SYNTHESE : sur la Réduction Algébrique

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

I] Que sait-on sur le polynôme minimal Π_A d'une matrice A ?

Réponse

- L'idéal des polynômes annulateurs de A n'est pas réduit à $\{0\}$.
  En effet, χ_A en fait partie d'après Cayley-Hamilton.

- Π_A est le polynôme unitaire de plus bas degré qui engendre l'idéal des polynômes annulateurs de A.
  Ce polynôme existe car cet idéal est non réduit à $\{0\}$ et est principal.

- Le degré du polynôme annulateur d'une matrice différente de λI_n est au moins 2.

- Π_A divise tous les polynômes annulateurs de A et donc :
  $\to$ Il divise tout polynôme annulateur et donc en particulier χ_A.
  $\to$ $\deg \Pi_A \leq n$

- Lorsque A est une matrice 2×2 différente de λI_2, on a $\Pi_A = \chi_A$.

- Les valeurs propres de A sont exactement les racines de Π_A.

- Lorsque $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, \ \ldots, \ \lambda_p\}$:
  $\to$ si A est diagonalisable alors $\Pi_A = (X - \lambda_1)(X - \lambda_2)\ldots(X - \lambda_p)$.
  $\to$ sinon, Π_A est de la forme $\Pi_A = (X - \lambda_1)^{\alpha_1}(X - \lambda_2)^{\alpha_2}\ldots(X - \lambda_p)^{\alpha_p} Q$ avec Q n'ayant pas de racine.

- Pour les endomorphismes trigonalisables nous avons $\Pi_A = (X - \lambda_1)^{\alpha_1}(X - \lambda_2)^{\alpha_2}\ldots(X - \lambda_p)^{\alpha_p}$ et en appliquant le lemme de décomposition des noyaux à Π_A, nous obtenons la décomposition de E en somme directe des sous-espaces caractéristiques :

$$E = \ker(u - \lambda_1 \, \mathrm{id}_E)^{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \ker(u - \lambda_p \, \mathrm{id}_E)^{\alpha_p}$$

  On utilise cette décomposition pour obtenir la décomposition de Dunford, puis la réduction de Jordan.

II] A quoi sert le polynôme minimal Π_A ?

Réponse

- A trouver les valeurs propres de A puisque celle-ci sont les racines de Π_A.

- A vérifier si A est diagonalisable : A diagonalisable $\iff$ Π_A scindé simple.

- A vérifier si A est trigonalisable : A trigonalisable $\iff$ Π_A scindé.

- A calculer les puissances d'une matrice.
  Bien revoir la méthode à l'aide de la division euclidienne de X^k par Π_A.

- A déterminer une base et la dimension de $\mathbb{K}[A]$.

- A déterminer une décomposition de E en somme directe des sev caractéristiques.
  Lorsque A est trigonalisable, on a $\Pi_A = (X-\lambda_1)^{\alpha_1}(X-\lambda_2)^{\alpha_2}\dots(X-\lambda_p)^{\alpha_p}$ ce qui nous donne :

$$E = \ker(A-\lambda_1 I_n)^{\alpha_1} \oplus \ker(A-\lambda_2 I_n)^{\alpha_2} \oplus \dots \oplus \ker(A-\lambda_p I_n)^{\alpha_p}$$

  On peut également obtenir cette décomposition à l'aide de X_A qui est également scindé.
  Les sev $\ker(A-\lambda_k I_n)^{\alpha_k}$ étant stables par A, A est alors semblable à une matrice diagonale par blocs.

III] A quoi sert un polynôme annulateur P ?

Réponse

- A trouver un ensemble auquel appartiennent les valeurs propres de A.
  En effet, les valeurs propres de A sont parmi les racines des polynômes annulateurs.

- A avoir une idée des formes possibles de Π_A.
  En effet, Π_A divise P.

- A vérifier si A est diagonalisable : A diagonalisable $\iff$ A annule un polynôme simplement scindé.

- A vérifier si A est trigonalisable : A trigonalisable $\iff$ A annule un polynôme scindé.

- A calculer les puissances d'une matrice.
  Bien revoir la méthode à l'aide de la division euclidienne de X^k par P.

- A déterminer une décomposition de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ en somme directe de sev stables.
  Grâce au lemme de décomposition des noyaux.

Tous les résultats précédents se transposent aux endomorphismes en dimension finie.

IV] SEV stables

Soit F stable par u et $u \in \mathcal{L}(E)$.

Bilan

- Les sev $\mathrm{Im}(P(u))$ et $\ker(P(u))$ sont stables par u pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$.
  En particulier, les sev propres et les sev caractéristiques de u sont stables par u.
  $\rightarrow$ La restriction de u à un sev propre est une homothétie
  $\rightarrow$ La restriction de u à un sev propre est la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent

- On définit $u_{|F}$ l'endomorphisme de F induit par u.

- Le polynôme caractéristique de $u_{|F}$ divise le polynôme caractéristique de u.
  On en déduit que :
  $\rightarrow$ u diagonalisable $\Rightarrow$ $u_{|F}$ diagonalisable et F contient un vecteur propre de u.
  $\rightarrow$ u trigonalisable $\Rightarrow$ $u_{|F}$ trigonalisable et F contient un vecteur propre de u.

- Lorsque que u est diagonalisable, les sev stables par u sont les sev engendrés par des vecteurs propres.
  Par analyse/synthèse.

V] Les sous espaces caractéristiques

Lorsque χ_u est scindé

En notant $\chi_u = \prod_{k=1}^{p} (\lambda - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$, nous avons les résultats suivants :

- u est trigonalisable.
- E est somme directe des sous-espaces caractéristiques $N_{\lambda_k} = \ker((u - \lambda_k \,\mathrm{id}_E)^{m_{\lambda_k}})$ de u.
- On peut également obtenir les sev caractéristiques à l'aide du polynôme minimal Π_u.
- Les sous-espaces caractéristiques sont stables et de dimension : $\dim N_{\lambda_k} = m_{\lambda_k}$
- La matrice de u dans une base obtenue en réunissant des bases des N_{λ_k} est diagonale par blocs.
- u induit sur chacun des N_{λ_k} la somme d'une homothétie d_k et d'un endomorphisme nilpotent n_k.
- Cette décomposition des endomorphismes u_k permet d'obtenir la décomposition de Dunford.

VI] Savoir démontrer les affirmations suivantes

A savoir et à savoir démontrer...

1. Si λ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(E)$, alors $P(\lambda)$ est valeur propre de $P(u)$.
2. Les valeurs propres d'un endomorphisme sont parmi les racines d'un polynôme annulateur.
3. Les valeurs propres de $u \in \mathcal{L}(E)$ sont exactement les racines de Π_u.
4. Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable, alors $\Pi_A = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} (X - \lambda)$.
5. $u \in \mathcal{L}(E)$ est diagonalisable ssi u annule un polynôme scindé simple.
6. Le polynôme minimal divise tous les polynômes annulateurs.
7. Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = 2$, on a $\Pi_u = \chi_u$, sauf pour les homothéties.
8. La restriction d'un endomorphisme $\left\{ \begin{array}{l} \text{diagonalisable} \\ \text{trigonalisable} \end{array} \right.$ à un sev stable est aussi $\left\{ \begin{array}{l} \text{diagonalisable} \\ \text{trigonalisable} \end{array} \right.$.
9. 2 endomorphismes diagonalisables qui commutent admettent une base commune de vecteurs propres.
10. Un endomorphisme qui annule un polynôme scindé simple est diagonalisable.
11. Un endomorphisme qui annule un polynôme scindé est trigonalisable.
12. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, la dimension de $\mathbb{K}[u]$ est égale au degré de Π_u.
13. La dimension d'un sev caractéristique est égale à l'ordre de multiplicité de la valeur propre correspondante.
14. La décomposition de E en somme directe de sev caractéristiques permet d'obtenir la réduction de Dunford.