ANALOGIES : Séries Numériques $\longleftrightarrow$ Intégrales Impropres

Dans ce qui suit :

- les suites (u_n) et (α_n) sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- les fonctions f et α sont C_m sur I ou sur $[a,\ b[$ ou sur $[a,\ +\infty[$.

I] Les définitions

	Séries Numériques		Intégrale Impropres
Série / Intégrale	$\sum u_n$	$\longleftrightarrow$	$\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$
Somme partielle	$\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$	$\longleftrightarrow$	$\displaystyle S(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$
Convergence	$S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S \in \mathbb{K}$	$\longleftrightarrow$	$S(x) \xrightarrow[x\to b-]{} S \in \mathbb{K}$
Somme	$\displaystyle S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$	$\longleftrightarrow$	$\displaystyle S = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$
Reste partiel	$\displaystyle R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$	$\longleftrightarrow$	$\displaystyle R(x) = \int_x^b f(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b^-]{} 0$
Conv. Absolue	$\sum u_n$ conv. absol^t $\Longleftrightarrow \sum \lvert u_n\rvert$ converge	$\longleftrightarrow$	f intégrable sur $I \Longleftrightarrow \displaystyle\int_I \lvert f\rvert$ converge
Sommes compl.	$\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\sum \mathrm{Re}(u_n)\\ \sum \mathrm{Im}(u_n)\end{array}\right.$ convergent	$\longleftrightarrow$	$\displaystyle\int_I f$ converge $\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\displaystyle\int_I \mathrm{Re}(f)\\ \displaystyle\int_I \mathrm{Im}(f)\end{array}\right.$ convergent
	$\sum u_n$ converge $\Longleftrightarrow \sum \overline{u_n}$ converge	$\longleftrightarrow$	$\displaystyle\int_I f$ converge $\Longleftrightarrow \displaystyle\int_I \bar{f}$ converge

II] Les propriétés

Ici, toutes les séries et toutes les intégrales sont convergentes.

	Séries Numériques		Intégrale Impropres
Chasles	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0} u_n + \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} u_n$	$\longleftrightarrow$	$\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$
Linéarité	$\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$	$\longleftrightarrow$	$\displaystyle\int_I(\lambda f + \mu g) = \lambda\int_I f + \mu\int_I g$
Positivité	$\forall n,\ u_n \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq 0$	$\longleftrightarrow$	$\forall t \in I,\ f(t) \geq 0 \Rightarrow \displaystyle\int_I f(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$

Croissance	$\forall n,\ u_n \leq v_n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$	$\longleftrightarrow$	$\forall t \in I,\ f(t) \leq g(t) \quad \Rightarrow \quad \int_I f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_I g(t)\ \mathrm{d}t$
Somme nulle	$\begin{cases} \forall n,\ u_n \geq 0 \\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall n,\ u_n = 0$	$\longleftrightarrow$	$\begin{cases} \forall t \in I,\ f(t) \geq 0 \\ f \text{ continue sur } I \\ \int_I f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \end{cases} \Rightarrow \forall t \in I,\ f(t) = 0$
Chgt de borne initiale	$\sum_{n \geq n_0} u_n \text{ conv.} \iff \sum_{n \geq n_1} u_n \text{ conv.}$	$\longleftrightarrow$	$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ conv.} \iff \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t \text{ conv.}$
Majoration	Pour une série $\sum u_n$ qui CVA : $\lvert\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\rvert \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \lvert u_n\rvert$	$\longleftrightarrow$	Pour une fonction f intégrable sur I : $\lvert\int_I f(t)\ \mathrm{d}t\rvert \leq \int_I \lvert f(t)\rvert\ \mathrm{d}t$

III] Les méthodes

	Séries Numériques		Intégrale Impropres
Equivalents	$u_n \sim \alpha_n > 0 \Rightarrow \begin{cases} \sum u_n \\ \sum \alpha_n \end{cases}$ de même nature	$\longleftrightarrow$	$f(t) \underset{b^-}{\sim} \alpha(t) > 0 \Rightarrow \begin{cases} \int_a^b f \\ \int_a^b \alpha \end{cases}$ de même nature
Comparaison	Lorsqu'au $\mathcal{V}(+\infty)$, $\quad 0 \leq u_n \leq \alpha_n$	$\longleftrightarrow$	Lorsqu'au $\mathcal{V}(b^-)$, $\quad 0 \leq f(t) \leq \alpha(t)$
	$\sum \alpha_n$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge	$\longleftrightarrow$	$\int_a^b \alpha(t)\ \mathrm{d}t$ converge $\Rightarrow \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge
	$\sum u_n$ diverge $\Rightarrow \sum \alpha_n$ diverge	$\longleftrightarrow$	$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ diverge $\Rightarrow \int_a^b \alpha(t)\ \mathrm{d}t$ diverge
Intégrabilité	$\sum \lvert u_n\rvert$ converge $\Rightarrow \sum u_n$ converge	$\longleftrightarrow$	f intégrable sur $I \Rightarrow \int_I f$ converge
	Lorsque $\sum \lvert\alpha_n\rvert$ converge	$\longleftrightarrow$	Lorsque α est intégrable sur I
	$\begin{cases} u_n = O(\alpha_n) \\ \text{ou} \\ u_n = o(\alpha_n) \end{cases} \Rightarrow \sum \lvert u_n\rvert$ converge		$\begin{cases} f(t) = O(\alpha(t)) \\ \text{ou} \\ f(t) = o(\alpha(t)) \end{cases} \Rightarrow f$ intégrable sur I
Riemann	$\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$	$\longleftrightarrow$	$\int_a^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$
Bertrand	$\sum \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$ conv. $\iff \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1,\ \beta > 1 \end{cases}$	$\longleftrightarrow$	$\int_{a>1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha \ln^\beta(t)}$ conv. $\iff \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1,\ \beta > 1 \end{cases}$

Remarque : Nous verrons qu'il y a également des analogies dans la recherche de $\begin{cases} \sim \\ o \\ O \end{cases}$ de $\begin{cases} S_n\ /\ S(x) \\ \text{ou de} \\ R_n\ /\ R(x) \end{cases}$.