $\dim E_\lambda(A) = 2$

$$\text{Trigonaliser la matrice } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}).$$

- Valeurs propres : On obtient par un calcul simple : $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$.

  Ce polynôme étant scindé, A est bien trigonalisable.

- Sous-espaces propres : On obtient par un calcul simple : $E_1(A) = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

  La somme des dimensions des sep étant différente de 3, A n'est pas diagonalisable.

- Trigonalisation : On procède comme dans l'exemple précédent avec les notations précédentes.

  Il s'agit de trouver une base $f = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ telle que $\text{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  ⋆ Les vecteurs propres définissant $E_1(A)$ s'imposent d'eux-même : $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_e$ et $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}_e$.

  ⋆ En prenant f_3 quelconque tel que $f = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$, on obtient alors :

$$\text{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  On justifie le coefficient 1 *obtenu en dernière colonne, par exemple par le fait que la trace doit valoir* $\text{Tr}(A) = 3$*, ou par le fait que* 1 *est valeur propre d'ordre* 3.

  ⋆ On choisit donc par exemple $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_e$.

  On obtient la trigonalisation de A en recherchant précisément cette matrice.
  Pour cela, on résout le système :

$$u(f_3) = bf_1 + cf_2 + f_3 \iff A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Après quelques calculs, on obtient : $u(f_3) = 0.f_1 + f_2 + f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_e$.

- Conclusion :

  La matrice A est trigonalisable et :

$$\boxed{A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

  La matrice obtenue est ici celle prédite par le théorème de "Réduction de Jordan".

EXEMPLE 3 : Matrice trigonalisable avec 1 valeur propre associée à un sep de dimension 1

$$\text{Trigonaliser la matrice } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R}).$$

- Valeurs propres : On obtient par un calcul simple : $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^3$.

  Ce polynôme étant scindé, A est bien trigonalisable.

- Sous-espaces propres : On obtient par un calcul simple : $E_1(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

  La somme des dimensions sep étant différente de 3, A n'est pas diagonalisable.

- Trigonalisation : On procède comme dans l'exemple précédent avec les notations précédentes.

  Il s'agit de trouver une base $f = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ telle que $\mathrm{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  ⋆ On prendra bien sûr $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e$.

  ⋆ On cherche alors f_2 et f_3 tels que $f = (f_1,\ f_2,\ f_3)$ forme une base de $\mathbb{R}^3$ et :

  $$\mathrm{Mat}_f(u) = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  On justifie les trois coefficient 1 sur la diagonale par le fait que 1 est valeur propre d'ordre 3.

  ⋆ Ici, nous ne pouvons pas choisir ces deux vecteurs arbitrairement !
  La réduction de Jordan nous permet cependant d'affirmer qu'il est possible d'imposer $\begin{cases} a = c = 1 \\ b = 0 \end{cases}$.

  On est donc amené à résoudre le système paramètré : $\begin{cases} u(f_2) = af_1 + f_2 \ (1) \\ u(f_3) = bf_1 + cf_2 + f_3 \ (2) \end{cases}$.

  On a alors :

  $$(1) \iff u(f_2) = af_1 + f_2 \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \cdots \iff \exists \mu \in \mathbb{R},\ f_2 = \begin{pmatrix} \mu \\ a \\ \mu \end{pmatrix}_e.$$

  $$(2) \iff u(f_3) = bf_1 + cf_2 + f_3 \iff A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} \mu \\ a \\ \mu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \exists \lambda \in \mathbb{K},\ f_3 = \begin{pmatrix} b - ca + c\mu \\ \lambda - ca \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

  On choisit alors les paramètres a, b, c, μ et λ de façon à ce que la famille $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ forme bien une base de $\mathbb{R}^3$.

  En prenant $\begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$ et $\begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$, on obtient : $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_e$ et $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e$.

  On vérifie que la famille $(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_e, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_e)$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

- Conclusion :

  La matrice A est trigonalisable et :

  $$A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$$

On peut vérifier notre résultat par le calcul en s'assurant que l'on a bien $AP = P \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.