

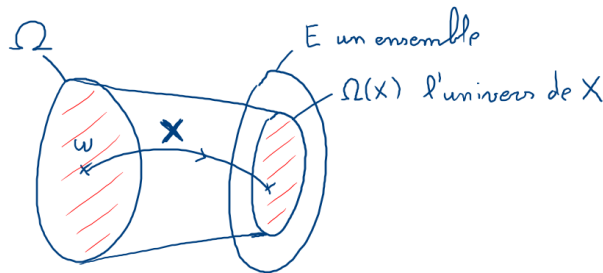
SYNTHESE : Les Variables aléatoires

DÉFINITION : Variable aléatoire discrète

Dans un univers probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$, une variable aléatoire discrète est une application :

$$X : \Omega \rightarrow E \quad \text{telle que} \quad \begin{cases} X(\Omega) \text{ est au plus dénombrable} \\ \forall x \in X(\Omega), (X = x) \in \mathcal{A} \end{cases}$$

$(X = x)$ est une notation qui représente l'événement $X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$.



DÉFINITION : Probabilité associée à une VA

Dans un univers probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la probabilité associée à une variable aléatoire X est la probabilité P_X définie sur $X(\Omega)$ par :

$$\forall x \in X(\Omega), P_X(\{x\}) = P(X = x)$$

$P_X(\{x\})$ est plus simplement notée : $P(X = x)$.



En pratique

Souvent seule la loi de probabilité des variables aléatoire est donnée :

$$\forall x \in X(\Omega), \quad P(X = x) = \dots$$

Une façon simple de fournir cette information est de dire que X suit une des lois usuelle suivantes.

I] Les lois de probabilité usuelles

Nom	$X(\Omega)$	Notation	Probabilité	Espérance	Variance
Constante :	$\{a\}$	$X = a$	$P(X = a) = 1$	$E(X) = a$	$V(X) = 0$
Bernoulli :	$\{0, 1\}$	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$	$P(X = 1) = p$	$E(X) = p$	$V(X) = pq$

Uniforme :	$\llbracket 1, n \rrbracket$	$X \hookrightarrow \mathcal{U}(n)$	$P(X = k) = \frac{1}{n}$	$E(X) = \frac{1+n}{2}$	$V(X) = \frac{n^2-1}{12}$
Binomiale :	$\llbracket 0, n \rrbracket$	$X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$E(X) = np$	$V(X) = npq$
Géométrique :	$\mathbb{N}^*$	$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$	$P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$	$E(X) = \frac{1}{p}$	$V(X) = \frac{1-p}{p^2}$
Poisson :	$\mathbb{N}$	$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$	$P(X = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$	$E(X) = \lambda$	$V(X) = \lambda$

II] Indépendance de variables aléatoires

L'indépendance de deux VA est une notion probabiliste, c'est à dire qu'elle dépend de la loi de probabilité de l'univers probabilisé sur lequel elles sont définies et donc des lois de probabilité de ces deux VA.

En pratique, on pourra décréter que deux VA sont indépendantes lorsqu'elles sont associées à des expériences aléatoires qui ne sont pas liées l'une à l'autre.

- On dit que deux variables aléatoires X et Y sont indépendantes lorsque :

$$P((X \in A) \cap (Y \in B)) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

- En pratique, on vérifie l'indépendance de X et Y en montrant que :

$$P((X = x) \cap (Y = y)) = P(X = x)P(Y = y) \quad \forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$$

- Lorsque X et Y sont indépendantes, $u(X)$ et $v(Y)$ le sont également.

Revoir également la notion d'*indépendance mutuelle* de n variables aléatoires.

III] Espérance

Uniquement pour les variables aléatoires REELLES ou COMPLEXES. (cad telles que $X(\Omega) \subset \mathbb{K}$)

DÉFINITION : **Espérance**

On dit que X admet une espérance finie lorsque $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.

- L'espérance est alors la somme de cette famille.
- On note alors $X \in L^1$



Cas où $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$

- Cas des VA à valeurs positives : On calcule directement $\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = \dots$
- Cas des VA à valeurs dans $\mathbb{N}$:

L'espérance de X est donnée par la formule : $E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} nP(X = n)$

En cas de divergence, on obtient $E(X) = +\infty$.

- Pour calculer $E(u(X))$, on utilise (sous réserve de sommabilité) la formule de transfert :

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x)P(X = x)$$

- Lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a la formule : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.
- Lorsque $|X| \leq Y$ et que Y admet une espérance alors X admet aussi une espérance.

Toute VA bornée admet donc une espérance finie.

- Propriétés :

- L'espérance est une application linéaire.
- L'espérance vérifie les propriétés de croissance et de positivité.
- Lorsque X et Y sont indépendantes, on a $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Il faut connaître l'espérance des variables aléatoires suivant des lois usuelles. (Voir le tableau précédent !)

IV] Variance

Moment d'ordre 2

- On dit qu'une variable aléatoire admet un moment d'ordre 2 lorsque X^2 admet une espérance finie. On note alors $X \in L^2$.

Ce moment d'ordre 2 est alors : $E(X^2) = \sum_{x \in X(\Omega)} x^2 P(X = x)$

- Une telle VA admet alors un moment d'ordre 1, c'est à dire une espérance finie. ($|X| \leq \frac{1}{2}(X^2 + 1)$)
- Lorsque $X, Y \in L^2$, on a la majoration de Cauchy-Schwarz :

$$|E(XY)| \leq \sqrt{E(X^2)}\sqrt{E(Y^2)}$$



Cas où $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$

Dans le cadre du programme, les VA sont très souvent à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pourra définir le moment d'ordre 2 de X par la formule :

$$E(X^2) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 P(X = n)$$

DÉFINITION : Variance

Lorsque $X \in L^2$, X admet une variance, donnée par la formule :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = \dots = E(X^2) - E(X)^2 \quad (\text{Koenig-Huyghens})$$

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ est l'écart-type de X .

DÉFINITION : Covariance

Lorsque $X, Y \in L^2$, X et Y admettent une covariance, donnée par la formule :

$$\text{cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))) = \dots = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (\text{Koenig-Huyghens})$$

- Propriétés :

$$\rightarrow V(aX + b) = a^2 V(X).$$

$$\rightarrow V(X + Y) = V(X) + 2\text{cov}(X, Y) + V(Y).$$

$\rightarrow$ Lorsque X et Y sont indépendantes, on a $\text{cov}(X, Y) = 0$ et donc :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \quad (\text{Cette formule se généralise à } n \text{ VA})$$

$$\rightarrow |\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X)\sigma(Y) \quad (\text{Cela permet de définir le coefficient de corrélation linéaire } \rho(X, Y))$$

$\rightarrow$ Lorsque $V(X) = 0$, X est presque sûrement constante (Il existe a tel que $P(X = a) = 1$.)

V] Couples de variables aléatoires

On considère ici X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé.

- Loi conjointe :

La loi conjointe de X et de Y est la loi de la variable aléatoire $Z = (X, Y)$ donnée par :

$$\forall (x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega) \quad P(X = x, Y = y) = \dots$$

- Lois marginales :

Les lois marginales du couple (X, Y) sont les lois de X et de Y .

$$\rightarrow \text{Les lois marginales sont définies par la loi conjointe : } \begin{cases} P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x, Y = y) \\ P(Y = y) = \sum_{x \in X(\Omega)} P(X = x, Y = y) \end{cases} .$$

$\rightarrow$ Lorsque X et Y sont indépendantes, les lois de X et de Y déterminent la loi conjointe :

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$$

- Lois conditionnelles :

Les lois $\begin{cases} P_{Y=y}(X = x) \\ P_{X=x}(Y = y) \end{cases}$ sont appelées les lois conditionnelles de $\begin{cases} X \\ Y \end{cases}$ sachant $\begin{cases} (Y = y) \\ (X = x) \end{cases}$.

Elles sont déterminées par la loi conjointe avec la formule usuelle des probabilités conditionnelles.

La loi conjointe et les lois conditionnelles se généralisent à un n -uplet de VA, appelé "vecteur aléatoire".

VI] Fonctions génératrices

La fonction génératrice associée à la loi de probabilité de X dont l'univers est une partie de $\mathbb{N}$ est définie par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n \quad \text{Au moins pour tout } t \in [-1, 1]$$

La fonction génératrice permet de retrouver facilement :

- La loi de probabilité : $P(X=n) = \frac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$ ou $P(X=n) = a_n$ lorsque $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$

- L'espérance : $E(X)$ existe ssi G_X est dérivable à gauche en 1 et dans ce cas :

$$E(X) = G'_X(1)$$

- La variance : $V(X)$ existe ssi G_X est 2 fois dérivable à gauche en 1 et dans ce cas :

$$V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2$$

On retrouve cette formule en utilisant le fait que $E(X(X-1)) = G''_X(1)$.

Les fonctions génératrices associées à chacune des lois usuelles se calculent facilement.

Vous devez être capable de retrouver rapidement ces expressions rappelées dans le tableau suivant :

- Pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$: $G_X(t) = (1-p) + pt$ $R_X = +\infty$.
- Pour $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$: $G_X(t) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} t^k = (1-p+pt)^n$ $R_X = +\infty$.
- Pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$: $G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{\lambda(t-1)}$ $R_X = +\infty$.
- Pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$: $G_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} t^n = \frac{pt}{1-(1-p)t}$ $R_X = \frac{1}{1-p}$.

Elles sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur disque ouvert de convergence et on obtient leur dérivée en dérivant le terme général de la série.



Fonction génératrice d'une somme de variables aléatoires

Lorsque $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, on a :

$$G_{X_1+\dots+X_n} = G_{X_1} \times G_{X_2} \times \dots \times G_{X_n}$$

Exemple : lorsque $\begin{cases} X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu) \end{cases}$ sont indépendantes, on a : $X+Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda+\mu)$

- Inégalité de Markov : Pour $X \geq 0$ et $a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}$$

Elle permet d'étudier la probabilité d'obtenir une valeur supérieure à une valeur a donnée.

- Inégalité de Bien-Aymé Tchebytchev : Pour $X \in L^2$ et $\varepsilon > 0$

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

Elle permet d'étudier les chances d'obtenir des valeurs éloignées ou proches de la moyenne.
Cette formule permet de démontrer la loi faible des grands nombres.