SYNTHESE : Etude asymptotique des $\left\{\begin{array}{l}\text{Restes partiels}\\ \text{Sommes partielles}\end{array}\right.$ pour les $\left\{\begin{array}{l}\text{Séries}\\ \text{Intégrales impropres}\end{array}\right.$

Objectifs : Obtenir des "o", "O" ou des "$\sim$" des

- Sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ ou $S(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ au voisinage de b^-.
- Restes partiels $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$ ou $R(x) = \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au voisinage de b^-.

⚠ Ici :

- la suite (v_n) est **de signe constant** à partir d'un certain rang
- la fonction g est continue par morceaux sur $[a,\ b[$ et **de signe constant** au voisinage de b^-.

Résultat de cours : Il est possible de sommer ($\sum$ ou $\int$) $\left\{\begin{array}{l}\text{les "o"}\\ \text{les "O"}\\ \text{les équivalents}\end{array}\right.$ dans les cas suivants :

SYNTHESE	$\sum v_n$ avec $v_n \geq 0$ apcr	$\int_{[a,b[} g(t)\,\mathrm{d}t$ avec $g(t) \geq 0$ au $\mathcal{V}(b^-)$
RESTES PARTIELS (convergence)	Si $\sum v_n$ est convergente	Si f est intégrable sur $[a,\ b[$
	$\sum_{k=n+1}^{+\infty} o(v_n) = o\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n\right)$	$\int_x^b o(g(t))\,\mathrm{d}t = o\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$
	$\sum_{k=n+1}^{+\infty} O(v_n) = O\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n\right)$	$\int_x^b O(g(t))\,\mathrm{d}t = O\left(\int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t\right)$
	$u_n \sim v_n \Rightarrow \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} v_n$	$g(t) \underset{b^-}{\sim} g(t) \Rightarrow \int_x^b g(t)\,\mathrm{d}t \underset{b^-}{\sim} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$
SOMMES PARTIELLES (divergence)	Si $\sum v_n$ est divergente	Si f est non intégrable sur $[a,\ b[$
	$\sum_{k=0}^{n} o(v_n) = o\left(\sum_{k=0}^{n} v_n\right)$	$\int_a^x o(g(t))\,\mathrm{d}t = o\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$
	$\sum_{k=0}^{n} O(v_n) = O\left(\sum_{k=0}^{n} v_n\right)$	$\int_a^x O(g(t))\,\mathrm{d}t = O\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$
	$u_n \sim v_n \Rightarrow \sum_{k=0}^{n} u_n \sim \sum_{k=0}^{n} v_n$	$g(t) \underset{b^-}{\sim} g(t) \Rightarrow \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \underset{b^-}{\sim} \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$

Attention à l'interprétation de $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ lorsque $x \in]a, b[$

- $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est une somme partielle lorsque x est au voisinage de b^-.
- $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est un reste partiel lorsque x est au voisinage de a^+.

Autres méthodes possibles :

Encadrement par des intégrales : Pour $\sum u_n$

Pour les séries $\sum f(n)$ avec f de classe C_m, $\begin{cases} \text{monotone} \\ \text{positive} \end{cases}$, on peut encadrer S_n ou R_n par des intégrales.

Lorsque f est décroissante on obtient : $\int_{n_0}^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \sum_{k=n_0}^{n} f(k) \leq \int_{n_0-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t$

IPP : Pour $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Pour trouver un équivalent de $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ ou de $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ au $\mathcal{V}(b^-)$, on peut commencer par effectuer une IPP.

Par exemple, au voisinage de $+\infty$ on a :

$$\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^n t}\,\mathrm{d}t = [\frac{t}{\ln^n t}]_2^x + n\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln^{n+1} t}\,\mathrm{d}t$$