Les déterminants

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

7 avril 2011

Ce chapitre à pour objectif de redéfinir et généraliser les notions de déterminants d'ordres 2 et 3 vues en début d'année.

1 Formes n-linéaires alternées

DÉFINITION 1 : **Applications n-linéaires**
Soient deux $\mathbb{K}$-ev E et F.
On dit qu'une application $\phi : E^n \mapsto F$ est une application n-linéaire si et seulement si :

$\forall i \in [1,n]$, $\forall (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in E^{n-1}$, $\forall (x, y) \in E^2$, $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ on a :

$$\boxed{\phi(x_1,.., x_{i-1}, \lambda x + \mu y, x_{i+1},.., x_n) = \lambda \phi(x_1,.., x_{i-1}, x, x_{i+1},.., x_n) + \mu \phi(x_1,.., x_{i-1}, y, x_{i+1},.., x_n)}$$

Remarque 1.
1. En d'autres termes, ϕ est n-linéaire ssi ϕ est linéaire par rapport à chacune des variables, les autres étant fixées.
2. On note $\mathcal{L}^n(E, F)$ l'ensemble des applications n-linéaires sur E à valeurs dans F.
   Attention : cette notation est un peu ambigüe car une application n-linéaire est une application de E^n dans F.
3. On dira que $\phi \in \mathcal{L}^n(E, F)$ est une *forme n-linéaire* dès lors que $F = \mathbb{K}$.
   On note $\mathcal{L}^n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires. (cette notation n'a rien à voir avec les endomorphismes)

Remarque 2. Attention : $\mathcal{L}^p(E, F)) \neq \mathcal{L}(E^p, F)$

`Exemple 1.` Le produit vectoriel dans $\mathbb{R}^3$: $\begin{array}{cccc} \wedge : & \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (x, y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$ appartient à $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$.

PROPOSITION 1 : Soit $\phi \in \mathcal{L}^n(E, F)$.
$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:
1. $\phi(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0_E, x_{i+1}, \ldots, x_n) = 0_F$.
2. $\phi(\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n) = \lambda_1 . \cdots . \lambda_n . \phi(x_1, \ldots, x_n)$.

Preuve 1 : Immédiat.

DÉFINITION 2 : **Types d'applications n-linéaires**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\phi \in \mathcal{L}^n(E, F)$ et $v = (v_1, \ldots, v_b) \in E^n$.
On dira que :

1.	ϕ est *symétrique*	si	$\phi(v)$ est inchangée lorsqu'on échange la place de (transpose) 2 vecteurs v_i et v_j.
2.	ϕ est *antisymétrique*	si	$\phi(v)$ est transformé en son opposé lorsqu'on transpose 2 vecteurs.
3.	ϕ est *alternée*	si	$\phi(v) = 0$ dès lors que v comporte 2 vecteurs v_i et v_j identiques.

Exemple 2.

1. le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$ est une application bilinéaire antisymétrique.
2. $\phi : \begin{array}{ccc} C^0([0;1],\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \mapsto & \int_0^1 fg \end{array}$ est une forme bilinéaire symétrique.
3. $\phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u},\vec{v}) & \mapsto & \vec{u}.\vec{v} \end{array}$ est une forme bilinéaire symétrique.
4. $\phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & \det(x,y) \end{array}$ est une forme bilinéaire antisymétrique.

Théorème 2 : **Équivalence entre antisymétrique et alternée**
Pour toute application n-linéaire $\phi \in \mathcal{L}^n(E,F)$, on a :

$$\phi \text{ alternée} \iff \phi \text{ antisymétrique}$$

Preuve 2 :

1. Si ϕ est alternée, alors on considère $\phi(v_1,\dots,v_i+v_j,\ \dots,v_i+v_j,\ \dots,v_n)=0$
2. Si ϕ est antisymétrique, alors on considère $\phi(v_1,\dots,v_i,\ \dots,v_i,\ \dots,v_n)$

Proposition 3 : **Effet d'une permutation sur une application n-linéaire alternée**
Soit $\phi \in \mathcal{L}^n(E,F)$, $(v_1,\dots,v_n)\in E^n$ et $\sigma\in\mathfrak{S}_n$. Alors :

$$\boxed{\phi(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma).\phi(v_1,\ \dots,v_n)}$$

Preuve 3 : On décompose σ en produit de transpositions et on fait une récurrence sur le nombre de transpositions.

2 Déterminant d'un système de vecteurs

Dans toute la suite, nous nous intéresserons aux formes n-linéaires alternées sur un espace de dimension n.

Remarque 3. On notera $\mathcal{A}^n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un ev E de dimension n.

2.1 Définition de l'application déterminant

Exercice : 1

On considère un espace vectoriel E_2 de dimension 2, et (e_1,e_2) une base de cet espace.
Déterminer l'ensemble des formes 2-linéaires alternées.

Dans toute la suite du cours on considère désormais un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n.

Théorème 4 : **Si $\dim E = n$, alors $\mathcal{A}^n(E)$ est une droite vectorielle**
Soit $e=(e_1,\dots,e_n)$ une base de l'espace vectoriel E.
Soit :

$$\boxed{\det_e : \begin{array}{ccc} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (X_1,\dots,X_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma).x_{\sigma(1)1}\dots x_{\sigma(n)n} \end{array}} \quad \text{où} \quad \mathrm{Mat}_e(X_1,\dots,X_n) = ((x_{ij}))_{1\le i,j\le n}$$

Alors :

1. $\mathcal{A}^n(E)$ est la droite vectorielle engendrée par $\det_e$: $\mathcal{A}^n(E)=\mathrm{Vect}(\det_e)$.
2. $\det_e$ est l'unique forme n-linéaire alternée φ vérifiant $\varphi(e_1,\dots,e_n)=1$.

Preuve 4 :

1. On considère $\phi \in \mathcal{A}^n(E)$ et $(X_1, \dots, X_n) \in E^n$ tel que $\mathrm{Mat}_e(X_1, \dots, X_n) = ((x_{ij}))_{1\leq i,j\leq n}$.

   Calculons : $$\begin{aligned}\phi(X_1, \dots, X_n) &= \phi(\sum_{i=1}^n x_{i1}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n x_{in}e_i) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x_{\sigma(1)1}\dots x_{\sigma(n)n}.\phi(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)})\\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma).x_{\sigma(1)1}\dots x_{\sigma(n)n}.\phi(e_1, \dots, e_n)\\ &= \det_e(X_1, \dots, X_n).\phi(e_1, \dots, e_n)\end{aligned}$$

2. On démontre de façon directe que $\det_e \in \mathcal{A}^n(E)$.
   (a) La n-linéarité ne pose pas de difficulté.
   (b) On montre le caractère alterné en effectuant un changement d'indice $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$.
   (c) On montre que $\det_e(e_1, e_2, \dots, e_n) = 1$ en remarquant que $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $e_k = \sum_{i_k=1}^n \delta_{i_k k} e_{ik}$.

Remarque 4. ⚠ dans la notation $x_{\sigma(i)j}$: $\begin{cases} i \text{ donne la position du vecteur dans le n-uplet} \\ j \text{ indique qu'il s'agit d'une coordonnée du vecteur } X_j \end{cases}$.

Définition 3 : **Déterminant d'un système de vecteurs dans une base**
Soit un espace vectoriel E de dimension n et une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de cet espace.
Soit un système de n vecteurs $S = (X_1, \dots, X_n)$.
On note (x_{ij}) les coordonnées des vecteurs de S dans la base e.
On appelle *déterminant* du système S dans la base e, le scalaire :

$$\boxed{\det_e(S) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)x_{\sigma(1)1}\dots x_{\sigma(n)n}} \quad \text{que l'on note} \quad \det_e(S) = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

Remarque 5. On retrouve ainsi les formules du déterminant rencontrées en début d'année pour $n = 2$ et $n = 3$.

Exercice : 2
(**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E.
Montrer que il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (à déterminer) tel que $\sum_{j=1}^n \det_e(X_1 \dots, f(X_j), \dots, X_n) = \lambda. \det_e(X_1, \dots, X_n)$.

2.2 Propriétés de base

Proposition 5 : **Propriétés élémentaires du déterminant**

1. Echanger la place de deux vecteurs multiplie le déterminant par -1.
2. Si deux vecteurs sont identiques, le déterminant est nul.
3. Le déterminant d'un système lié est nul.
4. Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs ne change pas la valeur du déterminant.
5. Multiplier **un seul** des vecteurs par λ multiplie le déterminant par λ.
6. Multiplier tous les vecteurs par λ multiplie le déterminant par λ^n.

Preuve 5 : Pas de difficulté.

Théorème 6 : **Formule de changement de base**
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et $\begin{cases} e = (e_1, \dots, e_n) \\ e' = (e'_1, \dots, e'_n) \end{cases}$ deux bases de E.
Pour tout système $S = (X_1, \dots, X_n)$ de n vecteurs de E, on a :

$$\boxed{\det_{e'}(X_1, \dots, X_n) = \det_{e'}(e) \times \det_e(X_1, \dots, X_n)}$$

Preuve 6 : Les déterminants dans deux bases e et e' de E sont deux formes n-linéaires alternées de E.
Ils sont donc proportionnels ...

Remarque 6. Sachez retrouver cette formule en retenant que $\det_e$ et $\det_{e'}$ sont proportionnels.

L'intérêt principal du déterminant réside dans la propriété suivante :

Théorème Fondamental 7 : **Caractérisation des bases**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n de base e et $S = (X_1, \dots, X_n)$ un système de n vecteurs de E. Alors :

$$S \text{ est une base de } E \iff \det_e(X_1, \dots, X_n) \neq 0$$

Preuve 7 :
- $\Rightarrow$ Il suffit d'utiliser la formule de changement de bases précédente.
- $\Leftarrow$ Par contraposée en utilisant le fait que $\det_e \in \mathcal{A}^n(E)$ ...

Exercice : 3

$(*)$ Soit $e = (1 + X + X^2, 1 + 2X + 4X^2, 1 + 3X + 9X^2)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.
Montrer que e est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

Définition 4 : **Orientation d'une base**
Soient e et e' deux bases de E un $\mathbb{R}$-ev.
On dira que :
1. e et e' ont la même orientation si et seulement si $\det_e(e') > 0$
2. e et e' ont une orientation opposée si et seulement si $\det_e(e') < 0$

`Exemple 3.` Vérifier sur un exemple en dimension 2 que cette définition de l'orientation de deux bases est bien cohérente avec votre connaissance intuitive de cette notion.

3 Déterminant d'un endomorphisme

Il est plus judicieux de commencer par définir la notion de *déterminant d'un endormorphisme* avant celle de *déterminant d'une matrice*, car les propriétés du premier se transfèrent très facilement au second.

Définition 5 : Soit φ un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base de E.
Le déterminant de φ dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$\det_{\mathcal{B}}(\varphi) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)) \quad = \det_{\mathcal{B}}(\varphi(\mathcal{B}))$$

Théorème Fondamental 8 : Le déterminant d'un endomorphisme est indépendant de la base choisie.

Preuve 8 : Soit $\varphi \in L(E)$ et $\begin{cases} \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \\ \mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n) \end{cases}$ deux bases de E.
1. Comme l'application $(u_1, \dots, u_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}'}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n))$ est une forme n-linéaire alternée, on démontre facilement que : $\det_{\mathcal{B}'}(\varphi(u_1), \dots, \varphi(u_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(\varphi(\mathcal{B}')).\det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots, u_n)$.
Puis, on applique cette formule à $(e_1, \dots, e_n)$.
2. On applique ensuite la formule de changement de base à $\det_{\mathcal{B}'}(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$.
3. Il ne reste plus qu'à conclure ...

Remarque 7. Contrairement au déterminant d'un système de vecteurs, on pourra donc parler du *déterminant d'un endomorphisme* sans précisez de base. Pour le calcul de ce déterminant, nous pourrons donc choisir la base qui nous convient le mieux.

`Exemple 4.` $(*)$ On munit l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique et on considère $E_1 = \text{Vect}((1, 1))$.
Déterminer le déterminant de la symétrie orthogonale par rapport à E_1 et de la projection orthogonale sur E_1.

Exercice : 4

$(*)$ Soit $V = \{x \mapsto e^x.P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.
1. Montrer que V est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.
2. Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

Théorème 9 : **Propriétés du déterminant d'endomorphismes**
Soit E de dimension n et considérons deux endomorphismes $(\varphi, \psi) \in L(E)^2$.
Alors :

1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1_{\mathbb{K}}$
2. $\det(0_E) = 0_{\mathbb{K}}$
3. $\det(\lambda\varphi) = \lambda^n \det(\varphi)$
4. $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$

Preuve 9 :

1. Par définition du déterminant.
2. Evident.
3. Evident.
4. (a) Si ψ n'est pas un automorphisme, alors la démonstration est évidente.
   (b) Sinon, on note $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (\psi(e_1), \ldots, \psi(e_n))$ deux bases de E.
   On calcule alors $\det \varphi \circ \psi$ en se plaçant dans la base $\mathcal{B}$, puis en effectuant un changement de base.

Théorème Fondamental 10 : **Caractérisation des automorphismes**

1. $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \iff \det(\varphi) \neq 0$
2. Si $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$, alors : $\det(\varphi^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\varphi)}$

Preuve 10 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

1. φ est un automorphisme de $E \iff (\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ est une base de $E \iff \det_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n)) \neq 0$.
2. Immédiat avec la formule $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$.

Exercice : 5

($*$) Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$ tels que $u^2 = -\mathrm{id}_E$.
Montrer que la dimension de E est paire et que $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$.

Remarque 8.

1. L'application $\det : L(E) \mapsto \mathbb{K}$ n'est pas linéaire. En général : $\det(u + v) \neq \det(u) + \det(v)$.
2. Le déterminant est un morphisme de groupes :

$$\det : \begin{array}{ccc} \big(\mathrm{GL}(\mathbb{E}), \circ\big) & \longrightarrow & \big(\mathbb{R}^\star, \times\big) \\ u & \mapsto & \det(u) \end{array}$$

4 Déterminant d'une matrice

Définition 6 : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
Le déterminant de A est le déterminant des vecteurs colonnes de A.

Ainsi : Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ alors :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Remarque 9. Le déterminant d'une matrice A est donc un polynôme en les coefficients de A où chaque coefficient est de degré ≤ 1 au plus.

`Exemple 5.` ($**$) Soient $A = (a_{ij})$ et $B = ((-1)^{i+j} a_{ij})$, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer leurs déterminants ...

Théorème 11 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de l'espace E.
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$.
On a alors :

$$\det(u) = \det(A)$$

Preuve 11 : Pas de difficulté !

Remarque 10. Ce résultat va nous servir de passerelle pour transférer aux matrices les résultats démontrés au paragraphe précédent.

Théorème Fondamental 12 : **Propriétés du déterminant d'une matrice**
Soit deux matrices carrées A, $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On a les propriétés suivantes :

P1 : A inversible $\iff \det(A) \neq 0$ et dans ce cas $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

P2 : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Preuve 12 : Il suffit de considérer les endomorphismes canoniquement associés à u et v.

`Exemple 6.` $(*)$

1. Prouver que la matrice suivante est inversible : $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 2i \\ i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$.
2. Un produit de matrices AB peut-il être inversible si l'une des deux matrices ne l'est pas ?
3. Montrer, à l'aide de deux arguments distincts que deux matrices semblables ont le même déterminant.

Exercice : 6

$(*)$ L'objectif est de calculer le déterminant de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2a+3 & 3a^2+4a \\ 1 & 2b+3 & 3b^2+4b \\ 1 & 2c+3 & 3c^2+4c \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Exprimez A comme le produit de 2 matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.
2. En déduire une expression factorisée du déterminant de A.

Exercice : 7

$(**)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$, $A + xB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Voici quelques propriétés utiles permettant de simplifier le calcul d'un déterminant :

Théorème 13 : **Propriétés immédiates**
Soient $C_1, \ldots, C_n$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ (n=2 ou 3).

P1 : On ne change pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à une colonne une CL des autres colonnes.
$\det(C_1, \ldots, C_i + \sum_{k\neq i} \lambda_k C_k, \ldots, C_n) = \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$.

P2 : $\det(C_1, \ldots, \lambda C_i, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_i, \ldots, C_n)$.

P3 : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

P4 : Inverser deux colonnes change le signe du déterminant.

Preuve 13 : C'est un transfert des propriétés connues sur le déterminant d'un système de vecteurs.

`Exemple 7.` $(*)$ Prouver sans le calculer, que le déterminant de la matrice suivante est nul : $A = \begin{pmatrix} 2a & a+b & a+c \\ a+b & 2b & b+c \\ a+c & b+c & 2c \end{pmatrix}$.

Théorème 14 : $\det(A) = \det({}^tA)$.
Ainsi, les propriétés précédentes citées sur les colonnes de la matrices sont encore vraies sur les lignes.

Preuve 14 : Remarquons que : $\det({}^tA) = \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$.

$\left\{\begin{array}{l}\text{En posant } j=\sigma(i)\\ \text{et donc } i=\sigma^{-1}(j)\end{array}\right.$ on a alors : $\det({}^tA) = \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)j}$.

Or $\varepsilon(\sigma)=\varepsilon(\sigma^{-1})$ donc $\det({}^tA) = \displaystyle\sum_{\sigma^{-1}\in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)j} = \det A$.

Remarque 11. D'après le théorème précédent, les OEL d'un déterminant produit le même effet qu'une OEC. Vérifions si vous avez compris : Que se passe-t-il si on intervertit deux lignes dans le calcul d'un déterminant ?

`Exemple 8.` (∗) Prouver sans le calculer, que le déterminant de la matrice suivante est nul : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

Que dire plus généralement des matrices antisymétriques ?

Exercice : 8

(∗∗) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

Théorème 15 : **Application du déterminant à la résolution des systèmes de Cramer**
Soit $\mathcal{S}$ un système de Cramer d'expression matricielle $AX = b$. $(A \in GL_n(\mathbb{K}))$.
On note $(c_1, \ldots, c_n)$ les vecteurs colonnes de A.
On a alors :

$$\forall j \in \{1;n\}, \quad x_j = \frac{\det(c_1, \ldots, c_{j-1}, b\, c_{j+1}, \ldots, c_n)}{\det A}$$

Preuve 15 : Il suffit de calculer $\det(c_1, \ldots, c_{j-1}, b\, c_{j+1}, \ldots, c_n)$.

Remarque 12. Cette formule n'a en fait que très peu d'intérêt en pratique. Même si elle semble simple, elle engendre en effet beaucoup trop de calculs. On lui préférera donc en générale la méthode du pivot.

`Exemple 9.` Appliquer ces formules pour résoudre un système quelconque de votre choix.

5 Méthodes de calcul du déterminant d'une matrice

La formule qui définit le déterminant d'un système de vecteurs ne permet pas un calcul aisé de celui-ci. Nous allons donc passer en revue une certain nombre de méthodes plus opérationnelles.

5.1 En dimension 2 et 3

Méthodes déjà rencontrées en début d'année ...
Vous pouvez retrouver sans difficulté les formules connues à partir de la définition donnée dans ce chapitre.

5.2 Déterminant d'une matrice triangulaire

Théorème 16 : Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Preuve 16 : On a $\det(A) = \displaystyle\sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1)1}\ldots a_{\sigma(n)n}$.
Or, le seul terme non nul de cette somme est $a_{\sigma(1)1}\ldots a_{\sigma(n)n}$ où $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in \{1,n\}$.

Remarque 13.

1. A fortiori, le déterminant d'une matrice diagonale s'obtient en multipliant les coefficients diagonaux.
2. On retrouve le fait qu'une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont non nuls est inversible.

5.3 Calcul par blocs

THÉORÈME 17 : Si $\begin{cases} A \text{ est une matrice } p\times p \\ B \text{ une matrice carrée } q\times q \text{ telles que } p+q=n \\ C \text{ une matrice rectangulaire } p\times q \end{cases}$. On a alors :

$$D = \begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$$

Preuve 17 :

1. Considérons D comme une fonction f des vecteurs colonnes de A (on fixe les autres colonnes).
   On peut sans difficulté affirmer que dans ce cas D est une application de $\mathcal{A}^p(\mathbb{K}^p)$ que l'on notera f.
   Par conséquent, $D = f(A) = \det(A).f(e_1,\dots,e_p)$ où $(e_1,\dots,e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$.
   Ainsi : $D = \det(A).\begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$.
2. On effectue un raisonnement semblable sur le déterminant de la transposée de la matrice $\begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
3. Ainsi : $D = \det(A).\det(B).\begin{vmatrix} I_p & 0_q \\ {}^tC & I_q \end{vmatrix}$ et comme $\begin{vmatrix} I_p & 0_q \\ {}^tC & I_q \end{vmatrix} = 1$ ...

Remarque 14. Attention, ce résultat ne se généralise pas aux matrices non diagonales par blocs !! Trouvez un contre exemple pour vous en convaincre ...

`Exemple 10.` (∗) Calculer le déterminant suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \pi & \ln 2 & 17 \\ 3 & 4 & e & \ln 7 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Exercice : 9

(∗∗) Soient A, B, C et D des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent deux à deux et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M \times \begin{pmatrix} I_n & -N \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ pour $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Supposons que A est inversible.
   En choisissant N judicieusement, montrer que $\det M = \det(AD - BC)$.

5.4 Développement d'un déterminant par rapport à une ligne (ou une colonne)

Il s'agit d'une méthode assez rapide pour calculer un déterminant, surtout lorsque celui-ci comporte un nombre important de 0.

DÉFINITION 7 : **Cofacteurs**
Soit Δ le déterminant d'une matrice $n\times n$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. On note m_{ij} le déterminant $(n-1)\times(n-1)$ obtenu en barrant la ième ligne et la jième colonne de Δ.
   m_{ij} s'appelle le *mineur* relatif à a_{ij}
2. On appelle *cofacteur* de Δ relatif à a_{ij}, le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$

Cofacteur Δ_{ij} d'un déterminant :

Remarque 15. pour se souvenir du coefficient $(-1)^{i+j}$ du cofacteur Δ_{ij}, on place un signe $+$ sur le premier coefficient puis on répartit de façon alternée les signes $+$ et $-$ au niveau des autres coefficients de la matrice.

THÉORÈME 18 : **Développement d'un déterminant par rapport à une ligne-colonne**
Soit un déterminant $n \times n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. Développement par rapport à la jième colonne : $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$
2. Développement par rapport à la ième ligne : $\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$

Preuve 18 : Démontrons ici la formule de développement par rapport à la j^{eme} colonne C_j.

Idée : On décompose C_j en $C_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, puis on applique la linéarité par rapport à la j^{eme} variable ...

Remarque 16. Pour calculer un déterminant $n \times n$, on dispose donc de la stratégie générale suivante :

1. Retrancher aux colonnes (lignes), un multiple d'une colonne (ligne) choisie afin de faire apparaître des 0 sur la ligne choisie (colonne).
2. Développer le déterminant par rapport à cette ligne (colonne).
3. Recommencer avec le déterminant $(n-1) \times (n-1)$ obtenu, jusqu'à aboutir à un déterminant 3×3 que l'on sait calculer.

`Exemple 11.` $(*)$ Calculer les deux déterminants suivants : $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ et $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice : 10

$(*)$ Soient a et c deux réels. Soient $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (a, 0, c)$ et $e_3 = (a^2, 1, c^2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
A quelle condition ces 3 vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice : 11

$(*)$ Trouver une CNS sur les réels a, b et c pour que la matrice suivante soit inversible : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

Exercice : 12

$(**)$ Calculer le déterminant de la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{N})$ de terme général : $a_{ij} = \sup\{i\ ;j\}$

Exercice : 13

($*$) Calculer le déterminant de l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ défini par $f \ : \ M \mapsto {}^tM$.

Théorème 19 : **Application au calcul de l'inverse d'une matrice**

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle la *comatrice* de A, la matrice définie par : $\widetilde{A} = (\Delta_{ij})_{(i,j)\in\{1;n\}^2}$.

On a alors le résultat suivant : $A.{}^t\widetilde{A} = \det A.I_n$

Dans la cas où A est inversible, on a alors : $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}.{}^t\widetilde{A}}$

Preuve 19 : Il s'agit de démontrer que :

1. $(A.{}^t\widetilde{A})_{ii} = \det A$ — Pas de difficulté
2. $(A.{}^t\widetilde{A})_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ — Pour cela on introduira la matrice N_{ij} obtenue en remplaçant la j^{eme} ligne de A par la i^{eme}

Remarque 17. Dans le cas d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{K})$ on a alors la formule : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

`Exemple 12.` ($*$)

1. Choisir une matrice inversible 4×4 et en déterminer son inverse par la méthode précédente.
2. Confirmer le résultat obtenu en calculant l'inverse par inversion de système.
3. Comparer l'efficacité des deux méthodes.

Remarque 18. Peut-on exprimer le déterminant de la comatrice $\widetilde{A}$ en fonction du déterminant de A ?

Exercice : 14

($**$) Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.

1. Justifier que $\det A \in \mathbb{Z}$
2. Montrer que l'inverse de A existe et est à coefficients entiers si et seulement si $\det A = \pm 1$

5.5 Utilisation d'une formule de récurrence

Lorsque la structure d'un déterminant est répétitive, on peut tenter d'exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}, Δ_{n-2} ...

Exercice : 15

($**$) Trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par : $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & c & & & \mathbf{0} \\ b & a & c & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ \mathbf{0} & & & b & a \end{vmatrix}$

Application : En déduire le déterminant Δ_n dans le cas où $a = 2$ et $b = c = 1$.

Exercice : 16

($* * *$)

Calculer le déterminant d'ordre n suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice : 17

($**$) Soient $a \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} X \in \mathfrak{M}_{1n}(\mathbb{R}) \\ Y \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}) \end{cases}$. Prouver que : $\det \begin{pmatrix} I_n & Y \\ X & a \end{pmatrix} = a - XY$