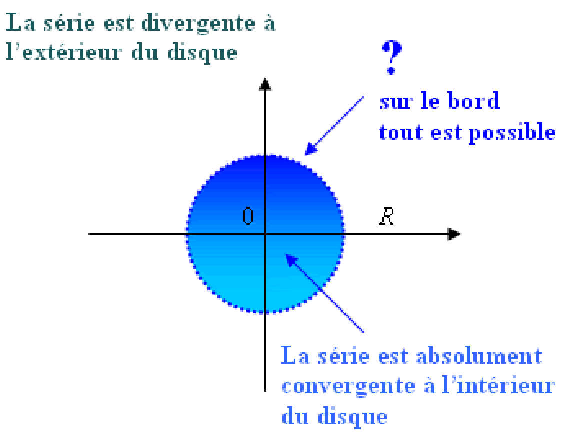
**SYNTHESE** : Les Séries Entières

$$\sum_{n\geq 0} a_n z^n$$

# I] Méthodes de détermination du Rayon de Convergence




- **Méthode 1** : Avec le critère de d'Alembert

Lorsque : $\dfrac{|a_{n+1}z^{n+1}|}{|a_n z^n|} \to l|z| \in \bar{\mathbb{R}}^+$.

- si $l|z| < 1$ cad si $|z| < \dfrac{1}{l}$ alors la série $\sum a_n z^n$ converge et donc $R \geq \dfrac{1}{l}$
- si $l|z| > 1$ cad si $|z| > \dfrac{1}{l}$ alors la série $\sum a_n z^n$ diverge et donc $R \leq \dfrac{1}{l}$

Conclusion : $R = \dfrac{1}{l}$ si $l > 0$ et $R = +\infty$ si $l = 0$.

♡ *Cette méthode s'applique également au cas des séries entières lacunaires :* $\sum a_n z^{2n}$ ...

- **Méthode 2** : Par comparaison entre séries entières

- $a_n = O(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$.
- $|a_n| \leq |b_n| \Rightarrow R_a \geq R_b$.
- $a_n = o(b_n) \Rightarrow R_a \geq R_b$.
- $|a_n| \sim |b_n| \Rightarrow R_a = R_b$.

En particulier :

- si $(a_n)$ est bornée alors $R \geq 1$.
- si $(a_n) \to 0$ alors $R \geq 1$.

Question fréquente : Comparer les Rayons de Convergence $\left\{ \begin{array}{l} R_a \\ R_b \end{array} \right.$ des deux séries entières $\left\{ \begin{array}{l} \sum a_n z^n \\ \sum b_n z^n \end{array} \right.$.

**Méthode** : Pour prouver que $R_a \leq R_b$

On considère $z$ tel que $|z_0| < R_a$ et on montre que $\sum b_n z_0^n$ converge absolument (CVA).

- **<u>Méthode 3</u>** : En prenant des valeurs particulières de $z$

Notons $R$ le rayon de convergence de $\sum a_n z^n$ :

- Si $\sum a_n z_0^n$ converge alors $R \geq |z_0|$
- Si $\sum a_n z_0^n$ diverge alors $R \leq |z_0|$

<u>En particulier</u> :

- Si $\sum a_n$ converge alors $R \geq 1$
- Si $\sum a_n$ diverge alors $R \leq 1$
- Si $a_n \not\to 0$ alors $R \leq 1$

- **<u>Somme et Produit</u>** : On note $\left\{ \begin{array}{l} R_a \\ R_b \end{array} \right.$ les rayons de convergence de $\left\{ \begin{array}{l} \sum a_n z^n \\ \sum b_n z^n \end{array} \right.$ .

- <u>Somme</u> :

  En notant $R_{a+b}$ le rayon de convergence de $\sum (a_n + b_n) z^n$, on a :

  $$R_{a+b} \geq \min(R_a, R_b) \quad \text{avec égalité lorsque} \quad R_a \neq R_b$$

- <u>Produit de Cauchy</u> :

  En notant $R_{a.b}$ le rayon de convergence de $\sum (c_n) z^n$ où $c_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_n b_{n_k}$, on a :

  $$R_{a.b} \geq \min(R_a, R_b)$$

## II] Régularité de la somme d'une série entière

- **<u>Pour les séries à variable complexe</u>** : Pour $\sum a_n z^n$, on note $R$ le rayon de convergence.

<u>Lemme</u> : $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout $\mathcal{B}_f(0,\ r)$ où $0 < r < R$.

$$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \text{ est définie et continue sur } \mathcal{B}(0,\ R)$$

*L'étude de la définition et de la continuité sur la sphère de rayon $R$ se fait au cas par cas.*

- **<u>Pour les séries à variable réelle</u>** : Pour $\sum a_n x^n$, on note $\left\{ \begin{array}{l} R \text{ le rayon de convergence} \\ S \text{ la somme de la série} \end{array} \right.$

<u>Lemme</u> : $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout $[-r,\ r]$ où $0 < r < R$.

La somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,\ R[$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a :

$$S^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k} \quad \forall x \in ]-R,\ R[$$

## III] Méthode de détermination d'un DSE

- **DSE à connaître** :

| | |
|---|---|
| $e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$ | $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ sur $]-1,\ 1[$ |
| $\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ sur $\mathbb{R}$ | $\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ sur $]-1,\ 1[$ |
| $\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ sur $\mathbb{R}$ | $(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ sur $]-1,\ 1[$ |
| $\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ sur $\mathbb{R}$ | $\arctan x = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ sur $]-1,\ 1[$ |

- **Méthode 1** : Par combinaison linéaire

**Exemple**

Retrouver le DSE de $\mathrm{ch}\, x$.

- **Méthode 2** : Par produit de Cauchy

**Exemple**

Déterminer le DSE de $e^x.\mathrm{ch}\, x$.

- **Méthode 3** : Par primitivation

Lorsque pour tout $x \in ]-R,\ R[$, on a : $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La primitive de $f$ qui s'annule de 0 admet pour DSE sur $]-R,\ R[$ :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

**Exemple**

Retrouver le DSE de $\ln(1-x)$ et de $\arctan x$.

- **Méthode 4** : Par dérivation

Lorsque pour tout $x \in ]-R,\ R[$, on a : $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

La dérivée de $f$ admet pour DSE sur $]-R,\ R[$ :

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

*Ce théorème se généralise aux dérivées nième.*

**Exemple**

Retrouver le DSE de $\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Remarque : Dans certains cas, on détermine un DSE de la dérivée de la fonction puis on primitive :

$$f(x) = \ln(1 + x + x^2)$$

- **Méthode 5** : A l'aide d'un équation différentielle

Pour déterminer le DSE de $f(x)$, on peut :

- Rechercher une équation différentielle linéaire vérifiée par $f$
- Rechercher les solutions DSE de cette équation différentielle
- Vérifier si l'une de ces solutions vérifie les mêmes conditions initiales que $f$

**Exemple**

Retrouver le DSE de $(1+x)^\alpha$.

- **Méthode 6** : A l'aide de la formule de Taylor

Rappel : S'il existe, le DSE de $f(x)$ est unique et est de la forme : $\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Pour déterminer le DSE de $f(x)$, on peut prouver que sa série de Taylor converge sur $]-R,\ R[$.
On utilise pour cela la majoration du reste :

$$|R_n(x)| \leq \frac{|x-t|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1} \quad \text{où} \quad M_{n+1} \text{ majore } |f^{(n+1)}(t)| \text{ sur } [a,\ x]$$

**Exemple**

Retrouver le DSE de $e^x$.

## IV] Applications des DSE

Le DSE d'une fonction sert en général à :

| | |
|---|---|
| **Calculer la somme d'une série numérique $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ avec Abel-Radial** | $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ |
| **Calculer une intégrale par échange de signes $\int \leftrightarrow \sum$ avec l'ITT** | $\int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t}\, \mathrm{d}t$ |
| **Prouver qu'une fonction est $\mathcal{C}^\infty$ sur un voisinage de $0$ et calcul de $f^{(n)}(0)$** | $f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ |
| **Etudier une VA naturel $X$ avec sa fonction génératrice $\mathcal{G}_X$** | $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ |
| **Rechercher une solution particulière d'une ED linéaire** | $(1+x^2)y' - xy = 1$ |

**Autres Applications possibles** :

- Comparer deux fonctions.

  Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\operatorname{ch} t \leq e^{\frac{t^2}{2}}$.

  - On compare terme à terme les DSE des deux fonctions

- Déterminer le terme général $a_n$ d'une suite numérique (Vu en TD)

- etc...