

Ici, $(E, \|\cdot\|)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé.

I] Notions topologiques de base

A] Comment déterminer :

- L'intérieur d'une partie A ?

On procède souvent par conjecture/validation :

→ Intuitivement, on conjecture que $\overset{\circ}{A} = \Delta$ en utilisant le fait que $\overset{\circ}{A} \subset A$.

→ On montre alors que $\overset{\circ}{A} = \Delta$ en :

★ Montrant que tous les éléments de Δ sont dans $\overset{\circ}{A}$

★ Montrant que tous les éléments n'appartenant pas à Δ ne sont pas dans $\overset{\circ}{A}$

- L'adhérence d'une partie A ?

On procède souvent par conjecture/validation :

→ Intuitivement, on conjecture que $\bar{A} = \Delta$ en utilisant le fait que $A \subset \bar{A}$.

→ On montre alors que $\bar{A} = \Delta$ en :

★ Montrant que tous les éléments de Δ sont dans $\bar{A}$ (avec la caractérisation séquentielle)

★ Montrant que tous les éléments n'appartenant pas à Δ ne sont pas dans $\bar{A}$

- La frontière d'une partie A ?

On procède souvent par conjecture/validation :

→ Intuitivement, on conjecture que $\delta A = \Delta$.

→ On montre alors ce résultat en montrant que tous les éléments de Δ sont :

★ limite d'une suite d'éléments de A

★ limite d'une suite d'éléments de $\mathcal{C}_E A$

B] Comment montrer que :

- F est un fermé de E ?

→ ♥ : Avec la caractérisation séquentielle

On prend une suite quelconque $(x_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $l \in E$ et on montre que $l \in F$.

→ On montre que $\mathcal{C}_E F$ est un ouvert.

→ On montre que F est une intersection (éventuellement infinie) ou une réunion de fermés.

→ ♥ : On montre que F est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.

- O est un ouvert de E ?

→ On montre que O est voisinage de chacun de ses points.

→ ♥ : On montre que $\mathcal{C}_E O$ est un fermé (avec la caractérisation séquentielle).

→ On montre que O est une réunion (éventuellement infinie) ou une intersection d'ouverts.

→ ♥ : On montre que O est l'image réciproque d'un ouvert par une application continue.

II] Densité

A] Ensembles denses à connaître :

On rappelle qu'une partie A est dense dans E lorsque $\bar{A} = E$.

- Dans $\mathbb{R}$: $\mathbb{D}, \mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z} + 2\pi\mathbb{Z}$.
- Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$: $\text{GL}_n(\mathbb{K})$.
- Dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$: l'ensemble des matrices diagonalisables.
- Dans $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{K})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$: l'ensemble des fonctions polynômiales. (Stone-Weierstrass)
- Dans $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$: l'ensemble des fonctions en escalier.

Vous devez être capables de prouver la densité de $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et celle de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

B] Application de la densité :

La densité d'une partie de E est en général utilisée pour généraliser à tous les éléments de E , une propriété connue pour être vraie sur la partie dense.



Attention : Cette généralisation n'est pas automatique !!

Elle ne peut se faire qu'en utilisant certains théorèmes et propriétés complémentaires :

- Continuité des fonctions.
- Théorème sur la convergence uniforme des suites de fonctions.
- Croissance... etc...

Exemples d'applications usuelles de la densité

- $\chi_{AB} = \chi_{BA}$: densité de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
- Théorème de Cayley-Hamilton : densité de $\mathcal{D}_n(\mathbb{C})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.
- Recherche des morphismes continus de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}, +)$: densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.
- Définition de l'intégrale de Riemann : densité de l'ensemble des fonctions en escaliers dans $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$.
- Lemme de Lebesgue : densité de l'ensemble des fonctions en escaliers dans $\mathcal{C}_m([a, b], \mathbb{K})$.