

SYNTHESE : Réduction Géométrique $\left\{ \begin{array}{l} \text{des matrices} \\ \text{des endomorphismes} \end{array} \right.$

I] Quelques situations "évidentes"

Matrices	Particularité	Déduction
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	C'est une matrice réelle de taille impaire.	A admet donc une valeur propre réelle.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$	Les sommes des coefficients de chaque ligne sont égales	$1 + 2 + 3 = 6$ est valeur propre et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$	Le rang vaut 1	0 est valeur propre, $\dim E_0(A) = 2$, la deuxième valeur propre vaut $\text{Tr}(A) = 6$ et A est diagonalisable.
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$	C'est une matrice triangulaire avec les coefficients diagonaux égaux.	A admet 3 pour seule valeur propre. Comme $A \neq 3I_3$ alors A n'est pas diagonalisable.
$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	C'est une matrice triangulaire avec les coefficients diagonaux distincts deux à deux.	A admet 3 valeurs propres distinctes 3, 1 et 2 et donc A est diagonalisable.
$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	C'est une matrice symétrique réelle.	A est donc diagonalisable.
$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$	C'est une matrice non inversible.	0 est donc valeur propre de A .
$A = \begin{pmatrix} i & -2+i & 3 \\ 0 & 1-i & 1 \\ -2i & 3 & 2+i \end{pmatrix}$	C'est une matrice complexe.	A est donc trigonalisable.
$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	Le polynôme caractéristique est non scindé.	A n'est donc pas diagonalisable dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$

Matrices	Particularité	Déduction
$A^2 - 2A + 3I_n = 0$	A annule un polynôme scindé à racines simples	A est donc diagonalisable.
$A(A - 2I_n)^2 = 0$	A annule un polynôme scindé	A est donc trigonalisable.
$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & x_1 & x_2 \\ 0 & 2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & x_5 & x_6 \\ 0 & 0 & x_7 & x_8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ est non diagonalisable	A n'est donc pas diagonalisable

II] Les méthodes usuelles

- Rechercher les éléments propres d'un endomorphisme en dimension infinie :

On résout l'équation aux éléments propres $u(x) = \lambda x$ d'inconnue x et on trouve $E_\lambda(u)$:
Souvent par analyse/synthèse.

- Si $E_\lambda(u) = \{0\}$ alors λ n'est pas une valeur propre.
- Si $E_\lambda(u) \neq \{0\}$ alors λ est une valeur propre et $E_\lambda(u)$ est son sev propre associé.

- Rechercher les valeurs propres et les sous-espaces propres d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$:

- On détermine le polynôme caractéristique $\chi_A(\lambda)$
- Les valeurs propres de A sont alors ses racines.
- On trouve alors les sep $E_\lambda(A)$ en résolvant $AX = \lambda X$.

On peut aller plus vite dans certains cas :

- ★ Si la somme des coefficients de chaque ligne vaut α , alors α est valeur propre associée au vecteur $(1, \dots, 1)$.
- ★ Si la somme des coefficients de chaque colonne vaut α , alors α est valeur propre.
- ★ Si la matrice A est de rang $p < n$ alors 0 est valeur propre avec $\dim E_0(A) = n - p$.
- ★ S'il existe α tel que $\text{rg}(A - \alpha I_n) = p < n$ alors α est valeur propre avec $\dim E_\alpha(A) = n - p$.
- ★ Si la matrice A est nilpotente alors $\text{Sp}(A) = \{0\}$
- ★ Si on connaît un polynôme annulateur de A . (cf chapitre sur la réduction algébrique).

- Savoir si une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable :

On détermine les valeurs propres de la matrice A .

- Si χ_A n'est pas scindé, alors A n'est pas diagonalisable.
- Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.
- Sinon, on détermine les sev propres des valeurs propres multiples et on regarde :
 - ★ si leur dimension est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre.
 - ou
 - ★ si la somme de leur dimension vaut n

On peut aller plus vite dans certains cas :

- ★ si A est symétrique réelle alors A est diagonalisable. (cf chapitre en fin d'année).
- ★ si A annule un polynôme scindé à racines simples alors A est diagonalisable. (cf la réduction algébrique).

• Diagonaliser une matrice A :

→ On recherche ses éléments propres :

- ★ En déterminant les valeurs propres λ
- ★ En résolvant $AX = \lambda X$ pour chacune des valeurs propres λ .
On obtient ainsi une base $\mathcal{B}_\lambda$ de $E_\lambda(A)$.

→ On obtient la matrice inversible P telle que $D = P^{-1}AP$ en concaténant les bases $\mathcal{B}_\lambda$ obtenues.

Pour diagonaliser un endomorphisme u en dimension finie, on procèdera à la diagonalisation de sa matrice dans une base e . En exprimant les bases des sev propres obtenus dans e , on obtient directement une base de diagonalisation de u .

• Savoir si une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable :

→ Si χ_A est scindé, alors A est trigonalisable.

→ En particulier, toute matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

→ Plus généralement, si A annule un polynôme scindé alors A est trigonalisable. (cf réduction algébrique)

III] Applications usuelles de la diagonalisation

De façon générale, on pensera à diagonaliser les matrices étudiées pour simplifier le problème posé.
Si la matrice n'est pas diagonalisable, on envisagera alors une trigonalisation.

Plus particulièrement, on pensera à diagonaliser dans tous les cas suivants :

- Pour calculer A^n .
L'étude de suites récurrences linéaires imbriquées se ramène à cette situation.
- Pour étudier le commutant d'une matrice. $MA = AM$
La résolution d'équations matricielles polynômiales se ramène en général à cette situation.
- Pour résoudre des équations matricielles polynômiales. $M^2 + M = A$
- Pour calculer l'exponentielle d'une matrice. $\exp(A)$
- Pour résoudre un système différentiel linéaire.
- Pour rechercher les sev stables par un endomorphisme.

IV] Endomorphismes et Matrices nilpotentes

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Lorsque u et A sont nilpotentes, on a :

- $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(A) = \{0\}$
- $\chi_u(X) = \chi_A(X) = X^n$
- $u^n = \tilde{0}$ et $A^n = 0_n$.

Retenir les caractérisations :

- u est nilpotent $\iff$ Il existe une base e dans laquelle $\text{Mat}_e u = \begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.

- A est nilpotente $\iff A$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \\ & \ddots & * & * \\ & & \ddots & * \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix}$.