

I] Limite d'une fonction vectorielle

- Lorsque $(x_1, \dots, x_k) \rightarrow (a_1, \dots, a_k)$, nous avons pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket : x_k \rightarrow a_k$.
- Pour étudier la limite en $(0,0)$ d'une fonction de deux variables (x,y) , il est parfois utile d'effectuer un changement de variables polaire :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases} \quad \text{car ainsi} \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0$$

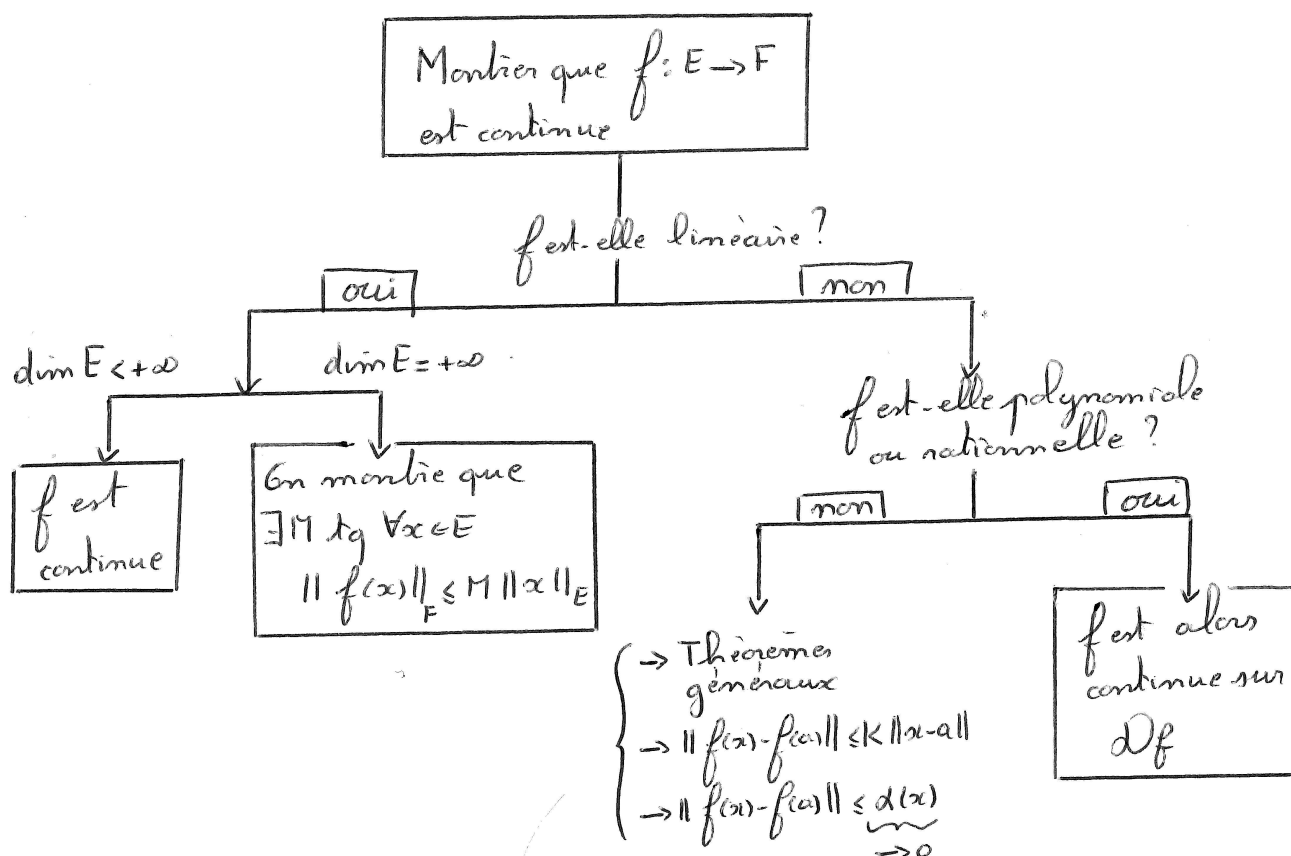
- Pour montrer qu'une fonction n'a pas de limite en a , on peut montrer que les limites obtenues en suivant deux chemins différents X_1 et X_2 sont distinctes.

$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \in X_1]{x \rightarrow a} l_1 \\ f(x) \xrightarrow[x \in X_2]{x \rightarrow a} l_2 \end{cases} \quad \text{avec } l_1 \neq l_2 \Rightarrow f \text{ n'a pas de limite en } a$$

II] Continuité d'une fonction vectorielle

1) Pour montrer la continuité d'une fonction vectorielle :

On suit la démarche indiquée dans l'organigramme ci-dessous :



- Lorsque la fonction est à valeur dans F de dimension finie, on montre la continuité des fonctions coordonnées.

Par exemple : $F = \mathbb{C}$, $F = \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $F = \mathbb{K}_n[X]$...

- Lorsque la fonction est à valeur dans $F_1 \times \cdots \times F_n$, on montre la continuité des fonctions composantes.

Par exemple : $F = \mathbb{K}^n$...

2) Pour montrer la continuité en un point a d'une fonction vectorielle :

- Avec le théorème de majoration : $\|f(x) - f(a)\|_F \leq \cdots \leq \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$.
- En se plaçant au voisinage $\mathcal{B}(a, \alpha)$ de a pour y voir plus clair.
- En introduisant une partition $\begin{cases} V = X_1 \cup X_2 \\ a \in \bar{X}_1 \cap \bar{X}_2 \end{cases}$ d'un voisinage de a et en montrant que
$$\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \in X_1]{x \rightarrow a} f(a) \\ f(x) \xrightarrow[x \in X_2]{x \rightarrow a} f(a) \end{cases}.$$

3) Pour montrer la non-continuité d'une fonction vectorielle :

- **Cas général** : On montre que $f(x) \not\xrightarrow[a \rightarrow a]{} f(a)$ en suivant un "chemin" $X \subset E$ tel que $a \in \bar{X}$.
- **Si f est linéaire** : On montre qu'il existe une suite $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\frac{\|f(x_n)\|_F}{\|x_n\|_E} \rightarrow +\infty$.

4) Exemples de fonctions vectorielles usuelles continues :

• φ_k définie sur	$E_1 \times \cdots \times E_p$	par	$\varphi_k(x_1, \dots, x_p) = x_k$	(projection élémentaire)
• φ définie sur	$\mathbb{R}^2$	par	$\varphi(x, y) = \frac{xy \sin(y^2)}{1+x^2}$	(composition de f° continues)
• φ définie sur	$[0, 1]$	par	$\varphi(t) = a + t(b - a)$	(fonctions coordonnées polynomiales)
• φ définie sur	$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	par	$\varphi(M) = M^2$	(fonctions coordonnées polynomiales)
• φ définie sur	$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	par	$\varphi(M) = \det(M)$	(fonction polynomiale)
• φ définie sur	$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	par	$\varphi(M) = \text{Tr}(M)$	(linéarité en dimension finie)
• φ définie sur	$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	par	$\varphi(M) = P^{-1}MP$	(linéarité en dimension finie)
• φ définie sur	$(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2$	par	$\varphi(M, N) = MN$	(bilinéarité en dimension finie)
• φ définie sur	E^2	par	$\varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$	(caractérisation : 0-lipschitzienne)
• φ définie sur	$\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$	par	$\varphi(M) = \text{Com}(M)$	(fonctions coordonnées polynomiales)
• φ définie sur	$\text{GL}_n(\mathbb{K})$	par	$\varphi(M) = M^{-1}$	(fonctions coordonnées rationnelles)
• φ définie sur	$\mathbb{K}_n[X]$	par	$\varphi(P) = P'$	(fonctions coordonnées polynomiales)
• φ définie sur	E	par	$\varphi(x) = d(x, A)$	(fonction lipschitzienne)

III] Applications de la continuité des applications vectorielles

Ouverts et Fermés :

La continuité permet de montrer qu'une partie de Δ est un ouvert ou un fermé.

En effet, lorsque $f : E \rightarrow F$ est continue :

- Lorsque $\Delta = f^{-1}(\Omega)$ avec ω un ouvert de F , alors Δ est un ouvert de E .
- Lorsque $\Delta = f^{-1}(\Omega)$ avec ω un fermé de F , alors Δ est un fermé de E .

C'est ainsi que l'on montre que :

- $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
- $O_n(\mathbb{R})$ et que $SO_n(\mathbb{R})$ sont des fermés de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
- $\{x \in E \mid f(x) > 0\}$ est un ouvert de E .

Continuité et Densité :

La continuité de f et g permet de généraliser l'égalité $f(x) = g(x)$ lorsque celle-ci n'est vraie que sur un ensemble dense de E .

C'est ainsi que :

- l'on démontre, grâce à la densité de $GL_n(\mathbb{K})$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.
- l'on montre grâce à la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ que les applications continues qui vérifient pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$ sont les applications de la forme $f(x) = ax$.

IV] Les parties connexes par arcs

Définition : $A \subset E$ est connexe par arc lorsque pour tout $a, b \in A$, il existe $\gamma \in \mathcal{C}([0, 1], A)$ telle que $\begin{cases} \gamma(0) = a \\ \gamma(1) = b \end{cases}$.

Proposition : Les connexes par arc de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proposition : L'image continue d'un connexe par arc est connexe par arc.

Pour montrer qu'une partie X est connexe par arc :

- Soit avec la définition $\heartsuit$.
On prend deux points a et b quelconques de X et on recherche un chemin continue de X qui les relie.
- Soit en montrant que X est l'image d'un connexe par arc.

Pour montrer qu'une partie n'est pas connexe par arc :

On procède par l'absurde :

- Soit en recherchant deux points de X qui ne peuvent être reliés par un chemin continue de X
- Soit en recherchant une application continue $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(X)$ n'est pas un intervalle.

Exemples à connaître :

- $\mathbb{R}^*$, $GL_n(\mathbb{R})$, $O_n(\mathbb{R})$ et les hyperplans en dimension finie ne sont pas connexes par arcs.
- $\mathbb{C}^*$, $GL_n(\mathbb{C})$, $SO_n(\mathbb{R})$ sont connexes par arcs.