SYNTHESE : Les Probabilités

La modélisation mathématique des probabilités commence par l'identification d'une expérience aléatoire.
Cette expérience débouche sur un ensemble de résultats (ou issues) possibles que l'on appelle un univers Ω. En MPSI cet univers était fini, cette année il pourra être dénombrable. Alors que dans un univers fini, chacune des parties de l'univers était considérée comme un événement, lorsque l'univers est infini l'ensemble des événements est appelé une tribu de Ω ; elle est souvent notée $\mathcal{A}$. Lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ (cas très fréquent en exercice), la tribu choisie sera $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Un univers muni d'une tribu est appelé un *univers probabilisable.*

Pour obtenir un univers probabilisé, il reste à munir $(\Omega,\ \mathcal{A})$ d'une probabilité P. Lorsque $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, cette probabilité est souvent définie par une famille sommable positive $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de somme 1 représentant les probabilités des événements élémentaires $\{n\}$.

Correspondance entre le vocabulaire ensembliste et le vocabulaire probabilitiste

Notation	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
Ω	Ensemble étudié	Univers ou événement certain
A	Partie	Evénement
$\emptyset$	Ensemble vide	Evénement impossible
ω	Elément de Ω	Issue de Ω
$\{\omega\}$	Singleton	Evénement élémentaire
$A \cap B$	Intersection de parties	Conjonction d'événements
$\bar{A}$	Complémentaire de A dans Ω	Evénement contraire de A
$A \cup B$	Réunion de parties	Disjonction d'événements
$A \subset B$	A est inclus dans B	A implique B
$\omega \in A$	ω appartient à A	ω est une réalisation de A
$(A_i)_{i\in I}$	Partition de l'ensemble Ω	SCE de l'univers Ω

I] Les propriétés d'une probabilité

- Par définition : Il s'agit d'une fonction $P : \mathcal{A} \to [0,\ 1]$ telle que :

$$P(\Omega) = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} (P(A_i))_{i\in I} \text{ est sommable} \\ P(\bigcup_{i\in I}^{+\infty} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_n) \end{cases} \quad (\sigma - \text{additivité})$$

Lorsque $(A_i)_{i\in I}$ est une famille au plus dénombrables d'événements deux à deux incompatibles.

- Propriétés qui en découlent :

  $\to$ $P(\emptyset) = 0$
  $\to$ $P\bar{A}) = 1 - P(A)$.
  $\to$ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  $\to$ $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$
  $\to$ $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n)$.
  $\to$ $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

- Définition à l'aide des probabilités élémentaires :

  Lorsque $\Omega = \{\omega_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$, une famille sommable $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs de somme 1 définit une unique probabilité P telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(\{\omega_n\}) = p_n$.

Méthodes

- Pour calculer $P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$:
  $\to$ On a $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1).P(A_2)\dots P(A_n)$ lorsque les A_k sont indépendants,
  $\to$ Sinon, $P(A_1 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1).P_{A_1}(A_2)\dots P_{A_1\cap\dots\cap A_{n-1}}(A_n)$ d'après les probabilités composées

- Pour calculer $P(A_1 \cup \dots \cup A_n)$:
  $\to$ On a $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) \cup \dots + P(A_n)$ lorsque les A_k sont 2 à 2 incompatibles,
  $\to$ Sinon, on passe par la probabilité de l'événement contraire : $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \dots \cap \bar{A}_n)$

II] Continuités monotones

Evénements nouveaux à connaître :

- $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ correspond à la réalisation de TOUS les événements A_n
- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ correspond à la réalisation d'AU MOINS un événements A_n
- $\bigcup_{N=1}^{+\infty} (\bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n)$ correspond à la réalisation de TOUS les A_n APCR.
- $\bigcap_{N=1}^{+\infty} (\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n)$ correspond à la réalisation d'une INFINITE de A_n.

Théorèmes de continuité monotone

Théorème : Pour TOUTE suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on a :

- Lorsque (A_n) est croissante : $P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n)$.
- Lorsque (A_n) est décroissante : $P(A_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n)$

Le corollaire suivant est plus souvent utilisé :

Conséquence : Pour TOUTE suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements, on a :

- $P(\bigcup_{k=0}^{n} A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n)$.
- $P(\bigcap_{k=0}^{n} A_k) \xrightarrow[n\to\infty]{} P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n)$

Pour calculer $P(\bigcup_{k=0}^{n} A_k)$ lorsque les événements ne sont pas disjoints, on passe par l'événement contraire afin d'utiliser la formule de probabilités composées ou mieux, l'indépendance éventuelle des événements.

Remarques :

- On calcule $P(\bigcup_{N=1}^{+\infty} (\bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n))$ en remarquant que $(\bigcap_{n=N}^{+\infty} A_n)_N$ est croissante.
- On calcule $P(\bigcap_{N=1}^{+\infty} (\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n))$ en remarquant que $(\bigcup_{n=N}^{+\infty} A_n)_N$ est décroissante.

Proposition : Le théorème de continuité croissante montre que $P(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$ lorsque $\sum P(A_n)$ CVG.

III] Les probabilités conditionnelles

Nous sommes désormais dans un espace probabilisé $(\Omega,\ \mathcal{A},\ P)$.

SCE et SQCE

Lorsque $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'événements deux à deux incompatibles, on dit que :

- $(A_i)_{i\in I}$ est un SCE lorsque $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \Omega$.
- $(A_i)_{i\in I}$ est un SQCE lorsque $\sum\limits_{i\in I} P(A_i) = 1$.

- Définition :
  - Lorsque $P(B) \neq 0$, on définit une probabilité P_B par l'expression $P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.
  - Lorsque $P(B) = 0$, on définit une probabilité P_B par l'expression $P_B(A) = P(B)$.
- Propriétés : P_B étant une probabilité, elle vérifie toutes les propriétés précédentes.
- Formule des probabilités composées : Pour une intersection de n événements non indépendants

$$P(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1\cap A_2}(A_3)\dots P_{A_1\cap\cdots\cap A_{n-1}}(A_n)$$

- Formule des probabilités totales : Lorsque $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un SCE ou un SQCE, on a :

$$P(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_{B_n}(A)P(B_n)$$

- Formule de Bayes : $P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P(B)}$ ou $P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{\sum\limits_{n=0}^{+\infty} P_{A_n}(B)P(A_n)}$

IV] Evénements indépendants

Définition :

- On dit que A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
- Les événements de la famille $(A_i)_{i \in I}$ sont dit (mutuellement) indépendants lorsque :

$$\forall J \subset I \text{ fini, on a : } \quad P(\bigcap_{j \in J} A_j) = \prod_{j \in J} P(A_j)$$

⚠ Ne pas confondre la notion d'indépendance avec la notion d'événements incompatibles !

On considère que des expériences aléatoires successives indépendantes des unes des autres génèrent des événements indépendants.