SYNTHESE : Intégration sur un intervalle quelconque

I] Les méthodes

1. **Pour montrer la convergence d'une intégrale sur I**

⚠ On commence toujours par vérifier que f est C_m sur I.

Il s'agit de montrer que $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en b^- (lorsque $I = [a,\ b[$).

M1 : Classiquement :
- → En recherchant un équivalent $f(t) \sim \alpha(t)$ de signe constant au voisinage de b^-
- → Avec une primitive connue : $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = F(x) - F(a)$.
- → Par comparaison : $0 \leq f \leq g$

M2 : Par transformation :
- → On effectue un changement de variable C^1 et strictement monotone.
  La nouvelle intégrale obtenue a la même nature que la première.
- → On effectue une IPP.
  en commençant par vérifier la CVG du terme $u(t)v(t)$ en a^- et b^+.

M3 : En montrant que f est intégrable sur I.

Remarque : Lorsque $I =]a,\ b[$, on étudie séparément la convergence au $\mathcal{V}(a^+)$ et au $\mathcal{V}(b^-)$.

2. **Pour étudier l'intégrabilité d'une fonction sur I**

Il s'agit de vérifier si $\int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.
Pour cela, on peut :

- Pour la convergence ou la divergence :
  - → Rechercher un équivalent $\alpha(t)$ de $|f(t)|$ au voisinage des bornes à problème.
    Puis étudier l'intégrabilité de α au voisinage de ces bornes.
  - → Utiliser le théorème de comparaison : $|f(t)| \leq g(t)$ pour la CVG ou $0 \leq g(t) \leq |f(t)|$ pour la DIV.
- Pour la convergence uniquement :

  Montrer que $\begin{cases} f(t) = O(\alpha(t)) \\ \text{ ou que } \\ f(t) = o(\alpha(t)) \end{cases}$ avec α intégrable au voisinage des bornes à problème.

3. **Pour calculer une intégrale généralisée**

M1 : On calcule $\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t = F(b^-) - F(a^+)$ à l'aide d'une primitive F de f sur $[a,\ b[$.

M2 : On effectue un changement de variable C^1 et strictement monotone.
Les 2 intégrales obtenues sont alors de même nature.

M3 : On effectue une IPP en commençant par vérifier la CVG du terme $u(t)v(t)$ en a^- et b^+.

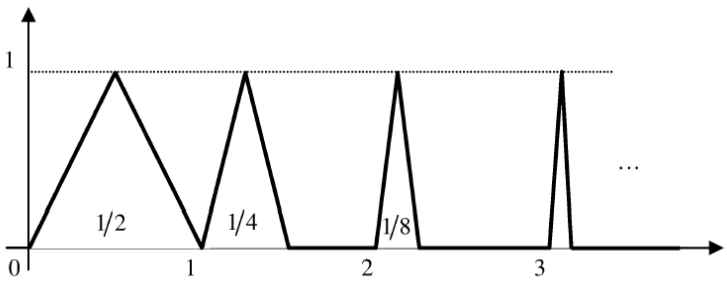
II] Les fonctions de référence

- En $+\infty$: $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha > 1$.
- En 0 : $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha < 1$.
- En a : $\int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{(t-a)^\alpha}$ converge $\iff$ $\alpha < 1$.
- En $+\infty$: La fonction $t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 0$.
- En 0^+ : La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable au voisinage de 0^+.

III] 3 pièges à éviter !

- ⚠ **au terme "intégrable"** : Lorsque $\int_I |f|$ converge on dit que $\begin{cases} f \text{ est intégrable sur } I \\ \text{ou} \\ \text{l'intégrale } \int_I f \text{ est absolument convergente} \end{cases}$.
- ⚠ **à la limite en $+\infty$** : $\int_a^{+\infty} f$ converge $\not\Rightarrow$ $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$

La propriété "$\sum u_n$ converge $\Rightarrow u_n \to 0$" ne se transfert donc pas aux intégrales généralisées.



- ⚠ **bien déconnecter les bornes** : dans l'étude de convergence ou le calcul de $\int_{]a,\ b[} f$.

En pratique, lorsque F est une primitive de f sur $]a,\ b[$:
→ on calcule $\int_x^y f(t)\,\mathrm{d}t = F(y) - F(x)$
→ on fait alors tendre $x \to a^+$ puis $y \to b^-$.
- Si l'une des limites n'existe pas, c'est que l'intégrale diverge
- Si les deux limites existent, le résultat donne la valeur de l'intégrale.