

SYNTHESE : Etude de la nature d'une série numérique

Exemples

Rappels :

- Sauf dans le cas d'une comparaison à deux intégrales ou dans le cas de méthodes alternatives (regroupement des termes 2 par 2...), on n'étudie pas la somme partielle S_n pour déterminer la nature d'une série.
- Bien connaître l'organigramme d'étude vu en cours.
- La première chose à faire est de déterminer un équivalent du terme général. Celui-ci permet de savoir si la série diverge grossièrement et si c'est une SATP. Dans ce cas, on étudie la série de l'équivalent.
- La série de l'équivalent s'étudie alors souvent par comparaison au terme général d'une série de riemann.
- Lorsque cette comparaison n'aboutit pas, on peut envisager d'utiliser le critère de d'Alembert ou de comparer la somme partielle S_n à deux intégrales.
- Pour les séries dont le terme général change de signe, on peut envisager :
 - de vérifier si la série converge absolument (avec éventuellement le critère de d'Alembert)
 - de vérifier si le CSSA s'applique
 - de déterminer un développement asymptotique du terme général
 - d'appliquer une transformation d'Abel (HP)
 - de regrouper les termes 2 par 2.

1. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}}$.



Equivalent + Riemann

Nous avons $\frac{\sqrt{n}}{n^2 + \sqrt{n}} \sim \frac{1}{n^{3/2}} > 0$ avec $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^{3/2}}$ qui converge donc la série converge.

2. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$.



Equivalent

Cette série est grossièrement divergente puisque $n \sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim n \cdot \frac{1}{n} = 1 \rightarrow 1 \neq 0$

3. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln(n^n)}{n!}$.



D'Alembert

Nous avons $u_n = \frac{\ln(n^n)}{n!} = \frac{\ln(n)}{(n-1)!}$ et nous constatons alors facilement que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \rightarrow 0 < 1$.
La série converge donc d'après le critère de d'Alembert.

4. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} n e^{-\sqrt{n}}$.

**Comparaison à une série de Riemann**

Cette série semble converger car $ne^{-\sqrt{n}} = \frac{n}{e^{\sqrt{n}}}$ tend rapidement vers 0.
 On montre alors très facilement que $ne^{-\sqrt{n}} = o(\frac{1}{n^2})$

5. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)}$.

**Equivalent + Riemann**

Nous avons $\frac{\ln n}{\ln(e^n - 1)} \sim \frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n} > 0$ avec $\sum \frac{1}{n}$ qui diverge.
 La série diverge donc d'après le théorème de comparaison.

6. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \arctan(n+2) - \arctan(n)$.

**Equivalent avec le TAF**

On cherche un équivalent avec le TAF.

la fonction $\arctan$ étant dérivable sur $[n, n+2]$ pour tout $n \geq 1$ avec $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, il existe $c_n \in]n, n+2[$ tel que :

$$0 \leq \arctan(n+2) - \arctan(n) = 2f'(c_n) = \frac{2}{1+c_n^2} \leq \frac{2}{1+n^2} \sim \frac{2}{n^2} > 0$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors la série étudiée converge.

On pouvait également que la série était télescopique de la forme $\sum u_{n+1} - u_n$ avec $u_n = \arctan(n+1) + \arctan(n)$.

7. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} u_n$ où $\begin{cases} u_n = \frac{1}{n} \text{ lorsque } n \text{ est un carré} \\ u_n = 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

**Somme partielle**

Avec les sommes partielles. Remarquons que

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{n^2}$$

Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ converge et donc la suite extraite $S_{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}$ converge également.

8. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{e^n n!}{n^n}$.

(a) Avec la formule de Stirling.

**Equivalent avec Stirling**

Nous avons $\frac{e^n n!}{n^n} \sim \frac{e^n}{n^n} \cdot \frac{n^n}{e^n} \sqrt{2\pi n} \sim \sqrt{2\pi n} \rightarrow +\infty$.
 La série diverge donc grossièrement.

(b) En prouvant que la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$ est croissante.



Divergence grossière par étude du sens de variation

Comme le terme général $u_n = \frac{e^n n!}{n^n}$ est strictement positif, on peut étudier la limite du rapport :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \dots = \frac{e}{(1 + \frac{1}{n})^n} = \frac{e}{e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})}}$$

Or, nous avons que pour tout $x \geq 0$ nous avons $\ln(1+x) \leq x$ et donc $0 < e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} \leq e$.

Ainsi, nous avons $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ et la suite (u_n) est donc croissante.

Comme $u_1 = e$, alors (u_n) ne peut pas tendre vers 0 et la série diverge donc grossièrement.

9. Déterminer, sans utiliser le CSSA, la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$.

Aide : vous pourrez commencer par étudier la série $\sum v_n$ où $v_n = u_{2n+1} + u_{2n}$



Regroupement des termes 2 par 2

- On montre facilement que $v_n = O(\frac{1}{n^2})$ et donc que $\sum v_n$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$
- On note S_n la somme partielle de $\sum u_n$.

- On a $S_{2n} = \sum_{k=0}^n v_k \rightarrow l$

- On a $S_{2n+1} = \sum_{k=0}^n v_k - \frac{1}{2n+1} \rightarrow l$

- Ces deux suites convergeant vers la même limite, on en déduit que S_n converge et donc que la série est convergente.

10. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.



CSSA

Le terme général $\frac{(-1)^n \ln n}{n}$ est alterné.

De plus, la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ est positive, décroissante à partir de $x = e$ (à prouver correctement !) et tend vers 0 en $+\infty$.

La série vérifie donc le CSSA et elle converge donc.

11. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \ln n}$.



Comparaison à une intégrale

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x \ln x}$ est clairement positive, décroissante sur $]1, +\infty[$.

La série est donc de même nature que la suite de terme général $u_n = \int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx$.

Or, nous avons :

$$u_n = \int_2^n \frac{1}{x \ln x} dx = [\ln(\ln x)]_2^n = \ln(\ln n) - \ln(\ln 2) \rightarrow +\infty$$

Par conséquent, la série diverge.

12. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \int_0^1 t^n \cdot \sin(t) dt$.



Absolute CVG et comparaison à une série de Riemann

On vérifie très facilement que $\left| \frac{1}{n} \int_0^1 t^n \cdot \sin(t) \, dt \right| \leq \frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2} > 0$.
La série est donc absolument convergente et elle converge donc.

13. Déterminer la nature de $\sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$.



Développement asymptotique

On remarque que $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ qui change de signe... L'équivalent ne permet donc pas de conclure.

La CSSA ne marche pas car il est très difficile de montrer que (u_n) est décroissante.

On effectue alors un développement asymptotique :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

Or, les séries $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $\sum O\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ convergent tandis que $\sum \frac{1}{n}$ diverge.

Par conséquent, la série diverge.

On pouvait également transformer u_n en multipliant par la quantité conjuguée... On se ramenait alors à la somme de 2 séries, l'une qui converge et l'autre qui diverge.