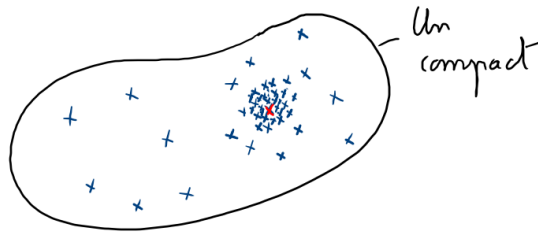


SYNTHESE : Les Compacts



I] Définition et propriétés des compacts

- Un compact d'un evn E est une partie K de E telle que toute suite d'éléments de K admette une valeur d'adhérence dans K .
- Cela signifie que, lorsque K est un compact :
 - Une suite convergente d'éléments de K admet sa limite dans K .
 - Les valeurs d'adhérence d'une suite d'éléments de K sont toutes dans K .
 - K est une partie fermée et bornée de E .
- Exemples de compacts :
 - Les segments
 - Les parties finies de E
 - Les boules fermées et les sphères en dimension finie
 - Les réunions finies, intersections finies ou infinies et produits cartésiens de compacts.

II] Comment montrer qu'une partie $K \subset E$ est compacte ?

Pour montrer que K est une partie compacte, on utilise l'une des méthodes suivantes :

- On montre que toute suite d'éléments de K admet une valeur d'adhérence dans K . (*Définition*)
- On montre que K est une partie fermée et bornée d'un evn de dimension finie. (*Théorème*)
- On montre que K est l'intersection d'un fermé et d'un compact. (*Expl : $\mathcal{SO}_n(\mathbb{R})$*)
- On montre que K est l'intersection, la réunion ou le produit cartésien de compacts. (*Opérations*)
- On montre que K est l'image continue d'un autre compact. (*Continuité*)

III] Les théorèmes de compacité

Le fait de se placer dans un compact nous donne des résultats intéressants :

Pour les suites :

- Toute suite d'éléments d'un compact admet une valeur d'adhérence dans celui-ci. (*Définition*)
- Une suite d'éléments d'un compact converge ssi elle admet une unique valeur d'adhérence.
- Et donc en dimension finie :
 - toute suite bornée admet une valeur d'adhérence. (*Bolzano-Weierstrass*)
 - toute suite bornée converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.

Pour les fonctions continues :

- Généralisation du théorème des bornes atteintes : (*TBA*)
 - L'image continue d'un compact est un compact.
 - L'image d'un segment par une fonction réelle continue est un segment.
 - Une fonction continue sur un compact est bornée.
 - Une fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.
- Une fonction continue sur un compact est uniformément continue. (*Heine*)



Méthode pour reconnaître une Image directe ou une Image réciproque

- Lorsque $\Delta = \{f(x) \mid x \in A\}$ alors $\Delta = f(A)$
- Lorsque $\Delta = \{x \in E \mid f(x) \in A\}$ alors $\Delta = f^{-1}(A)$

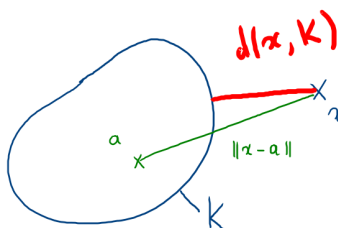
On reconnaît donc une image directe ou réciproque en exprimant Δ sous l'une de ces 2 formes.



Méthodes pour montrer que $f : X \subset E \rightarrow F$ est uniformément continue

- Meth 1 : On montre que f est continue et que X est un compact (*Théorème de Heine*)
- Meth 2 : On montre que f est lipschitzienne sur X

IV] Autres applications des compacts



- Tout sev de dimension finie d'un evn E est une partie fermée de E .
- La distance d'un vecteur à un compact K est atteinte.
- En dimension finie, la distance d'un vecteur à un fermé F est atteinte.
- En dimension finie, la norme subordonnée est atteinte en un point de la sphère unité.