SYNTHESE : Les Espaces Vectoriels Normés (introduction)

I] Les Normes usuelles

L'espace vectoriel E	Normes Usuelles sur E
$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$	$\lvert . \rvert$ (valeur absolue sur $\mathbb{R}$ et module sur $\mathbb{C}$)
$\mathbb{K}^n$	$\\|(x_1,\ \dots,\ x_n\\|_1 = \sum_{k=1}^{n} \lvert x_k \rvert$ $\\|(x_1,\ \dots,\ x_n\\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \lvert x_k \rvert^2}$ (Norme euclidienne si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) $\\|(x_1,\ \dots,\ x_n\\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n} \lvert x_k \rvert$
$\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$	$\\|A\\|_2 = \sqrt{\text{Tr}(A^T A)} = \sqrt{\sum_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p} a_{i,j}^2}$ (Norme euclidienne)
$\mathbb{K}[X]$	$\\|P\\|_1 = \int_a^b \lvert P(t) \rvert\ \text{d}t$ $\\|P\\|_2 = \sqrt{\int_a^b \lvert P(t) \rvert^2\ \text{d}t}$ (Norme euclidienne si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) $\\|f\\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \lvert P(t) \rvert$
$\mathcal{B}(A,\ E)$ avec $(E, \\|.\\|)$ un evn	$\\|f\\|_\infty = \sup_{t\in A} \\|f(t)\\|$
$\mathcal{C}([a,b],\ \mathbb{K})$	$\\|f\\|_1 = \int_a^b \lvert f(t) \rvert\ \text{d}t$ $\\|f\\|_2 = \sqrt{\int_a^b \lvert f(t) \rvert^2\ \text{d}t}$ (Norme euclidienne si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$) $\\|f\\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} \lvert f(t) \rvert$
Suites bornées de $E^{\mathbb{N}}$ avec $(E, \\|.\\|)$ un evn	$\\|(u_n)\\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \\|u_n\\|$
E de dimension finie	On définit une norme $\\|.\\|_{e,N}$ à partir $\begin{cases} \text{d'une base } e \text{ de } E \\ \text{d'une norme } N \text{ de } \mathbb{K}^n \end{cases}$ (cf cours)
Espace produit $E_1 \times \dots \times E_p$	$\\|(x_1,\ \dots,\ x_n\\| = \sup_{1\leq k\leq n} \\|x_k\\|_k$

Dans une $\mathbb{K}$-algèbre, une norme $\|.\|$ qui vérifie $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$ est dîte « sous-multiplicative ».

Savoir prouver que :

- Les normes infinies sont des normes sous-mutiplicatives : $\|fg\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_\infty$
- La norme $\|.\|_2$ sur $\mathbb{K}^n$ et sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont sous-multiplicatives : $\|AB\|_2 \leq \|A\|_2\|B\|_2$

II] Les Méthodes usuelles

Pour montrer que N est une norme

- Avec la définition ♡ : positivité, séparation, homogénéïté, inégalité triangulaire
- Avec un produit scalaire : si on pense que N est une norme euclidienne $N(x) = \sqrt{\langle x, x\rangle}$.

Majoration et Minoration d'une borne Sup

Méthodes utilisées dans la manipulation des normes $\|.\|_\infty$.

- Majoration : Pour montrer que $\sup \Delta \leq M$

  On montre que pour tout $x \in \Delta$, on a $x \leq M$ et on fait un « passage au Sup ».

- Minoration : Pour montrer que $m \leq \sup \Delta$

  On montre simplement qu'il existe un $x_0 \in \Delta$, on a $m \leq x_0$

Pour montrer que $x = 0$

Dans un EVN, on montre souvent que $x = 0$ en prouvant que $\|x\| = 0$.

III] Comparaison des normes

Domination et équivalence

- Pour montrer que N_2 est dominée par N_1

  → On introduit $x \in E$.
  → On majore $N_2(x) \leq \cdots \leq \alpha N_1(x)$

- Pour montrer que N_1 et N_2 sont équivalentes

  → En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes
  → Sinon, on montre que N_1 est dominée par N_2 puis que N_2 est dominée par N_1.

La bornitude, la convergence, l'existence de limite et la continuité sont des propriétés invariantes par passage à une norme équivalente.

Non-domination et Non-équivalence

- Pour montrer que N_2 **n'est pas dominée par** N_1

  → On recherche une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que : $\dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \to +\infty.$

- Pour montrer que N_1 et N_2 **ne sont pas équivalentes**

  → On recherche une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que : $\dfrac{N_2(x_n)}{N_1(x_n)} \to +\infty$ ou 0

  → On peut également remarquer qu'une propriété conservée par des normes équivalentes ne l'est pas par passage de N_1 à N_2 (bornitude, convergence...)

Exemples :

- En dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.
  Les propriétés de bornitudes, convergence, limite et continuité sont donc indépendantes de la norme choisie.

- Sur $\mathcal{C}([a,b],\ \mathbb{K})$, en notant $\ll$ la propriété " est dominée par ", nous avons : $\|.\|_1 \ll \|.\|_2 \ll \|.\|_\infty$

IV] Suites et Séries vectorielles

La notion de convergence d'une suite ou d'une série dépend de la norme choisie sauf en dimesion finie ou dans le cas de 2 normes équivalentes.

Pour montrer que $(x_n) \to l \in E$ pour une norme $\|.\|$

- Avec la définition : On montre que : $\|x_n - l\| \to 0_E$

- Avec les suites coordonnées : (En dimension finie seulement !)

  On montre que les suites coordonnées (dans une base e choisie) convergent

Pour montrer la CVG de $\sum u_n$

- En étudiant la CVG de (S_n) : Assez rare

- En dimension finie seulement : ♡

  → Méthode 1 : On montre que les séries coordonnées (dans une base e choisie) convergent

  → Méthode 2 : On montre la CVA