Les équations différentielles linéaires

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

17 octobre 2010

Dans ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction y de variable t (par exemple), et dans laquelle peuvent figurer : la variable t, la fonction y et ses dérivées successives.

1 Le théorème fondamental du calcul

DÉFINITION 1 : **Primitives**
Soit un *intervalle* I et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $F : I \mapsto \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si

1. la fonction F est dérivable sur l'intervalle I
2. $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$

Remarque 1. Attention !!!
Vous remarquerez ici que l'on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ et non un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}$.

PROPOSITION 1 :
Si f est une fonction dérivable sur un $\boxed{\text{intervalle } I}$.
Si $\forall x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est une fonction constante sur I.

Preuve 1 : Admis pour l'instant ...

Remarque 2. Trouver une fonction dérivable non constante dont la dérivée est nulle.

COROLLAIRE 2 : Deux primitives de f sur un intervalle I sont égales à une constante près.

Preuve 2 : Soit F_1 et F_2 deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle $[a, b]$.
On considère alors la fonction $F = F_1 - F_2$ et on la dérive ...

THÉORÈME 3 : **Existence de primitives d'une fonction continue**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur un *intervalle* I. La fonction f admet des primitives sur l'intervalle I.
En particulier, si l'on considère un point $a \in I$, la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a et est de classe $\mathcal{C}^1$.

Preuve 3 : Admis pour l'instant.

Remarque 3. Il existe des fonctions non continues qui admettent des primitives.

2 Equations linéaires du premier ordre

2.1 Introduction

DÉFINITION 2 :

1. On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre*, toute équation différentielle de la forme

$$\boxed{(E)\ :\ a(t)y' + b(t)y = f(t)}$$

avec a, b et f, 3 fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

2. On dit que l'équation est *normalisée* si elle s'exprime sous la forme

$$\boxed{(E)\ :\ y' + a(t)y = f(t)}$$

avec a et f deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque 4.

1. On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des fonctions y solutions de l'équation différentielle (E).
2. On dit que deux équations différentielles sont *équivalentes* lorsqu'elles ont même ensemble de solutions.
3. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle *courbe intégrale* de l'équ. diff., une courbe représentative d'une solution $y \in \mathcal{S}_E$.

DÉFINITION 3 : **Solution d'une Equation différentielle**

On dit que $u\ :\ I \mapsto \mathbb{K}$ est solution sur I de $\boxed{(E)\quad a(t)y' + b(t)y = f(t)}$ ssi :

1. u est une fonction dérivable sur I
2. $\forall t \in I, \quad a(t)u'(t) + b(t)u(t) = f(t)$

`Exemple 1.` Déterminer une équation différentielle dont la fonction f définie par $f(t) = t.e^{2t}$ est solution sur $\mathbb{R}$.

Remarque 5. *Résoudre* (on dit aussi *intégrer*) sur I une équation différentielle (E) consiste à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions sur I de (E). Il sera néanmoins nécessaire de préciser si l'on recherche les solutions réelles ou les solutions complexes de l'équation.

L'objectif de cette partie est de déterminer des méthodes de résolution d'une équation différentielle de la forme : $(E)\ :\ y' + a(t)y = f(t)$ sur un intervalle I.

2.2 Résolution

Soit (E) une équation différentielle de la forme $\boxed{y' + a(t).y = f(t)}$ avec a et f continues sur I.

DÉFINITION 4 : On appelle *équation homogène* associée à (E), l'équation (avec second membre nul) :

$$(H)\quad y' + a(t)y = 0$$

THÉORÈME 4 : **Solutions de l'équation homogène** $(H)\quad y' + a(t)y = 0$

Soit $A : I \mapsto \mathbb{K}$ une primitive de la fonction $a(t)$ sur l'intervalle I.

L'ensemble des solutions de (H) est alors : $\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ce^{-A(t)}\ ;\ C \in \mathbb{K}\}}$

Preuve 4 : On multiplie l'équation par $e^{A(t)}$ et on reconnaît la dérivée d'une fonction.

Remarque 6. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène (H) est une droite vectorielle de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$.
On note : $\mathcal{S}_H = \mathrm{Vect}(t \to e^{-A(t)})$.

`Exemple 2.`

1. Rechercher les solutions complexes de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 0$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

2. Trouver l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 2$.
3. Dessiner l'ensemble des courbes intégrales.

`Exemple 3.` Déterminer les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ de l'équation différentielle (E) : $(1+t^2)y' + 4ty = 0$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.

Exercice : 1

Résolution de l'équation fonctionnelle $f(t+u) = f(t).f(u)$

Déterminer l'ensemble des applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant la relation $f(t+u) = f(t).f(u)$.

Théorème 5 : **Solutions de l'équation complète** (E) : $y' + a(t).y = f(t)$ **(**a**,** f **continues sur** I**)**

Soit $\widetilde{y}$ une solution particulière de (E).

L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ de (E) sur l'intervalle I est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{t \mapsto Ce^{-A(t)} + \widetilde{y}(t) \ ; \ C \in \mathbb{K}\}}$$

Preuve 5 : Il suffit de raisonner par équivalences successives : "y sol de (E)" $\Longleftrightarrow \dots$

Remarque 7. On dit que $\mathcal{S}$ est la *droite affine* de $\mathcal{F}(I,\mathbb{K})$ passant par $\widetilde{y}$ et de direction $\mathrm{Vect}(t \mapsto e^{-A(t)})$.
On note aussi : $\mathcal{S}_E = \widetilde{y} + \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{-A(t)})$.

Résolution pratique d'une équation de la forme $y' + a(t)y = f(t)$

1. On résout l'équation homogène :
   La solution générale de l'équation homogène est de la forme :
   $$t \mapsto Ce^{-A(t)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C \in \mathbb{K} \\ A \text{ une primitive de } a \text{ sur } I \end{cases}$$
2. On cherche une solution particulière $\widetilde{y}$.
3. On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation complète : $\mathcal{S}_E = \widetilde{y} + \mathrm{Vect}(t \mapsto e^{-A(t)})$.

Recherche d'une solution particulière

1. (a) On commence par regarder s'il existe une solution évidente.
   (b) Sinon, on peut présumer de la forme d'une solution et procéder par identification.
   (c) Enfin, la méthode de la *variation de la constante* montre que l'on peut chercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme $\widetilde{y}(t) = C(t)e^{-A(t)}$ où $C(t)$ est une fonction dérivable sur I vérifiant :
   $$\boxed{C'(t)e^{-A(t)} = f(t)}$$
2. Lorsque le second membre est de la forme $f(t) = f_1(t) + \dots + f_n(t)$, on pourra utiliser le principe de superposition des solutions qui dit que :
   Si l'on connaît des solutions particulières $\widetilde{y_1}, \dots, \widetilde{y_n}$ des équations avec seconds membres $f_1(t), \dots, f_n(t)$, alors la fonction
   $$\boxed{\widetilde{y}(t) = \widetilde{y_1}(t) + \dots + \widetilde{y_n}(t)}$$
   est une solution particulière de l'équation (E)

Remarque 8. La démonstration de la méthode de variation de la constante prouve l'existence de solutions de (E).

Exercice : 2

Rechercher sur $I = \mathbb{R}$, les solutions complexes des équations différentielles suivantes :

1. $y' + ty = t$
2. $y' + \dfrac{t}{t^2+1}y = \dfrac{1}{t^2+1}$
3. $y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$
4. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$

Théorème 6 : **Résolution du problème de Cauchy**
On appelle *problème de Cauchy*, la résolution d'une équation différentielle vérifiant une condition initiale.
Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Soit a et f deux fonctions continuent sur I.

$$\boxed{\text{Il existe une et une seule solution de } (E)\ :\ y' + a(t)y = f(t) \text{ vérifiant } y(t_0) = y_0.}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela signifie qu'il existe une unique courbe intégrale de (E) passant par le point de coordonnées $(t_0,\, y_0)$.

Preuve 6 : Facile !

Exercice : 3

Considérons un circuit RC monté en série aux bornes d'un générateur qui délivre une tension $V(t)$.
On appelle $u(t)$ la tension à l'instant t aux bornes du condensateur.
Cette tension vérifie l'équation diférentielle suivante : $RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = V$.

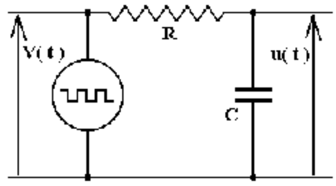

Fig. 1 – *Circuit RC en série*

L'objectif de cet exercice est d'étudier la forme du signal u selon la nature de la tension fournie par le générateur. Pour faciliter les calculs, nous pourrons supposer que $RC = 1$.

1. On suppose que le générateur délivre une tension continue V constante égale à 1 volt.
   Déterminer la représentation graphique de u entre $t = 0$ et $t = 3$ lorsque $u(0) = 0$.

2. On suppose que le générateur délivre une tension alternative V telle que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} V(t) = 1 & \text{si } 2p \leq t < 2p+1 \\ V(t) = 0 & \text{si } 2p+1 \leq t < 2p+2 \end{cases}$
   Déterminer la représentation graphique de u entre $t = 0$ et $t = 3$ lorsque $u(0) = 0$.

3. On suppose que le générateur délivre une tension alternative V telle que : $V(t) = 2\cos(2\pi t)$.
   Déterminer la représentation graphique de u entre $t = 0$ et $t = 3$ lorsque $u(0) = 0$.

3 Méthode d'Euler

Comment déterminer les solutions réelles d'une équation différentielle de la forme $y' + a(t).y = b(t)$ lorsqu'on ne sait pas trouver une primitive de la fonction a ? Une méthode algorithmique appelée *la méthode d'Euler* permet d'obtenir une approximation de la courbe intégrale passant par un point de coordonnées $(t_0,\, y_0)$ donné. Cette méthode sera appliquée lors d'un TD Maple.

Remarque 9. Comme toute solution u de $y' + a(t).y = f(t)$ vérifie $u'(t) = -a(t).u(t) + f(t)$, on connait en tout point de $I \times \mathbb{R}$ le vecteur tangent à la courbe intégrale passant par ce point. La méthode d'Euler utilise cette constatation pour déterminer des approximations des courbes intégrales. La méthode reste valable dans le cas d'une équation différentielle de la forme $y' = g(y,\, t)$.

Dessin

Champs de vecteurs et méthode d'Euler

Soit (E) $\quad y' + a(t).y = f(t)$ $\quad$ définie sur un intervalle $I = [\alpha\ ;\ \beta]$
Soit $y_0 \in \mathbb{R}$.
Soit φ, la solution de (E) telle que $\varphi(\alpha) = y_0$.
On cherche à déterminer une approximation de la courbe intégrale $\mathcal{C}_\varphi$ sur l'intervalle I.

Etape 1 : Subdivision.

On commence par fixer la valeur du nombre de points recherchés n .
Puis on décompose $[\alpha\ ;\ \beta]$ en une réunion de n intervalles de longueur $p = \dfrac{\beta - \alpha}{n}$.

Etape 2 : Approximation de $\mathcal{C}_\varphi$ sur $[\alpha\ ;\ \alpha + p]$.

Au point $A(\alpha, y_0)$, la pente de la tangente à $\mathcal{C}_\varphi$ vaut $\varphi'(\alpha) = -a(\alpha).\varphi(\alpha) + f(\alpha) = -a(\alpha).y_0 + f(\alpha)$.
On peut donc facilement tracer cette tangente Δ_1 !
On décide alors d'approximer $\mathcal{C}_\varphi$ par Δ_1 sur $[\alpha; \alpha + p]$.
Plus n sera grand, plus p sera petit et plus cette approximation sera bonne.

Etape 3 : Approximation de $\mathcal{C}_\varphi$ sur $[\alpha + p\ ;\ \alpha + 2p]$.

On réïtère le raisonnement précédent en supposant que la courbe $\mathcal{C}_\varphi$ passe par l'extrémité du segment tracé dans l'étape précédente. Bien entendu, il s'agit là encore d'une approximation !
On poursuit ainsi la méthode sur chacun des intervalles $[\alpha + ip\ : \alpha + (i + 1)p]$.

La courbe obtenue est une approximation de la courbe intégrale cherchée !

Méthode d'Euler :

Remarque 10. Les erreurs s'accumulent au fil des réitérations. Ainsi, la courbe dessinée s'écarte progressivement de la courbe intégrale recherchée.

`Exemple 4.`
Donner la relation reliant les ordonnées successives de deux points A_n et A_{n+1} obtenus par la méthode d'Euler.

`Exemple 5.`
Appliquer la méthode d'Euler pour tracer sur l'intervalle [0 ; 4] une approximation de la courbe intégrale de l'équation différentielle $y' = \dfrac{2\sqrt{x}+1}{x+1}.y+1$ passant par O.

4 Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

On rappelle que dans ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ représente encore $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans cette partie, on s'intéresse à la résolution des équations différentielles de la forme

$$\boxed{(E): \quad y'' + ay' + by = f(t)}$$

Définition 5 : **Equation linéaire du second ordre à coefficients constants**
Soient $(a, b) \in \mathbb{K}^2$, et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $u : I \mapsto \mathbb{K}$ est une solution de l'équation différentielle

$$\boxed{(E): \quad y'' + ay' + by = f(t)}$$

si

1. u est une fonction deux fois dérivable sur I ;
2. $\forall t \in I,\ u''(t) + au'(t) + bu(t) = f(t)$.

On notera $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) sur I.

`Exemple 6.` **Circuit RLC**.
Un circuit RLC vérifie une équation différentielle de la forme $y'' + \dfrac{w_o}{Q_0}y' + w_0^2 y = f(t)$ avec :

1. $w_0 = \sqrt{LC}$
2. y représentant la charge circulant dans le circuit et $Q_0 = \dfrac{1}{RCw_0}$ si le circuit est en série.
3. y représentant la tension aux bornes du condensateur et $Q_0 = RCw_0$ si le circuit est en parallèle.
4. f non nulle si le régime est forcé (présence d'un générateur).

Ce chapitre doit nous permettre de résoudre une telle équation dans le cas des régimes forcés habituels (f : tension continue, en créneau, sinusoïdale).

4.1 Résolution de l'équation homogène $(\mathcal{H})$

On considère l'équation homogène $(H): \quad y'' + ay' + by = 0$ et l'on note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de ses solutions (à valeurs dans $\mathbb{K}$) sur I.

Définition 6 : L'équation $(C): \quad r^2 + ar + b = 0$ est appelée l'*équation caractéristique* associée à $(\mathcal{H})$.

Théorème 7 : **Solutions complexes de** $(\mathcal{H})$
L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions complexes de $(\mathcal{H})$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 2.
Et :

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \text{Vect}(t \mapsto e^{r_1 t},\, t \mapsto e^{r_2 t}) = \{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \mid (A,\, B) \in \mathbb{C}^2\}}$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double $r \in \mathbb{C}$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \text{Vect}(t \mapsto e^{rt},\, t \mapsto te^{rt}) = \{t \mapsto (A + Bt)e^{rt} \mid (A,\, B) \in \mathbb{C}^2\}}$$

Preuve 7 : L'idée de cette démonstration est intéressante !
Soit r une solution de (C). On commence par vérifier que la fonction $t \mapsto e^{rt}$ est bien solution de (H).
Puis, on recherche les solutions de (H) sous la forme : $t \mapsto C(t).e^{rt}$.

PROPOSITION 8 : $\mathcal{S}_H$ est dans chaque cas, engendrée par deux fonctions linéairement indépendantes.
On dira que c'est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2 et que les deux fonctions forment une *base* de cet espace vectoriel.

Preuve 8 : Soient $\left\{ \begin{array}{l} u \\ v \end{array} \right.$ telles que $\mathcal{S}_H = \text{Vect}(u, v)$. Il s'agit de prouver que $\lambda u + \mu v = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{array} \right.$.

`Exemple 7.` Déterminer les solutions complexes des équations différentielles suivantes : $\left\{ \begin{array}{lcl} (E_1) & : & y'' - (2-i).y' - 2iy = 0 \\ (E_2) & : & y'' + (1-i)y = 0 \end{array} \right.$.

`Exemple 8.` Déterminer une équation différentielle dont les fonctions suivantes sont solution :

1. $\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto e^{2x} \\ x \mapsto e^{-x} \end{array} \right.$
2. $\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto e^{x} \\ x \mapsto x.e^{x} \end{array} \right.$

En pratique, on est souvent amené à rechercher les solutions réelles d'équations différentielles à coefficients réels.
On utilisera donc plutôt le théorème suivant :

THÉORÈME 9 : **Solutions réelles de** $(\mathcal{H})$
Lorsque $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on peut d'intéresser uniquement aux solutions $y : I \mapsto \mathbb{R}$ réelles.
L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions réelles est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}}$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double $r \in \mathbb{R}$, alors :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto (A + Bt)e^{rt} \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}}$$

3. Si l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $\left\{ \begin{array}{l} r_1 = \alpha + i\beta \\ r_2 = \alpha - i\beta \end{array} \right.$, alors :

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Preuve 9 : Il s'agit de rechercher parmi les solutions complexes de l'équation, celles qui sont réelles !

`Exemple 9.` Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'' = \omega^2 y$,
   $y'' = -\omega^2 y$ puis $y'' + 3y = 0$.
2. $y'' - 5y' + 6y = 0$
3. $y'' - 4y' + 4y = 0$

`Exemple 10.` Déterminer une équation différentielle dont les fonctions suivantes $\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto e^{2x}.\cos x \\ x \mapsto e^{2x}.\sin x \end{array} \right.$ sont solutions.

Exercice : 4

Discuter la nature des solutions réelles de l'équation différentielle décrivant le circuit RLC en régime libre ($f(t) = 0$).

Exercice : 5

En régime libre (absence de stimulation extérieure) et pour des petites oscillations, l'angle que fait un pendule avec la verticale vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E) \qquad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\omega\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \omega^2\theta = 0$$

En supposant qu'à $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$, déterminer la fonction θ.

Réponse : On obtient un mouvement pseudo-périodique : $\theta(t) = \theta_0 e^{-\lambda\omega t}\cos(\sqrt{1-\lambda^2}\omega t + \varphi)$

4.2 Résolution de l'équation avec second membre exponentielle-polynôme

On considère l'équation complète $\boxed{(\mathcal{E}) \ : \quad y'' + ay' + by = f(t)}$ avec $\begin{cases} (a,\, b) \in \mathbb{C}^2 \\ f \text{ continue sur } I \end{cases}$.

Théorème 10 : **Structure de l'ensemble des solutions**
Soit $\widetilde{y}$ une solution particulière de (E). On a alors :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \{t \mapsto y(t) + \widetilde{y}(t) : \text{avec } y \text{ solution quelconque de } \mathcal{S}_H\}}$$

Preuve 10 : Il suffit de raisonner par équivalences successives : "y sol de (E)" $\Longleftrightarrow \dots$

Remarque 11. On dit que l'ensemble $\mathcal{S}_E$ est un espace affine de dimension 2 passant par $t \mapsto \widetilde{y}(t)$ et de direction $\mathcal{S}_H$.

Théorème 11 : **Problème de Cauchy :** Unicité de la solution vérifiant deux CI

Soit l'équation différentielle $(E) \ : \quad y'' + ay' + by = f(t)$ définie sur un intervalle I.
Soit $t_0 \in I$ et $(y_0,\, y_1) \in \mathbb{K}^2$.

$$\boxed{(E) \text{ admet une unique solution } y \text{ telle que } \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}}$$

Preuve 11 :
1. On admettra l'existence de solutions dans le cas où f est une fonction continue quelconque.
2. On prouve l'unicité en cherchant parmi les solutions possibles, celles vérifiant les conditions données.

Sachant résoudre l'équation homogène, notre problème consiste alors à déterminer une solution particulière.

Théorème 12 : **Principe de superposition**
Supposons que : $f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$.
Si $\widetilde{y}_i(t)$ est une solution particulière de l'équation avec pour second membre $f_i(t)$, alors :

$\boxed{\widetilde{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \widetilde{y}_i(t)}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre $f(t)$

Preuve 12 : Pas de difficulté.

On considère alors l'équation complète $\boxed{(E) \ : \quad y'' + ay' + by = f(t)}$ avec $\begin{cases} (a,\, b) \in \mathbb{K}^2 \\ f(t) = e^{mt}P(t) \text{ où } m \in \mathbb{K} \text{ et } P \in \mathbb{K}[X] \end{cases}$

Théorème 13 : **Solution particulière complexe de $y'' + ay' + by = f(t)$ avec** $\begin{cases} (a,\, b) \in \mathbb{C} \\ f \textbf{ complexe} \end{cases}$

Lorsque : $\boxed{f(t) = e^{mt}P(t)}$ avec $m \in \mathbb{C}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$.

Si	Solution particulière		
1) m n'est pas racine de (C)	$\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t)$	avec	$\deg(Q) = \deg(P)$
2) m racine simple de (C)	$\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t)$	avec	$\deg(Q) = \deg(P) + 1$ et $\operatorname{val} Q = 1$
3) m racine double de (C)	$\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t)$	avec	$Q''(t) = P(t)$ et $\operatorname{val} Q = 2$

Preuve 13 : Il suffit de chercher les conditions sur la fonction polynômiale $Q(t)$ pour que $\widetilde{y}(t) = e^{mt}Q(t)$ soit une solution particulière de (E).

THÉORÈME 14 : **Solution particulière réelle de** $y'' + ay' + by = f(t)$ **avec** $\begin{cases} (a,\, b) \in \mathbb{R} \\ f \textbf{ réelle} \end{cases}$

1. Lorsque $\boxed{f(t) = e^{mt}P(t)}$ avec $\begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ P \in \mathbb{R}[X] \end{cases}$, on peut appliquer la méthode précédente.
2. Lorsque $\boxed{f(t) = e^{\alpha t}P(t)\cos(\beta t)}$ avec $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$:
   On peut exprimer $f(t)$ sous la forme $f(t) = \mathrm{Re}(P(t)e^{mt})$ avec $m \in \mathbb{C}$ ($m = \alpha + i\beta$).
   On cherche alors une solution complexe $\widetilde{y}$ en utilisant le théorème précédent, puis on en déduit une solution particulière de $(\mathcal{E})$ en prenant la partie réelle de $\widetilde{y}$.

Preuve 14 : Pas de difficulté.

Remarque 12. On a bien entendu une méthode équivalente lorsque $f(t) = e^{at}P(t)\sin(bt)$ avec la partie imaginaire.

`Exemple 11.` Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y' - 2y = 3te^t + 1$
2. $y'' - 4y' + 4y = (t^2 + 1)e^{2t}$
3. $y'' + 2y' + 5y = e^{-t}\cos 2t$
4. $y'' + 2y' - 2y = e^{-x}(\mathrm{ch}(\sqrt{3}x) + \cos(\sqrt{3}x))$