Suites et Fonctions complexes

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

24 février 2011

1 Les suites complexes

Une suite à valeurs complexes est une application $u\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.
C'est aussi une suite (u_n) avec $u_n = x_n + iy_n$ où (x_n) et (y_n) sont deux suites réelles.

On dira que $\left\{\begin{array}{l}(x_n) \text{ est la partie réelle de } (u_n)\\ (y_n) \text{ est la partie imaginaire de } (u_n)\end{array}\right.$.

Définition 1 : **Disque ouvert, fermé**

1. L'ensemble $D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| < r\}$ est appelé *disque ouvert* de centre a, de rayon r.
2. L'ensemble $\overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - a| \leq r\}$ est appelé *disque fermé* de centre a, de rayon r.

Définition 2 : On dira qu'une suite complexe (z_n) est bornée si et seulement si la suite $(|z_n|)$ est bornée.

Suite bornée	Suite convergente vers l

Proposition 1 :
Une suite complexe est bornée si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont bornées.

Preuve 1 : On utilisera le fait que si $z = x + iy$ alors $\left\{\begin{array}{l}|x| \leq |z|\\ |y| \leq |z|\end{array}\right.$ et que $|z| \leq |x| + |y|$

Définition 3 : **Convergence d'une suite de complexes**

1. On dit qu'une suite de nombres complexes (z_n) converge vers un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ si et seulement si la suite réelle de terme général $|z_n - a|$ converge vers 0.
2. Si un tel complexe a n'existe pas, on dit que la suite (z_n) diverge.
3. On dit que la suite (z_n) diverge vers l'infini lorsque la suite réelle de terme général $|z_n|$ diverge vers $+\infty$.

`Exemple 1.` La suite complexe $z_n = 1 - \dfrac{i}{n}$ converge vers 1.

Remarque 1. Voici une autre façon plus formelle de dire que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$: $\quad \forall r > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N,\ z_n \in D(a,r)$

	Suites réelles	Suites complexes
Suite bornée	X	X mais la définition est différente
Majorant / Minorant	X	O
Sens de variation	X	O
Suite convergente / divergente	X	X
Suites géométriques / arithmétiques	X	X
Suites récurrentes	X	X

Comparaisons : Suites Réelles - Suites complexes
Définitions

Théorème 2 : **Théorème de majoration**
Soit (z_n) une suite de complexes et $a \in \mathbb{C}$.
Si (α_n) est une suite de réels vérifiant : $\begin{cases} |z_n - a| \leq \alpha_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$, alors $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

Preuve 2 : Immédiat ...

Une autre façon d'étudier une suite complexe consiste à étudier deux suites réelles :

Théorème 3 : **Une suite complexe converge ssi les parties réelles et imaginaires convergent**

$$z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(a) \\ \mathrm{Im}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(a) \end{cases}$$

Preuve 3 : Pas de difficulté ...

Remarque 2. Ce théorème implique en particulier :
1. L'unicité de la limite d'une suite complexe (lorsqu'elle existe !!).
2. Le fait qu'une suite complexe convergente est bornée

Exercice : 1

Soit (z_n) une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_{n+1} = \dfrac{1}{3}(z_n + 2\bar{z}_n)$.
Montrer que (z_n) converge et exprimer sa limite en fonction de z_0.

	Suites réelles	Suites complexes
Théorèmes généraux sur la limite d'une combinaison linéaire / produit / rapport	X	X
Théorème de majoration	X	X
Théorème de la limite monotone	X	O
Théorème des gendarmes	X	O
Convergence des suites géométriques	X	+ ou -
Convergence selon la limite de u_{n+1}/u_n	X	X (en module)
Convergence des suites extraites	X	X

Comparaisons : Suites Réelles - Suites complexes
Théorèmes de convergences

	Suites réelles	Suites complexes
Unicité de la limite	X	X
Une suite convergente est bornée	X	X
Passage à la limite dans une inégalité	X	O

Comparaisons : Suites Réelles - Suites complexes
Propriétés des suites convergentes

Théorème 4 : **Suites géométriques complexes**
Soit un nombre complexe $k \in \mathbb{C}$.
On appelle *suite géométrique* de raison k, la suite définie par $\begin{cases} \text{la donnée de } z_0 \in \mathbb{C} \\ \text{la relation de récurrence } z_{n+1} = kz_n \end{cases}$.

Elle vérifie alors la relation : $z_n = z_0.k^n$ et on a alors : $\begin{cases} |k| < 1 & \Rightarrow (z_n) \text{ converge vers } 0 \\ |k| \geq 1 \text{ et } k \neq 1 & \Rightarrow (z_n) \text{ diverge} \\ k = 1 & \Rightarrow (z_n) \text{ est constante et vaut } z_0 \end{cases}$

Preuve 4 : La seule petite difficulté porte sur le cas $|k| = 1$.
Dans ce cas, on suppose que $k^n \mapsto l \in \mathbb{C}$ et on utilise le fait que $k^{n+1} = k^n.k$.

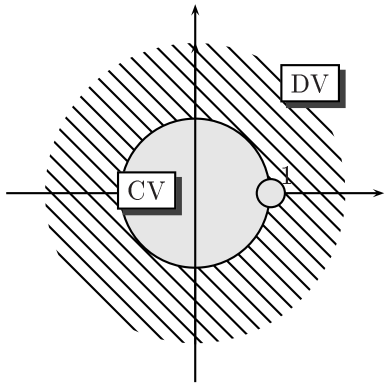

Fig. 1 – *Convergence d'une suite géométrique complexe*

Remarque 3. Lorsque $|k| = 1$ (avec $k \neq 1$), il y a deux modes de divergence possibles :
1. Si $k = e^{i\frac{p}{q}\pi}$ avec $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, alors la suite (k^n) est périodique de période $T = 2q$
2. Si $k = e^{i\alpha\pi}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, alors la suite (k^n) est dense dans le cercle $\mathcal{C}(O, 1)$

`Exemple 2.` Prouver que si $x \notin \pi\mathbb{Z}$, les suites $(\cos nx)$ et $(\sin nx)$ divergent.

Théorème 5 : **Séries géométriques complexes**
On appelle série géométrique de raison $k \in \mathbb{C}$, la suite complexe définie par : $S_n = 1 + k + \cdots + k^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} k^i$

On a alors : $\begin{cases} |k| < 1 & \Rightarrow & S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{1-k} \\ |k| \geq 1 & \Rightarrow & (S_n) \text{ diverge} \end{cases}$ on notera alors : $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} k^i = \frac{1}{1-k}$.

Preuve 5 : Pas de difficulté en remarquant que $S_n = \dfrac{1 - k^{n+1}}{1-k}$ lorsque $k \neq 1$.

Exercice : 2

Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \dfrac{x_n - y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \dfrac{x_n + y_n}{2}$.
En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$, montrer que les suites (x_n) et (y_n) convergent et déterminer leurs limites.

Exercice : 3

Soit a un complexe de module ρ et d'argument $\theta \in]-\pi;\pi]$.
On définit la suite complexe (z_n) par $z_0 = a$ et $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$.
Montrer que (z_n) converge vers un réel que l'on exprimera en fonction de ρ et θ.

Aide : Vous pourrez prouver que : $\displaystyle\sin\frac{a}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{a}{2^k} = \frac{1}{2^n}\sin a.$

2 Fonctions à valeurs complexes

Dans ce paragraphe, I représente un intervalle de $\mathbb{R}$, et on s'intéresse aux fonctions de I dans $\mathbb{C}$.
On pourra noter $\mathcal{F}(I,\,\mathbb{C})$ ou encore $\mathbb{C}^I$ cet ensemble.

Remarque 4. Une fonction à valeur dans $\mathbb{C}$ pouvant être considérée comme une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on pourra les représenter graphiquement comme s'il s'agissait de courbes paramétrées.

Représentation Graphique d'une fonction à valeurs complexes

Remarque 5. Les notions faisant intervenir la comparaison d'images ne peuvent plus être définies.

Définition 4 : Soit f une application de I dans $\mathbb{C}$.

1. On note $\mathrm{Re}(f)$ l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $\mathrm{Re}(f)(x) = \mathrm{Re}(f(x))$.
   On note $\mathrm{Im}(f)$ l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $\mathrm{Im}(f)(x) = \mathrm{Im}(f(x))$.
   On a alors : $f = \mathrm{Re}(f) + i\,\mathrm{Im}(f)$.
2. On note $\bar{f}$ l'application de I dans $\mathbb{C}$ définie par $\bar{f}(x) = \overline{f(x)}$.
3. On note $|f|$ l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par $|f|(x) = |f(x)|$.

Si $(f,\,g) \in \mathbb{C}^I$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, on définit enfin les opérations $f+g$, λf et $f \times g$ de façon usuelle.

Remarque 6.
1. Si on peut définir les opérations usuelles sur les fonctions complexes, on ne peut, en revanche pas définir la composition de deux fonctions complexes.
2. Si on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}$ qui s'identifie au module du complexe $z = x+iy$, tous les résultats suivants seront valables pour une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

Proposition 6 :
1. $(\mathbb{C}^I,\ +,\ \times)$ est un anneau commutatif (non intègre !!).
2. $(\mathbb{C}^I,\ +,\ .)$ est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.
3. $(\mathbb{C}^I,\ +,\ \times,\ .)$ est une $\mathbb{C}$ algèbre commutative et unitaire.

Preuve 6 : Méthode usuelle ...

Définition 5 : On dit que f est bornée lorsque $|f|$ est bornée.

Proposition 7 : f est bornée si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont bornées.

Preuve 7 : On utilisera le fait que $\begin{cases} |\,\mathrm{Re}(f)| \leq |f| \\ |\mathrm{Im}(f)| \leq |f| \end{cases}$ et que $|f| \leq |\,\mathrm{Re}(f)| + |\,\mathrm{Im}(f)|$

	Fonctions réelles	Fonctions complexes
Fonctions bornée	X	X mais la définition est différente
Majorant / Minorant	X	O
Extremum	X	O
Sens de variation	X	O

Comparaisons : Fonctions Réelles - Fonctions complexes
Définitions

2.1 Limite et continuité d'une fonction complexe

DÉFINITION 6 : **Limite d'une fonction à valeurs complexes**
Soit un réel $x_0 \in \bar{I}$ et un complexe $a + ib \in \mathbb{C}$.

On dit que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} a + ib}$ si et seulement si $\boxed{|f(x) - (a + ib)| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0}$.

On dit que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \infty}$ si et seulement si $\boxed{|f(x)| \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty}$.

Remarque 7.
Ces définitions ne posent pas de problème car les fonctions $\left\{ \begin{array}{l} x \mapsto |f(x) - (a + ib)| \\ x \mapsto |f(x)| \end{array} \right.$ sont à valeurs réelles.

PROPOSITION 8 : **Caractérisation de la limite.**
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{C})$, α, $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha + i\beta \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a} \mathrm{Re}(f)(x) = \alpha \\ \lim\limits_{x \to a} \mathrm{Im}(f)(x) = \beta \end{array} \right.$$

Preuve 8 : Equivalences simples

`Exemple 3.` La fonction définie par $f(x) = e^{ix}$ a pour limite 1 lorsque $x \to 0$ mais n'admet pas de limite en l'∞.

Remarque 8. Comme pour les fonctions réelles :

1. si elle existe, la limite d'une fonction complexe est unique.
2. on a les propriétés usuelles concernant les opérations sur les limites.

DÉFINITION 7 : **Continuité.**
Soit $f \in \mathbb{C}^I$ et $a \in I$.

1. On dit que f est continue au point a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

Remarque 9. On retrouve les propriétés usuelles des fonctions réelles continues. Ainsi :

1. une fonction continue en un point x_0 est bornée au voisinage de ce point.
2. L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ forme une $\mathbb{C}$-algèbre commutative et unitaire.
3. On a $f \circ g$ continue sur I lorsque $g \in \mathcal{C}^0(I, J \subset \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{C})$.

Remarque 10.
Dans le cas des fonctions complexes, le théorème des valeurs intermédiaires n'a bien entendu, aucun sens.

PROPOSITION 9 : **Caractérisation de la continuité.**

$$f \text{ est continue en } x_0 \text{ (resp. sur } I) \iff \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{Re}(f) \\ \mathrm{Im}(f) \end{array} \right. \text{ sont continues en } x_0 \text{ (resp. sur } I).$$

Preuve 9 : Immédiat d'après la proposition 8 !!

`Exemple 4.` La fonction définie par $f(x) = e^{ix}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice : 4
Soit $f : [a, b[\mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f(a) = 0$, $|f(x)| \xrightarrow[x \to b^-]{} +\infty$.
Montrer qu'il existe $t \in [a, b[$ tel que $|f(t)| = 1$.

PROPOSITION 10 : Toute fonction complexe f continue sur un segment $[a, b]$ est bornée sur ce segment.

Preuve 10 : On montre facilement que la fonction $|f|$ est continue sur $[a, b]$ et on applique le théorème bien connu dans le cas des fonctions réelles.

	F° réelles	F° complexes
Notion de limite	X	X
Unicité de la limite	X	X
Théorème généraux sur la limite d'une combinaison linéaire / produit / rapport	X	X
Théorème de majoration	X	X
Caractérisation séquentielle de la limite	X	X
Notion de continuité en un point	X	X
Théorèmes généraux sur la continuité d'une combinaison linéaire / produit / rapport	X	X
Continuité de $f \circ g$ en un point où g est une fonction réelle	X	X
Passage à la limite dans une inégalité	X	O
Théorème de la limite monotone	X	O
Théorème des gendarmes	X	O

Comparaisons : Fonctions Réelles - Fonctions complexes
Continuité Locale

	F° réelles	F° complexes
Notion de continuité sur un intervalle	X	X
Théorèmes généraux sur la continuité d'une combinaison linéaire / produit / rapport	X	X
Continuité de $f \circ g$ sur un intervalle où g est une fonction réelle	X	X
Théorèmes des Valeurs intermédiaires	X	O
Théorème de Weirstrass (Image continue d'un segment)	X	+ ou -
Théorème de la bijection	X	O

Comparaisons : Fonctions Réelles - Fonctions complexes
Continuité Globale

2.2 Dérivée d'une fonction complexe

DÉFINITION 8 : **Dérivée d'une fonction à valeurs complexes**
Soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f est dérivable au point x_0 si et seulement si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. Cette limite finie se note $f'(x_0)$.
2. On dit qu'une fonction est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.
3. On définit de même les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

PROPOSITION 11 : **Caractérisation de la dérivabilité.**

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \text{ (resp. sur } I) \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f) \\ \mathrm{Im}(f) \end{cases} \text{sont dérivables en } x_0 \text{ (resp. sur } I).$$

On a alors :

$$\boxed{f'(x_0) = (\mathrm{Re}(f))'(x_0) + i(\mathrm{Im}(f))'(x_0)}$$

Preuve 11 : C'est une conséquence immédiate du théorème de caractérisation de la limite.

`Exemple 5.` **Dérivation de deux types de fonctions :**
Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition et que leurs dérivées successives sont données par les formules usuelles obtenues dans le cas des fonctions réelles :

1. $f \ : \ x \mapsto e^{\alpha x}$
2. $g \ : \ x \mapsto (x + \alpha)^n$ pour $n \in \mathbb{Z}$

Exercice : 5

Soit $g(t) = e^{\phi(t)}$ avec $\phi : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I.
Prouver que la fonction g est dérivable sur I et que : $\forall t \in I \quad g'(t) = e^{\phi(t)}\phi'(t)$.

Remarque 11. **Théorème de Rolle et Egalité des accroissements finis**
Ces deux théorèmes ne sont plus valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Pour s'en convaincre, on peut considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = e^{it}$.

1. On a f continue sur le segment $[0, 2\pi]$, dérivable sur $]0, 2\pi[$, avec $f(0) = f(2\pi) = 1$.
2. Et pourtant $\forall t \in]0,2\pi[$, $f'(t) = ie^{it} \neq 0$.
3. Ceci contredit à la fois le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis.

On verra en revanche un peu plus loin que l'inégalité des accroissements finis reste valable.

PROPOSITION 12 : **Primitives**
Comme pour les fonctions réelles, on définit la *primitive* sur I d'une fonction complexe f comme toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

1. Si $f = f_1 + if_2$, alors les primitives F de f sont les fonctions de la forme :

$$F = F_1 + i.F_2 + C \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_1 \text{ une primitive de } f_1 \\ F_2 \text{ une primitive de } f_2 \\ C \in \mathbb{C} \end{cases}$$

2. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante (complexe !!).
3. Toute fonction complexe continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ admet des primitives sur I.

Preuve 12 : Pas de difficulté ...

`Exemple 6.` Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$.
Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{\alpha x}$ admet pour primitives les fonctions

$$F_a(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + a \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{C}$$

Exercice : 6

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer une primitive des fonctions $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$ sur $\mathbb{R}$ en remarquant qu'il s'agit des parties réelles et imaginaires de $x \mapsto e^{a+ibx}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive de $x \mapsto e^{2x} \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice : 7

Soit $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$.

1. Calculer une primitive de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x-\alpha}$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Etudier l'existence de primitives de la fonction f définie par $f(x) = (x-\alpha)^n$.

	F° réelles	F° complexes
Notion de dérivée en un point	X	X
Théorèmes généraux sur la dérivée d'une combinaison linéaire / produit / rapport	X	X
Dérivabilité de $f \circ g$ en un point où g est une fonction réelle	X	X
Notion de dérivée nième	X	X
Formule de Liebniz	X	X

Comparaisons : Fonctions Réelles - Fonctions complexes
Dérivabilité Locale

	F° réelles	F° complexes
Notion de dérivée sur un intervalle	X	X
Théorèmes généraux sur la dérivée d'une combinaison linéaire / produit / rapport	X	X
Dérivabilité de $f \circ g$ sur un intervalle où g est une fonction réelle	X	X
Notion de primitive sur un intervalle	X	X
Fonction à dérivée nulle sur un intervalle	X	X
La dérivée s'annule en un extrémum local intérieur	X	O
Théorème de Rolle	X	O
Théorème des accroissements finis	X	O
Inégalité des accroissements finis	X	X (et oui !)
Formules de dérivation de $x \mapsto e^{\alpha x}$ et $x \mapsto (x+\alpha)^n$ avec $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$	X	X

Comparaisons : Fonctions Réelles - Fonctions complexes
Dérivabilité Globale

2.3 Intégrale d'une fonction complexe

Définition 9 : **Intégrale d'une fonction complexe**
Si f est une fonction continue par morceaux sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telle que $f = f_1 + if_2$.
On définit alors : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_a^b f_1(t)dt + i\int_a^b f_2(t)dt$

Remarque 12. Attention : il s'agit bien d'une définition et pas d'une propriété !

`Exemple 7.` Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+it}$ après avoir justifié son existence.

Théorème 13 : **Expression intégrale des primitives**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$. Alors la fonction définie sur I par

$$F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Preuve 13 : Il suffit de décomposer f sous la forme $f = f_1 + i f_2$, avec f_1 et f_2 des fonctions réelles.

Remarque 13. C'est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a.

COROLLAIRE 14 : **Théorème fondamental du calcul d'une intégrale**
Soit f une fonction continue sur $[a,\, b]$ et F une primitive de f sur $[a,\, b]$.
Alors :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Preuve 14 : Pas de difficulté.

THÉORÈME 15 : **Majoration usuelle**
Si f est une fonction complexe continue sur le segment $[a,b]$, on peut majorer le module de l'intégrale par l'intégrale du module :

$$\left|\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t \quad \text{lorsque } a \leq b$$

Preuve 15 : Admise !!

Remarque 14. **Inégalité de la moyenne :**
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a,\, b]$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ avec $a \leq b$, alors :

$$|\int_a^b f(t).g(x)\ \mathrm{d}t| \leq \sup_{t\in[a,\ b]} |f(t)| \int_a^b |g(t)|\ \mathrm{d}t$$

`Exemple 8.` **Lemme de Riemann-Lebesgue**
On admettra que le théorème d'intégration par partie reste valable pour les fonctions complexes.
Soit $f : [a,\, b] \to \mathbb{C}$ une fonction complexe de classe $\mathcal{C}^1$. Démontrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x).e^{inx}\ \mathrm{d}x = 0$

THÉORÈME 16 : **Inégalité des accroissements finis**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t$$

et par majoration, on en déduit l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(b) - f(a)| \leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

Preuve 16 : Compte-tenu des deux propositions précédentes, la démonstration de ces deux résultats ne posent pas de problème.

En remplaçant les valeurs absolues par des modules, les formules de Taylor sont encore valables pour les fonctions complexes.

Théorème 17 : **Formules de Taylor**
Soit un intervalle I, et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{C}$.

1. **Formule de Taylor avec reste intégrale :**
Si $[a,x] \subset I$ et si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[a,x]$, alors

$$\boxed{f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t}$$

2. **Formule de Taylor-Lagrange avec majoration du reste :**
Si $(x, a) \in I^2$ et si f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur le segment $[a, x]$, alors en notant $M_{n+1}(x) = \sup_{t\in[a,\ x]} |f^{(n+1)}(t)|$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x-a)} \quad \text{avec} \quad \boxed{|R_n(x-a)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}(x)}$$

3. **Formule de Taylor-Young :**
Si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I, et si $a \in I$, alors $\forall x \in I$,

$$\boxed{f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)} \quad \text{au voisinage de } a$$

Preuve 17 : Taylor-Intégrale et Taylor-Young proviennent du fait que si $f = f_1 + if_2$ alors $f^{(k)} = f_1^{(k)} + if_2^{(k)}$.
La majoration du reste se déduit de Taylor-Intégrale grâce à l'inégalité de la moyenne.

Remarque 15.
On rappelle que la formule de Taylor-Young est souvent utilisée pour trouver des développements limités.

	F° réelles	F° complexes
Notion d'intégrale sur un segment	X	X mais la définition est différente
Relation de Chasles	X	X
Linéarité de l'intégrale	X	X
Technique de changement de variables	X	X
Expression intégrale des primitives	X	X
Théorème fondamental de calcul d'intégrale	X	X
Intégration par partie	X	X
Majoration en valeur absolue	X	X
Inégalité de la moyenne	X	X
Formule de Taylor avec reste intégrale	X	X
Majoration du reste intégrale	X	X
Formule de taylor-Young	X	X
Intégration d'une inégalité	X	0

Comparaisons : Fonctions Réelles - Fonctions complexes
Intégration