Etude métrique des courbes planes

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

29 août 2010

Le plan est muni de sa structure euclidienne usuelle.
Γ est la trajectoire d'une courbe $(I,\, \overrightarrow{F})$ où $\overrightarrow{F}\ : t \mapsto \left\{ \begin{array}{l} x(t) \\ y(t) \end{array} \right.$ est de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ sur l'intervalle I.
On notera $M(t)$ le point tel que $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$.

On se placera dans le cas où tous les points de cette courbe sont réguliers : $\forall t \in I,\ \overrightarrow{F}'(t) \neq \overrightarrow{0}$.
Ainsi, en particulier, le point $M(t)$ décrira sa trajectoire sans faire demi-tour.

Courbes régulières

1 Abscisse curviligne

1.1 Notion de paramétrage

Définition 1 : **Changement de paramétrage**
Soit $\gamma = (I,\, \overrightarrow{F})$ un arc paramétré.
On appelle *changement de paramétrage* de classe $\mathcal{C}^k$ de γ :
toute application $\varphi\ :\ J \mapsto I$ (avec J un intervalle de $\mathbb{R}$) telle que

1. φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J
2. φ est bijective
3. φ^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I

Remarque 1. Un application φ vérifiant ces propriétés est aussi appelée un $\mathcal{C}^k$ difféomorphisme.
Par la suite, φ sera au minimum de classe $\mathcal{C}^1$.

`Exemple 1.` Changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^\infty$: $\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = at + b \text{ de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \\ \varphi(t) = 1/t \text{ de } \mathbb{R}^{+*} \text{ dans } \mathbb{R}^{+*} \\ \varphi(t) = \cos t \text{ de }]0,\, \pi[\text{ dans }]-1,\, 1[\end{array} \right.$.

THÉORÈME 1 : Une application $\varphi\ : J \mapsto I$ sera un changement de paramétrage de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ ssi :

1. φ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur J
2. φ' ne change pas de signe
3. $\varphi(J) = I$

Preuve 1 : Admis !

Remarque 2. Le changement de paramétrage φ est dit *direct* si $\varphi' > 0$ et *indirect* si $\varphi' < 0$.

DÉFINITION 2 : **Paramétrage admissible**
Soit $\gamma = (I, \overrightarrow{F})$ un arc paramétré.
On appelle *paramétrage admissible* de classe $\mathcal{C}^k$ de γ, toute application $\overrightarrow{G}\ :\ J \mapsto \mathcal{P}$ telle que

1. il existe un changement de paramétrage $\varphi\ :\ J \mapsto I$ de classe $\mathcal{C}^k$ de γ
2. tel que : $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{F} \circ \varphi$.

Remarque 3. Concrètement, un paramétrage sera admissible si le point $\overrightarrow{F}(\varphi(t))$ parcourt de la même façon (mais pas nécessairement à la même vitesse ni dans le même sens) la trajectoire Γ que le point $\overrightarrow{F}(t)$.

`Exemple 2.` Déterminer un paramétrage admissible de la branche d'hyperbole paramétrée par $\begin{cases} x = a \operatorname{ch} u \\ y = b \operatorname{sh} u \end{cases}$ $u \in \mathbb{R}$.

1.2 Notion d'abscisse curviligne

Soit $(I, \overrightarrow{F})$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$.
L'abscisse curviligne est une notion de premier ordre, c'est à dire, une notion ne faisant intervenir que la dérivée première de $\overrightarrow{F}$.

DÉFINITION 3 : **Abscisse curviligne**
On appelle *abscisse curviligne* sur la courbe Γ, toute application s de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que :

$$\forall t \in I, \quad s'(t) = \|\overrightarrow{F}'(t)\| \quad (= \|\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}t}\|)$$

Les abscisses curvilignes sont donc les applications définies par

$$\forall t \in I, \quad \boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} \|\overrightarrow{F}'(u)\| \, \mathrm{d}u} \quad \text{où } t_0 \in I$$

Remarque 4.

1. Il existe une infinité d'abscisses curvilignes qui sont égales les unes aux autres à une constante près.
2. Le calcul de s s'appelle la *rectification* de Γ. On dira alors qu'on *rectifie* la courbe Γ.
3. L'application s est strictement croissante. Son signe permet de retrouver l'orientation de la courbe.
4. Le point M_0 de paramètre t_0 tel que $s(t_0) = 0$ est appelé l'*origine* de l'abscisse curviligne.

Dessin

Abscisse curviligne d'une courbe paramétrée :

Proposition 2 : Régularité de l'application s
Soit s une abscisse curviligne d'une courbe paramétrée $(I,\ \vec{F})$ où $\vec{F}$ est une application de paramètre t.

1. $s\ : t \mapsto s(t)$ est un $\mathcal{C}^1$ difféomorphisme de I dans J.
2. $t\ : s \mapsto s^{-1}(s)$ est donc $\mathcal{C}^1$ avec $\forall s \in J,\ t'(s) = \dfrac{1}{s'(t(s))}$ ce que l'on notera aussi $\boxed{\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(s) = \dfrac{1}{s'(t)}}$

Preuve 2 : Immédiat !

Théorème 3 : Formules
L'abscisse curviligne d'origine $M(t_0)$ ou $M(\theta_0)$ est donnée par les formules :

$$\boxed{s(t) = \int_{t_0}^{t} \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)}\ \mathrm{d}u} \quad \text{paramétrique} \qquad \boxed{s(t) = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{\rho(\alpha)^2 + \rho'(\alpha)^2}\ \mathrm{d}\alpha} \quad \text{polaire}$$

Preuve 3 : Il suffit de traduire la définition.

Exercice : 1
Rectifier les courbes suivantes en prenant si possible O comme origine des abscisses.

1. l'astroïde d'équations $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ avec $a > 0$
2. la parabole $y^2 = 2px$.
3. la cardioïde d'équation polaire $\rho = a(1 + \cos\theta)$ avec $a > 0$
4. la courbe d'équation polaire $\rho = \mathrm{th}(\theta/2)$

Définition 4 : Longueur d'un arc
La longueur de l'arc $\widehat{AB}$ où $\begin{cases} A \text{ est le point de paramètre } a \\ B \text{ est le point de paramètre } b \end{cases}$ est donnée par la formule :

$$l(\widehat{AB}) = \left| \int_a^b s'(t)\ \mathrm{d}t \right| = \left| \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\ \mathrm{d}t \right|$$

Il s'agit bien ici d'une définition ...

Longueur d'une courbe comme limite de longueurs de lignes polygônales :

Remarque 5.

1. On pourrait montrer (Hors-programme!) que l'on obtient la formule précédente en recherchant la limite des longueurs de lignes polygônales (cf Monier Géométrie MPSI p 252).
2. On pourrait aussi prouver que cette définition est bien indépendante du paramétrage admissible choisi.

`Exemple 3.` Calculer la longueur de l'arc de la cycloïde d'équations paramétriques $\begin{cases} x = R(t - \sin t) \\ y = R(1 - \cos t) \end{cases}$ où $t \in [0; 2\pi]$.

Exercice : 2
Déterminer la longueur de l'astroïde définie pour $t \in [0,\ 2\pi[$ par $\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}$ avec $a > 0$.

1.3 Représentation paramétrique en fonction de l'abscisse curviligne

Définition 5 : **Paramétrage normal**
On appelle paramétrage *normal* de l'arc $(I, \overrightarrow{F})$, tout paramétrage admissible $(J, \overrightarrow{G})$ de classe $\mathcal{C}^1$ tel que :

$$\forall t \in J, \quad \|\overrightarrow{G}'(t)\| = 1 \quad \text{(vitesse constante le long de la courbe)}$$

Théorème 4 : **L'abscisse curviligne donne un paramétrage normal**.
Pour toute abscisse curviligne s sur Γ, $\overrightarrow{F} \circ s^{-1}$ est un paramétrage normal de $(I, \overrightarrow{F})$.

Preuve 4 :
1. (a) Si s est une abscisse curviligne, on vérifie que s^{-1} définit bien un changement de paramétrage $\mathcal{C}^1$.
   (b) On montre alors que $\forall u \in J$, $\|(\overrightarrow{F} \circ s^{-1})'(u)\| = 1$.
2. On considère $\overrightarrow{G}$ un paramétrage normal de $(I, \overrightarrow{F})$.
   Comme il s'agit d'une paramétrage admissible, alors il existe un changement de paramètre φ tel que $\overrightarrow{G} = \overrightarrow{F} \circ \varphi$. Il s'agit alors de montrer que $\psi = \varphi^{-1}$ ou $\psi = -\varphi^{-1}$ est une abscisse curviligne.

Remarque 6.
1. A partir de maintenant, pour simplifier les résultats, nous pourrons supposer que la courbe Γ est paramétrée par un paramétrage normal $(I, \overrightarrow{F})$. On pourra noter s le paramétre et on aura ainsi toujours $\|\overrightarrow{F}'(s)\| = 1$.
2. Si le paramétrage par une abscisse curviligne est théoriquement possible, il n'est cependant pas toujours aisé de le déterminer de façon précise. En effet, même si le calcul de l'application $t \mapsto s(t)$ est relativement facile, il est souvent délicat de déterminer explicitement l'inverse de cette application. (cf exemples précédents)

Passage d'un paramétrage à un autre :

Les formules qui suivent font intervenir l'abscisse curviligne s alors qu'en pratique, les courbes sont paramétrées par un paramètre t (cartésiennes) ou θ (polaires) quelconque. Se pose alors la question du calcul pratique des grandeurs liées à un point M de la courbe.

Considérons une grandeur δ liée à un point M de la courbe.
Selon le paramétrage choisi, on notera $\delta = \delta(t)$ ou $\delta = \delta(s)$.
Or, les paramètres s et t sont liés par une fonction bijective de classe au moins $\mathcal{C}^1$: $\begin{cases} s = s(t) \\ t = s^{-1}(s) \end{cases}$.

Nous écrirons alors que : $\quad \delta(s) = \delta(t) \quad$ et $\quad \delta'(s) = \delta'(t).\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}(t) = \dfrac{\delta'(t)}{s'(t)}$.

2 Repère de Frenet

Définition 6 : **Repère de Frenet** :
Soit Γ une courbe de paramétrage normal $(I, \overrightarrow{F})$.

On note : $\begin{cases} \overrightarrow{T} = \overrightarrow{F}'(s) & \text{de norme } 1 \\ \overrightarrow{N} = r(\overrightarrow{T}) & \text{où } \quad r \text{ est la rotation d'angle } +\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$.

Le repère orthonormé direct $(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ est appelé le *repère de Frenet* au point M.

Dessin

Repère de Frenet :

En pratique, si le paramétrage n'est pas normal :

1. On calculera le vecteur $\overrightarrow{T}$ en appliquant la formule : $\overrightarrow{T}(t) = \dfrac{\overrightarrow{F}'(t)}{\|\overrightarrow{F}'(t)\|}$
2. On calculera le vecteur $\overrightarrow{N}$ en remarquant que : $\overrightarrow{N}(-b,\, a)$ lorsque $\overrightarrow{T}(a,\, b)$

Remarque 7. Le repère de Frenet est conservé par un changement de paramétrage direct.

`Exemple 4.` Déterminer le repère de Frenet dans le cas d'une astroïde, puis d'une cardioïde.

3 L'angle α

Théorème 5 : **Alpha**
Supposons ici que le paramétrage $(I,\, \overrightarrow{F})$ est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \geq 2$.
Alors, il existe une fonction α de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ sur I telle que

$$\overrightarrow{T}(t) = \cos\alpha(t)\,\overrightarrow{i} + \sin\alpha(t)\,\overrightarrow{j}$$

$\alpha(t)$ représente l'angle entre le vecteur $\overrightarrow{i}$ et le vecteur tangent $\overrightarrow{T}(t)$.

Preuve 5 : Résultat admis !

Dessin

L'angle α :

Théorème 6 : **Formules**
En notant x et y les composantes de $\overrightarrow{F}$, on a :

$$\cos\alpha = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} \quad \textit{et} \quad \sin\alpha = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

Preuve 6 : Immédiat sachant que $\overrightarrow{T} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{F}}{\mathrm{d}s}$.

Remarque 8. L'angle α est conservé par tout changement de paramètre admissible direct.

En pratique dans le cas d'une courbe paramétrée

On pourra déterminer $\alpha(t)$ à l'aide de la formule $\boxed{\tan\alpha(t) = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}}$ et en remarquant que :

1. $\cos\alpha$ est du signe de $x'(t)$
2. $\sin\alpha$ est du signe de $y'(t)$

`Exemple 5.` Déterminer l'angle α en tout point de la parabole $\begin{cases} x = \dfrac{t^2}{2p} \\ y = t \end{cases}$.

En pratique dans le cas d'une courbe en polaire

1. On commencera par déterminer l'angle $v = (\widehat{\overrightarrow{u}_\theta, \overrightarrow{T}}(\theta))$ à l'aide de la formule $\tan v = \dfrac{\rho}{\rho'}$.
2. On obtient alors α à π près en ajoutant l'angle θ.

L'angle α en polaire

`Exemple 6.` Déterminer l'angle α dans le cas de la cardioïde $\rho = a(1 + \cos\theta)$.

4 Courbure

On suppose ici que la courbe Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ et que les points M considérés sont réguliers.
Les notions développées dans cette parties sont dites *de deuxième ordre*.

Définition 7 : **Courbure et Rayon de courbure**

1. On appelle *courbure* de Γ au point $M(s)$ le réel γ défini par : $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.
2. On appelle *rayon de courbure* de Γ au point $M(s)$ le réel R : $R = \dfrac{1}{\gamma}$.

Dessin

Courbure :

Remarque 9.

1. Le rayon de courbure est considéré comme infini si $\gamma = 0$ et réciproquement ...
2. La courbure ou le rayon de courbure sont positifs lorsque $\overrightarrow{N}$ est dans le sens de la convexité et inversement ...
3. Le point défini par $\Omega(s) = M(s) + R\overrightarrow{N}(s)$ est appelé le *centre de courbure* de Γ en $M(s)$.
4. Le cercle de rayon R et de centre $\Omega(s)$ est appelé le *cercle osculateur* de Γ en $M(s)$.
5. Le lieu des points Ω lorsque M décrit la courbe Γ est appelé la *développée* de Γ.

En pratique (Méthode 1)
Pour calculer la courbure $\gamma(t)$, on pourra appliquer la formule : $\gamma(t) = \dfrac{\alpha'(t)}{s'(t)}$.

Une évaluation de α à π près à l'aide de la formule donnant $\tan\alpha$ suffira pour évaluer $\alpha'(t)$.

Remarque 10. Nous verrons par la suite deux autres méthodes largement aussi performantes !

`Exemple 7.` Déterminer le rayon de courbure en tout point régulier d'une cardioïde.

Exercice : 3

Déterminer le rayon de courbure en tout point de la deltoïde $\begin{cases} x = 2\cos t + \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$ avec $t \in]0, \dfrac{2\pi}{3}[$.

Exercice : 4

Déterminez toutes les courbes paramétrées régulières du plan de classe $\mathcal{C}^2$ dont la courbure en tout point reste constante.

THÉORÈME 7 : **Formules de Frenet**
Nous avons les formules suivantes : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\overrightarrow{T}$.

Preuve 7 : Comme $\begin{cases} \overrightarrow{T} = \cos\alpha\,\overrightarrow{i} + \sin\alpha\,\overrightarrow{j} \\ \overrightarrow{N} = -\sin\alpha\,\overrightarrow{i} + \cos\alpha\,\overrightarrow{j} \end{cases}$ alors $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}\alpha}\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s} = \gamma\overrightarrow{N}$.
De même pour la deuxième formule ...

Remarque 11. Ces formules se retrouvent rapidement grâce à la démonstration précédente.

Détermination de γ à l'aide des formules de Frenet : (Méthode 2)

1. On calcule $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}$ à l'aide de la formule : $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t}.\dfrac{1}{s'(t)}$
2. On exprime alors $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}$ en fonction de $\overrightarrow{N}$ et on en déduit γ.

`Exemple 8.` Déterminer la courbure de la cardioïde en utilisant une des formules de Frenet.

COROLLAIRE 8 : Le cercle osculateur en un point M d'une courbe paramétrée est parmi les cercles tangents, celui qui, au voisinage de M est le plus proche de la courbe.
En général, celui-ci traverse la courbe.

Preuve 8 :
On considère la courbe muni d'un paramétrage normal $(I, \overrightarrow{F})$ dont l'origine des abscisses curvilignes est en M.
On se place alors dans le repère de frenet en M : $\mathcal{R}(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$. On a alors $M = M(0)$.
On note $M(s)\begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point de la courbe situé au voisinage de M.

1. On considère un cercle de rayon r tangent en M à la courbe.
   $M(s)$ sera d'autant plus proche du cercle que la quantité $\Delta(s) = \sqrt{x(s)^2 + (y(s) - r)^2} - r$ sera petite.
2. En remarquant que $\overrightarrow{F}(s) = x(s)\overrightarrow{T}(0) + y(s)\overrightarrow{N}(0)$ et en calculant $\overrightarrow{F}'(s)$, $\overrightarrow{F}''(s)$ et $\overrightarrow{F}''(s)$ à l'aide des formules de Frenet, on en déduit les valeurs de :
   $$x(0),\ x'(0),\ x''(0),\ x'''(0) \quad \text{et} \quad y(0),\ y'(0),\ y''(0),\ y'''(0)$$
   Il est alors possible de déterminer les DL(0,3) de $\begin{cases} x(s) \\ y(s) \end{cases}$ et donc, un DL(0,3) de $\Delta(s)$.
3. On en déduit la valeur de r pour laquelle $\Delta(s)$ est un infiniment petit d'ordre maximal au voisinage de 0.

Le cercle osculateur

THÉORÈME 9 : **Formules de la vitesse et de l'accélération**

On notant $v = \|\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}}\| = s'(t)$ on a : $\begin{cases} \overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}} = v.\overrightarrow{T} & \text{(vecteur vitesse)} \\ \overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.\overrightarrow{T} + \dfrac{v^2}{R}.\overrightarrow{N} & \text{(vecteur accélération)} \end{cases}$

Preuve 9 :
1. La formule de la vitesse correspond à sa définition.
2. Pour l'accélération, il suffit de dériver par rapport à t la formule précédente.

Remarque 12. On notera : $\begin{cases} \overrightarrow{\gamma}_T = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}.\overrightarrow{T} & \text{l'}\textit{accélération tangentielle} \\ \overrightarrow{\gamma}_N = \dfrac{v^2}{R}.\overrightarrow{N} & \text{l' }\textit{accélération normale} \end{cases}$

Remarque 13. Un point se déplace à vitesse constante le long d'un courbe dont le paramétrage est normal.

Dessin

Représentation de $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{\gamma}_N$

COROLLAIRE 10 : **Formule de la courbure (Méthode 3)**

On en déduit la formule : $\boxed{\gamma = \dfrac{[\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}}, \overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}t^2}}]}{\|\overrightarrow{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}}\|^3}}$

Preuve 10 : Il suffit d'effectuer le calcul à partir des formules du théorème précédent.

Remarque 14.
Pour déterminer γ (ou R), on pourra donc soit utiliser la définition, cette formule ou encore les formules de Frenet.

`Exemple 9.` Traduire la formule de la courbure dans le cas où la courbe est donnée en : $\begin{cases} \text{paramétrique} \\ \text{cartésienne} \\ \text{polaire} \end{cases}$.

En paramétrique	En cartésienne	En polaire

`Exemple 10.` Déterminer la courbure des courbes suivantes :

1. La cycloïde (pour $t \neq 2k\pi$).
2. La chaînette
3. La cardioïde
4. La parabole d'équation $x = 2py^2$ avec $p > 0$

Exercice : 5

Déterminer les rayons de courbure aux sommets d'une ellipse.

Exercice : 6

Soit Γ une courbe d'équation $y = f(x)$ avec f de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de 0, telle que : $\begin{cases} O \in \Gamma \\ O_x \text{ soit tangente à } \Gamma \text{ en } O \end{cases}$.

1. Déterminer l'expression de la courbure γ_0 en O en fonction de $f''(0)$.
2. En déduire que $\gamma_0 = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2f(x)}{x^2}$.
3. Quel est le rayon de courbure en $A(0,1)$ de la chaînette ?

Exercice : 7

1. Déterminer l'expression du rayon de courbure en O d'une courbe $\rho = \rho(\theta)$ passant par O.
2. En déduire le rayon de courbure en O de $\rho = \dfrac{2\cos\theta + 1}{2\sin\theta + 1}$

Corollaire 11 : **Etude des points d'inflexion**

$$M(t_0) \text{ est un point d'inflexion de } (I, \vec{F}) \iff t \mapsto \left[\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}F}}{\mathrm{d}t}, \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2F}}{\mathrm{d}t^2}\right] \text{ change de signe en } t_0 \in I$$

Preuve 11 : $M(t)$ est un point d'inflexion de $(I, \vec{F})$ lorsque que la courbe change de concavité en $M(t)$.
Or, la concavité est déterminée par le signe de la courbure, c'est à dire par le signe de $\left[\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}F}}{\mathrm{d}t}, \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2F}}{\mathrm{d}t^2}\right]$.

Point d'inflexion

`Exemple 11.` Déterminer, s'il existe, le point d'inflexion de la courbe de représentation paramétrique : $\begin{cases} x = e^t \\ y = t^2 \end{cases}$.

Corollaire 12 : **Caractérisation des points biréguliers**

Rappel : On dit qu'un point $M(t)$ est birégulier d'une courbe $(I, \vec{F})$ lorsque : $\left[\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}F}}{\mathrm{d}t}, \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}^2F}}{\mathrm{d}t^2}\right] \neq 0$.
Ainsi :

$$M(t) \text{ est birégulier} \iff \gamma \neq 0$$

Preuve 12 : Immédiat avec la formule de la courbure

Remarque 15. Si l'arc est birégulier, α alors est un paramétrage admissible de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ de la courbe Γ de classe $\mathcal{C}^k$.

Exercice : 8

Etude des courbes birégulière vérifiant une équation de la forme : $R = f(s)$ ou $R = f(\alpha)$.

Il s'agit de déterminer les représentations paramétriques de paramètre α des courbes recherchées.
On note $\alpha \overset{\vec{F}}{\mapsto} \begin{pmatrix} x(\alpha) \\ y(\alpha) \end{pmatrix}$ la fonction vectorielle définissant la courbe recherchée.

Le raisonnement commence par une analyse :

1. Remarquons que l'équation des courbes cherchées donne : $s'(\alpha) = f(s)$ ou $s'(\alpha) = f(\alpha)$.
2. En résolvant cette équation, on obtient une expression pour $s(\alpha)$ et donc pour $s'(\alpha)$.
3. Or, nous savons que : $\left\{\begin{array}{l} x'(\alpha) = \cos\alpha.s'(\alpha) \\ y'(\alpha) = \sin\alpha.s'(\alpha) \end{array}\right.$.
4. En résolvant ce système différentielle, on la forme des courbes recherchées.
   Une synthèse permet de vérifier que les courbes trouvées conviennent.

Remarque 16. Comme dans le 1. de l'exemple suivant, il est parfois possible et plus simple de rechercher un paramétrage en fonction de s au lieu de α.

`Exemple 12.` Exemples :

1. $R = a \quad (a > 0)$
2. $R = a.\sin\alpha \quad (a > 0)$
3. $R = a.s \quad (a > 0)$
4. $R = 1 + s^2$