SYNTHESE : $\left\{\begin{array}{l}\text{Suites}\\ \text{Séries}\end{array}\right.$ de fonctions : Convergence et propriétés des $\left\{\begin{array}{l}\text{limites}\\ \text{sommes}\end{array}\right.$

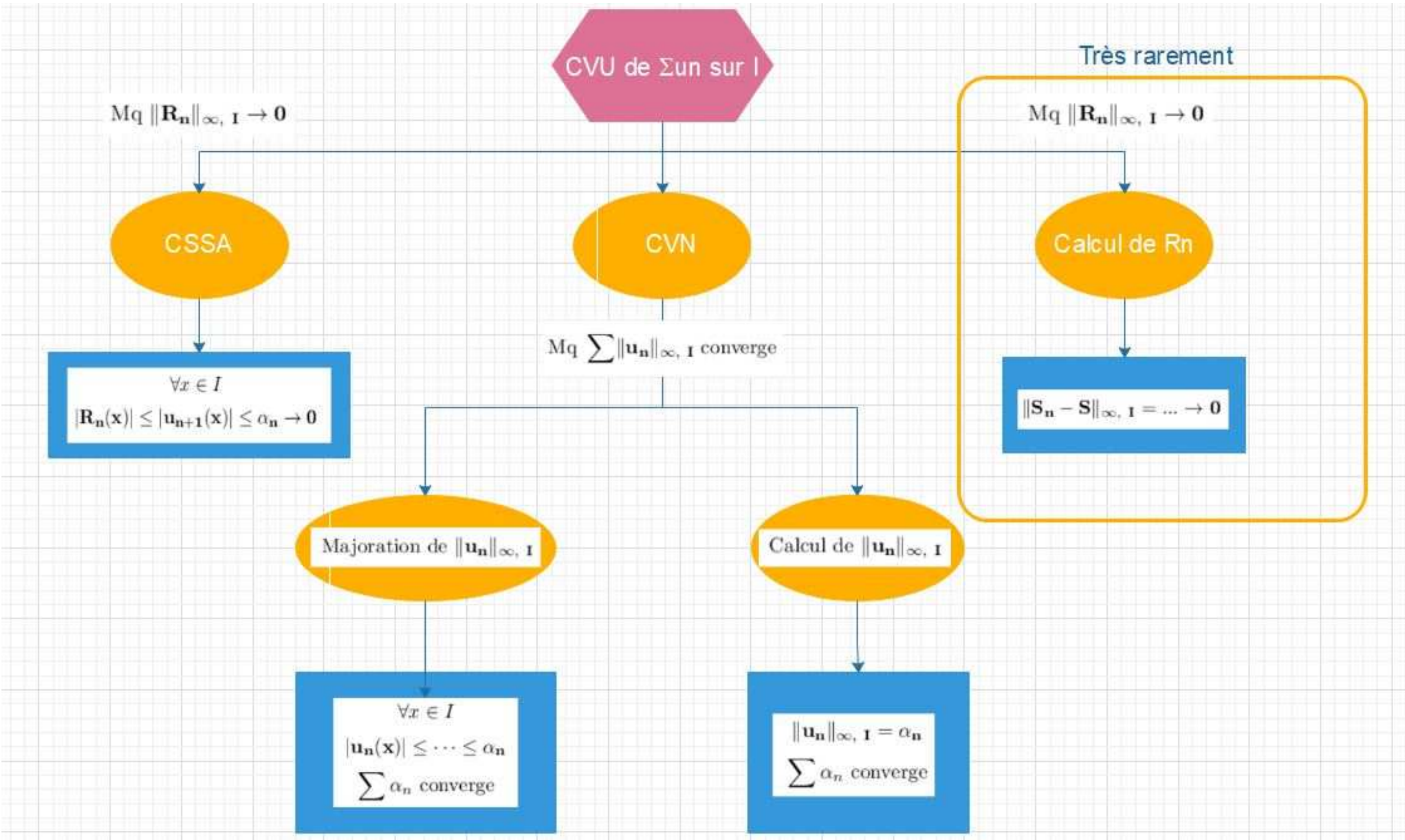
I] Les différents modes de convergence

CVS	Suites de fonctions (u_n) sur I	Séries de fonctions $\sum u_n$ sur I
	Montrer la convergence simple : • On montre que la suite $(u_n(x))_n$ converge pour tout $x \in I$. Montrer la non-convergence simple : • On montre que la suite $(u_n(x))_n$ diverge pour un $x \in I$.	Montrer la convergence simple : • On montre que la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in I$. Montrer la non-convergence simple : • On montre que la série $\sum u_n(x)$ diverge pour un $x \in I$

CVU	Suites de fonctions (u_n) sur I	Séries de fonctions $\sum u_n$ sur I
	Définition : $(u_n) \overset{CVU}{\underset{I}{\to}} u \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} u_n - u \text{ bornée APCR} \\ \Vert u_n - u\Vert_{\infty,I} \to 0\end{array}\right.$ Montrer la convergence uniforme : • Par calcul de $\Vert u_n - u\Vert_{\infty,I}$ en étudiant les variations de $u_n - u$ sur I. • Par majoration de $\Vert u_n - u\Vert_{\infty,I}$: $\forall x \in I,\ \vert u_n(x) - u(x)\vert \leq \alpha_n \to 0$ Montrer la non-convergence uniforme : • Par calcul de $\Vert u_n - u\Vert_{\infty,I}$. • En montrant que $u_n - u$ n'est pas bornée. • ♡ On recherche une suite $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n(x_n) - u(x_n) \not\to 0$. • En montrant qu'une des propriétés de u impliquées par la CVU n'est pas vérifiée. (Bornitude, continuité, limite aux bornes)	Définition : $\sum u_n \overset{CVU}{\underset{I}{\to}} S \Longleftrightarrow (S_n) \overset{CVU}{\underset{I}{\to}} S$. Montrer la convergence uniforme : • Par majoration du reste pour les séries vérifiant le CSSA : $\forall x \in I,\ \vert R_n(x)\vert \leq \vert u_{n+1}(x)\vert \leq \alpha_n \to 0$. • En montrant la convergence normale. Montrer la non-convergence uniforme : • On peut montrer que (u_n) ne converge pas uniformément vers $\tilde{0}$. ♡ Pour cela : On cherche $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ tq $u_n(x_n) \not\to 0$. • On montre qu'une des propriétés de S impliquées par la CVU n'est pas vérifiée. (Surtout la limite aux bornes)

CVN	Suites de fonctions (u_n) sur I	Séries de fonctions $\sum u_n$ sur I
	Pas de CVN pour les suites de fonctions !	<u>Définition</u> : $\sum u_n \underset{I}{\overset{CVN}{\rightarrow}} S \iff \sum \|u_n\|_{\infty,I}$ converge. <u>Montrer la convergence normale</u> : • En calculant $\|u_n\|_{\infty,I}$ avec les $\Delta°$ de u_n sur I • En majorant $\forall x \in I,\ \|u_n(x)\| \leq \alpha_n \to 0$. <u>Montrer la non-convergence normale</u> : • En calculant $\|u_n\|_{\infty,I}$ pour montrer que $\sum \|u_n\|_{\infty,I}$ diverge. • En recherchant $(x_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum \|u_n(x_n)\|$ diverge.

Méthodes pour prouver la convergence uniforme d'une série



II] Propriétés transférables par CVU

- Bornitude :

$\to$ Si $(u_n) \underset{I}{\overset{CVU}{\to}} u$ alors : $\quad u_n$ bornées $\Rightarrow u$ bornée.

$\to$ Si $\sum u_n \underset{I}{\overset{CVU}{\to}} S$ alors : $\quad S_n$ bornées $\Rightarrow S$ bornée.

- Continuité :

$\to$ Si $(u_n) \underset{\forall [a,b]\subset I}{\overset{CVU}{\to}} u$ alors : $\quad u_n$ continues sur $I \Rightarrow u$ continue sur I.

$\to$ Si $\sum u_n \underset{\forall [a,b]\subset I}{\overset{CVU}{\to}} S$ alors : $\quad u_n$ continues sur $I \Rightarrow S$ continue sur I.

- Limite aux bornes : soit $a \in \bar{I}$

$\to$ Si $(u_n) \underset{I}{\overset{CVU}{\to}} u$ alors : $\quad u_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_n \in \mathbb{K} \Rightarrow \begin{cases} (l_n) \text{ converge vers } l \in \mathbb{K} \\ u(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l \end{cases}$.

$\to$ Si $\sum u_n \underset{I}{\overset{CVU}{\to}} S$ alors : $\quad u_n(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l_n \in \mathbb{K} \Rightarrow \begin{cases} \sum l_n \text{ converge vers } s \in \mathbb{K} \\ S(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} s \end{cases}$.

- Intégrales : Passage à la limite dns $\int_a^b \dots$ ou échange des signes $\sum \leftrightarrow \int$:

$\to$ Si $(u_n) \underset{I}{\overset{CVU}{\to}} u$ alors : $\quad u_n$ continues sur $[a,\ b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b u_n \to \int_a^b u.$

$\to$ Si $\sum u_n \underset{I}{\overset{CVU}{\to}} S$ alors : $\quad u_n$ continues sur $[a,\ b] \Rightarrow \displaystyle\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n.$

- Dérivation simple :

$$\to \begin{cases} u_n \text{ sont } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ (u_n) \text{ CVS vers } u \\ (u_n') \text{ CVU sur tout SEGMENT de } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (u_n) \text{ CVU sur tout segment de } I \\ \text{la limite } u \text{ de } (u_n) \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ u_n' \to u' \end{cases}.$$

$$\to \begin{cases} u_n \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ \sum u_n \text{ CVS vers } S \\ \sum u_n' \text{ CVU sur tout SEGMENT de } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum u_n \text{ CVU sur tout segment de } I \\ \text{la somme } S \text{ de } \sum u_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } I \\ S'(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x) \end{cases}.$$

- Dérivation multiple :

$$\to \begin{cases} \text{les } u_n \text{ sont } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \text{les suites } (u_n),\ (u_n'),\ \dots\ (u_n^{(p-1)}) \text{ CVS sur } I \\ (u_n^{(p)}) \text{ CVU sur tout segment de } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{la limite } u \text{ de } (u_n) \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \text{pour tout } k \in [\![1,p]\!],\ u_n^{(k)} \to u^{(k)} \end{cases}.$$

$$\to \begin{cases} \text{les } u_n \text{ sont } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \text{les séries } \sum u_n,\ \sum u_n',\ \dots\ \sum u_n^{(p-1)} \text{ CVS sur } I \\ \sum u_n^{(p)} \text{ CVU sur tout segment de } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{la somme } S \text{ de } \sum u_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^p \text{ sur } I \\ \text{pour tout } k \in [\![1,p]\!],\ S^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x) \end{cases}.$$

Le théorème ci-dessus est en général utilisé pour montrer que u et S sont $\mathcal{C}^2$.
Pour montrer que u et S sont $\mathcal{C}^\infty$, on utilise le théorème suivant qui est plus simple.

$\rightarrow \begin{cases} \text{les } u_n \text{ sont } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\ \forall k,\ (u_n^{(k)}) \text{ CVU sur tout SEGMENT de } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{la limite } u \text{ de } (u_n) \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\ \text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ u_n^{(k)} \to u^{(k)} \end{cases}.$

$\rightarrow \begin{cases} \text{les } u_n \text{ sont } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\ \forall k,\ \sum u_n^{(k)} \text{ CVU sur tout SEGMENT de } I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{la somme } S \text{ de } \sum u_n \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } I \\ \text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ S^{(k)}(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n^{(k)}(x) \end{cases}.$

III] Deux méthodes de recherche d'un équivalent

Soit $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ pour $x \in I$ et $a \in \bar{I}$ tels que $S(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ ou $\pm\infty$

<u>But</u> : On souhaite déterminer un équivalent de $S(x)$ au voisinage de a.

<u>Méthode 1</u> : Encadrements par des intégrales

Lorsque pour $x \in I$ fixé, la fonction $t \mapsto u_t(x)$ est $\begin{cases} \text{continue par morceaux} \\ \text{décroissante} \end{cases}$ sur I, on peut encadrer :

$$\int_{n_0}^{N+1} u_t(x)\ \mathrm{d}t \leq \sum_{n=n_0}^{N} u_n(x) \leq \int_{n_0-1}^{N} u_t(x)\ \mathrm{d}t$$

En calculant les deux intégrales et en faisant $N \to +\infty$, on obtient un encadrement de $S(x)$ par $I(x)$ et $J(x)$.
On a alors :

$$\begin{cases} I(x) \sim \alpha(x) \\ J(x) \sim \alpha(x) \end{cases} \Rightarrow S(x) \sim \alpha(x) \quad \text{au voisinage de } a$$

<u>Exemple</u> : Trouver un équivalent en 1^+ de $\zeta(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

<u>Méthode 2</u> : Equivalent $\alpha(x)$ donné par l'énoncé ou trouvé par intuition

Il s'agit alors de vérifier que $S(x) \underset{a}{\sim} \alpha(x)$, c'est à dire que :

$$\frac{S(x)}{\alpha(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$$

Pour cela, on peut prouver cette limite en utilisant le théorème de limite aux bornes par CVU.

Il arrive souvent (mais pas toujours !!) que $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ soit équivalent à son premier terme $u_0(x)$.

<u>Exemple</u> : Trouver un équivalent en 1^+ de $\zeta(x) - 1 = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.