Les Espaces Vectoriels de dimension finie
Partie II

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

23 mars 2011

1 Différentes constructions d'une base

Définition 1 : **ev de dimension finie**
On dit qu'un espace vectoriel E est de *dimension finie* si et seulement si il existe une famille génératrice $\mathcal{G} = (g_1, \ \dots, g_n)$ de E de cardinal fini. Par convention, on dit que $E = \{0\}$ est un espace de dimension finie.

`Exemple 1.` Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Lemme 1 : **Augmentation d'une famille libre**
Soit une famille de vecteurs $\mathcal{L} = (l_1, \dots, l_n)$ *libre* d'un espace vectoriel E et un vecteur $x \in E$.
Si $x \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{L})$, alors la famille $\mathcal{L}' = (l_1, \ \dots, l_n, x)$ est encore libre.

Preuve 1 : Se démontre facilement par l'absurde.

Lemme 2 : **Retrait d'un vecteur redondant**
Soit une famille formée de $n+1$ vecteurs de l'espace E : $S = (x_1, \ \dots, x_n, x_{n+1}) \in E^{n+1}$.
Si le vecteur x_{n+1} est combinaison linéaire des autres vecteurs : $x_{n+1} \in \mathrm{Vect}(x_1, \ \dots, x_n)$, alors on peut retirer le vecteur x_{n+1} sans modifier le sous-espace engendré par S :

$$\mathrm{Vect}(x_1, \ \dots, x_n, x_{n+1}) = \mathrm{Vect}(x_1, \ \dots, x_n)$$

Preuve 2 : On procède par double inclusion.
1. $\mathrm{Vect}(x_1, \ \dots, x_n) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \ \dots, x_n, x_{n+1})$ est évident !
2. $\mathrm{Vect}(x_1, \ \dots, x_n, x_{n+1}) \subset \mathrm{Vect}(x_1, \ \dots, x_n)$ est facile à montrer !

Théorème Fondamental 3 : **Théorème de la base incomplète**
Si $\mathcal{L} = (l_1, \dots, l_p)$ est un système *libre* de E et $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_q)$ est un système *générateur* de l'espace E, alors il existe une base de E de la forme

$$\mathcal{B} = (l_1, \dots, l_p, l_{p+1}, \dots, l_n) \quad \text{où} \quad l_{p+1}, \dots, l_n \in \mathcal{G}.$$

En d'autres termes, pour obtenir une base, on peut compléter un système libre en ajoutant des vecteurs puisés dans un système générateur.

Preuve 3 : On procède pas à pas ...
Si il existe un vecteur de $\mathcal{G}$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$ alors on l'ajoute à $\mathcal{L}$.
On procède ainsi tant qu'il reste des vecteurs de $\mathcal{G}$ n'appartenant pas à $\mathrm{Vect}\,\mathcal{L}$.
La famille $\mathcal{L}$ obtenue est alors libre et génératrice. C'est donc une base de E.

Corollaire 4 : **Existence de bases**
Tout espace vectoriel de dimension finie *non-nul* possède une base.

Preuve 4 : Pour tout ev de dimension fini E, on construit une base en considérant le système générateur fini et la famille libre formée d'un vecteur non nul de E. Il suffit alors d'appliquer le théorème de la base incomplète.

Corollaire 5 : **Complément d'une famille libre en une base**
Si E est un ev de dimension finie et $\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_p)$ une famille libre, alors on peut compléter cette famille en une base $e = (e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n)$.

Preuve 5 : Application directe du théorème de la base incomplète.

`Exemple 2.` On peut par exemple compléter $\mathcal{L} = \{(1,2,0), (-1,1,0)\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$. Cf plus loin ...

Corollaire 6 : **Extraction d'une base d'une famille génératrice**
Si E est un ev de dimension finie et $\mathcal{G} = (e_1, \dots, e_p)$ est une famille génératrice, alors on peut extraire de $\mathcal{G}$ une base $e = (e_{i1}, \dots, e_{in})$.

Preuve 6 : Dans $\mathcal{G}$, il existe un vecteur e_i non nul. Soit alors la famille libre $\mathcal{L} = \{e_i\}$.
On complète alors cette famille à l'aide de vecteurs de $\mathcal{G}$.

`Exemple 3.` De $G = \text{Vect}((1, 1, 1), (1, 0, 2), (2, 1, 3), (1, 2, 0))$ on peut extraire une base de G. Cf plus loin ...

Théorème Fondamental 7 : **Unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors,

$$\boxed{\forall x \in E, \exists\,!\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \text{tel que} \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.}$$

Les scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sont alors appelés les *coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Preuve 7 : Très simple par l'absurde !!

2 Dimension d'un espace vectoriel

Lemme 8 : **Lemme de Steinitz**
Soit $A = (a_1, \dots, a_n, a_{n+1})$ une famille de vecteurs de E et $S = (e_1, \dots, e_n)$ une autre famille.

Si $\forall k \in [\![1,n+1]\!]$, $a_k \in \text{Vect}(S)$ alors la famille A est liée.

Preuve 8 : On commence par traduire le fait que $\forall k \in [\![1,n+1]\!]$, $a_k \in \text{Vect}(S)$ par $n+1$ relations.

1. Si $a_1 \neq 0$ alors quitte à réorganiser l'ordre des e_i, on peut exprimer e_1 en fonction de $a_1, e_2 \dots e_n$.
2. On remplace alors e_1 par l'expression précédente dans les autres égalités.
3. On réitère le raisonnement à e_2 pour le nouveau système obtenu.
4. Au bout d'un nombre fini d'étapes, on constate qu'un des vecteurs a_i s'exprime uniquement en fonction des autres vecteurs de $\mathcal{A}$.

Remarque 1. En d'autres termes, ce théorème signifie que si $(n+1)$ vecteurs sont combinaison linéaire de n vecteurs alors ils forment une famille liée.

Lemme 9 : **Le cardinal d'une famille libre est plus petit que celui d'une famille génératrice**
Si $\mathcal{L}$ est une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E, on a

$$card(\mathcal{L}) \leq card(\mathcal{G})$$

Preuve 9 : Par l'absurde, on constate que ce lemme est un corollaire du lemme précédent.

Remarque 2. D'après ce théorème, pour montrer qu'un espace vectoriel n'est pas de dimension finie, il suffit d'exhiber une famille $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de vecteurs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (x_1,\ \dots,\ x_n) \text{ est libre}$$

`Exemple 4.` Montrer que $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ sont de dimension infinie.

Théorème Fondamental 10 : Cardinal d'une base
Si E est de dimension finie, toutes les bases de E ont même cardinal.

Preuve 10 : Il suffit de considérer deux bases de cardinal n et n' différents, puis d'appliquer le lemme précédent.

Définition 2 : Dimension d'un ev
Si $E = \{0\}$, on dit que E est de dimension 0 : $\dim E = 0$.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie non-nul, on appelle *dimension* de E, le cardinal commun des bases de E et l'on note $\dim E = n$.

Ainsi, dans E un ev de dimension finie :
1. Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E, on a : $\operatorname{Card} L \leq \dim E$
2. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, on a : $\operatorname{Card} G \geq \dim E$

Remarque 3. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

Remarque 4. La dimension dépend du corps de base.
1. Par exemple, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1, mais un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.
2. $(**)$ On note p_i le ième nombre premier.
   En vous intéressant à la famille $\mathcal{L}_n = \{\ln p_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$, montrer que le $\mathbb{Q}$-ev $\mathbb{R}$ est de dimension infinie.

Exercice : 1
$(**)$ Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère F la partie de E constituée des applications de la forme : $x \mapsto \widetilde{P}(x)\sin x + \widetilde{Q}(x)\cos x$ avec $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$.
1. Montrer que F un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est de dimension finie et déterminer $\dim F$.

Théorème 11 : Dimension d'un espace produit
Si E et F sont deux ev de dimension finie,

$$\boxed{\dim(E \times F) = \dim E + \dim F}$$

Preuve 11 : Soit $(e_1,\ \dots,\ e_n)$ est une base de E et $(f_1,\ \dots,\ f_p)$ est une base de F.
Alors $\big((e_1, 0),\ \dots,\ (e_n, 0), (0, f_1),\ \dots,\ (0, f_p)\big)$ est une base de $E \times F$.

Théorème 12 : Caractérisation des bases
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $S = (e_1, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. S est une base de E ssi $\begin{cases} S \text{ est } \textit{libre} \\ p = n \end{cases}$.
2. S est une base de E ssi $\begin{cases} S \text{ est } \textit{génératrice} \\ p = n \end{cases}$.

Preuve 12 :
1. Les sens directs sont évidents !
2. (a) Si S est *libre* et $p = n$.
   Si S n'est pas une base alors il existe $x \notin \operatorname{Vect} S$. $S \cup \{x\}$ serait alors libre.
   Ce qui est impossible puisque $\dim E = n$.
   (b) S est *génératrice* et $p = n$.
   Si S n'est pas libre, alors l'un des vecteurs x de S d'exprime comme CL des autres.
   Dans ce cas, $S\backslash\{x\}$ serait aussi génératrice, ce qui est impossible.

Remarque 5. Pour montrer qu'une famille S est une base, on vérifiera le plus souvent que le système S est libre et $\operatorname{Card}(S) = \dim E$. Cela permet d'éviter de montrer que S est générateur, ce qui est parfois fastidieux.

`Exemple 5.` ($*$) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base d'un ev E. Soient $\begin{cases} \varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ \varepsilon_2 = e_2 + e_3 \end{cases}$.

1. Montrer que $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est une famille libre de E.
2. Compléter cette famille pour obtenir une base de E.

`Exemple 6.` **Famille de polynômes à degrés étagés**
Dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, soit $S = (P_0, \dots, P_n)$ une famille de $n+1$ polynômes tels que $\forall i \in [0,n]$, $\deg P_i = i$.
Montrer que S est une base de E.

Rem : Cela prouve en particulier que $\forall a \in \mathbb{R}$, $B = (1, (X-a), (X-a)^2, \dots, (X-a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice : 2

($*$) Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $S = (e_1, \dots, e_n)$ avec $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (1, 1, 0 \dots, 0)$, $\dots$, $e_n = (1, \dots, 1)$.

1. Montrer que S est une base de E.
2. Exprimer les coordonnées du vecteur $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans la base S.

Exercice : 3

($**$) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et un endomorphisme $u \in L(E)$ nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$: ($u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$).

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $S = (x_0, u(x_0), \dots, u^{p-1}(x_0))$ soit une famille libre de E.
2. Qu'en déduire pour la valeur de p?
3. Que dire si $p = n$?

3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Théorème 13 : **Dimension d'un sev**
Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sev de E.

$$F \text{ est alors de dimension finie} \quad \text{et} \quad \dim F \leq \dim E$$

Preuve 13 : Si F était de dimension infinie, alors on pourrait trouver une famille libre de vecteurs de F de cardinal $p > n$. Cette famille serait aussi une famille libre de E. Or ceci est impossible car toute famille libre de vecteurs de E a un cardinal inférieur ou égal à n.
Donc F est de dimension finie et $\dim F \leq n$.

Remarque 6. Soit E un ev de dimension n et F un sev de E. Selon sa dimension, F porte des noms différents :

1. Si $\dim F = 1$ alors F est une droite vectorielle
2. Si $\dim F = 2$ alors F est un plan vectoriel
3. Si $\dim F = n-1$ alors F est un hyperplan vectoriel (F est aussi le noyau d'une forme linéaire non nulle)

Remarque 7. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ sont souvent donnés sous l'une des deux formes suivantes :

- Forme 1 : $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ avec $e_1, \dots, e_p \in \mathbb{R}^n$.
- Forme 2 : $F = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \\ f_q(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \}$ où $f_1, \dots, f_q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

Vous devez connaître la méthode permettant de passer d'une forme à l'autre.

`Exemple 7.` ($*$) Soient $F = \text{Vect}((1, 0, 2, 3), (-1, 0, 1, 1))$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - 2t = 0 \end{cases} \}$.

1. Exprimer F sous la forme 2.
2. Exprimer G sous la forme 1.

Corollaire 14 : Soient F et G deux sev d'un même ev de dimension finie. Alors,

$$\boxed{\begin{cases} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{cases} \Rightarrow \quad F = G}$$

En particulier, si F est un sev de E, alors : $\dim F = \dim E \Rightarrow F = E$.

Preuve 14 : Si $F \subset G$ alors F est un sev de G.

Remarque 8. Ce résultat est TRES souvent utilisé pour montrer que deux sev F et G sont égaux.

Exercice : 4

($*$) Soient $F = \text{Vect}((1, 2, 3), (0, 1, 1))$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ deux sev de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $F = G$ en utilisant deux méthodes différentes.

Exercice : 5

($*$) Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}((1, 1, \lambda, 3), (0, 1, 1, 2))$ $\quad G = \{(x, y, z, t) \in E \mid x - y + z = 0, x + 2y - t = 0\}$.
Trouver une CNS sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $F = G$?

Théorème 15 : **Base adaptée à une somme directe**
Soit E un ev de dimension finie.
Soient F et G deux sev de E de bases respectives $B_F = (f_1, \ldots, f_p)$ et $B_G = (g_1, \ldots, g_q)$. Alors :

$$E = F \oplus G \iff B = (f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q) \text{ est une base de } E$$

Preuve 15 :
- $\Rightarrow$ On montre très facilement que $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice.
- $\Leftarrow$ On a facilement $E = F + G$, puis que $F \cap G = \{0_E\}$.

Exercice : 6

($*$) Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}((1, 0, 1, 0), (1, 2, 0, 0))$. Trouver un supplémentaire de F dans E

Corollaire 16 : **Dimension d'une somme directe**

$$E = E_1 \oplus E_2 \quad \Rightarrow \quad \dim E = \dim E_1 + \dim E_2$$

Preuve 16 : Immédiat compte-tenu du théorème précédent.

Remarque 9. Ainsi :
1. Les supplémentaires d'une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sont des plans vectoriels
2. Les supplémentaires d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ sont des droites vectorielles

Corollaire 17 : **Existence de supplémentaires en dimension finie**
Si E est un ev de dimension *finie*, et F un sev de E, alors il existe des supplémentaires de F dans E.

Preuve 17 : On utilise ici le théorème de la base incomplète en considérant une base de F que l'on complète pour obtenir une base de E. Les vecteurs ajoutés engendrent alors un sev supplémentaire de F dans E.

Remarque 10. Ne jamais parler *du* supplémentaire de F, car en général il en existe une infinité. Penser au cas où F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ (voir figure 1).

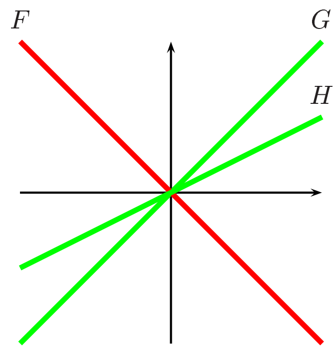

Fig. 1 – *H et G sont deux supplémentaires de F dans* $\mathbb{R}^2$

Remarque 11. L'existence de supplémentaires en dimension infinie est admise par l'axiome de Zorn.

`Exemple 8.` COMPLEMENT :
Nous avons vu que les solutions dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ de l'équation fonctionnelle $f(x + y) = f(x) + f(y)$ étaient les fonctions

$\mathbb{Q}$-linéaires et que, si l'on imposait l'hypothèse de la continuité sur $\mathbb{R}$ alors on obtenait les fonctions $\mathbb{R}$-linéaires, c'est à dire, les fonctions de la forme $f(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{R}$.
Il est alors légitime de se demander s'il existe effectivement des applications $\mathbb{Q}$-linéaires non continues sur $\mathbb{R}$.

Soit F le $\mathbb{Q}$-ev de $\mathbb{R}$ engendré par 1 et $\sqrt{2}$ et d'après l'axiome de Zorn, on considère G un supplémentaire de F.
Comme le $\mathbb{Q}$-ev $\mathbb{R}$ (de dimension infinie !) est somme directe de F et de G, il est possible de définir une application f solution de $f(x+y) = f(x) + f(y)$ par ses restrictions respectives à F et G.

On définit alors l'application $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ par $\begin{cases} f_{|F}(\lambda + \mu\sqrt{2}) = \mu + \lambda\sqrt{2} & \forall \lambda, \mu \in \mathbb{Q} \\ f_{|G} = \mathrm{id}_G \end{cases}$.

1. Montrer que f est $\mathbb{Q}$ linéaire.
2. Montrer que f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème 18 : **dimension d'une somme**
Soit E de dimension finie et F, G deux sev de E. Alors :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

Preuve 18 : Soit $\mathcal{B}$ une base de $F \cap G$. On peut compléter $\mathcal{B}$ pour obtenir une base $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_G$ de G. Montrons que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ est une base de $F + G$.
1. Il est immédiat que $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$ engendre $F + G$.
2. Pour la liberté de $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$, on prend une combinaison linéaire nulle et on montre que l'élément de $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_G)$ est dans F et donc dans $F \cap G = \mathrm{Vect}\,\mathcal{B}$.

La formule a démontrer résulte alors du décompte des vecteurs de $\mathcal{B} \cup \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$.

Exercice : 7
$(*)$ Soient F et G deux sev d'un ev E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F \cap G$ contient un vecteur non nul.

Corollaire 19 : **Caractérisation d'une somme directe**
Soit E un ev de dimension finie n et F, G deux sev de E. Alors

$$\boxed{E = F \oplus G \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim F + \dim G = n \end{cases}}$$

Preuve 19 :
- $\Rightarrow$ Ces deux résultats sont donnés dans des théorèmes précédents.
- $\Leftarrow$ Si $F \cap G = \{0\}$ alors d'après la formule précédente, $\dim(F+G) = n$ et donc $F + G = E$.

`Exemple 9.` $(*)$ Soit $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathrm{Vect}((1, 2, 1, 1), (0, 1, 1, 1))$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } x = y\}$.
Montrer que $F \oplus G = E$.

Remarque 12. On a aussi $(E = F \oplus G) \iff (F + G = E \text{ et } \dim F + \dim G = n)$, seulement en pratique, on utilisera plus souvent la caractérisation du théorème car il est en général simple de montrer que $F \cap G = \{0\}$.

Exercice : 8
$(*)$ Soit D une droite vectorielle et H un hyperplan d'un ev de dimension finie E.
Montrer que si $D \not\subset H$ alors D et H sont supplémentaires.

4 Applications linéaires en dimension finie — formule du rang

4.1 Définition, injectivité, surjectivité et bijectivité

Théorème 20 : **Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base**
Soit E un ev de dimension finie n, F un ev quelconque , $\begin{cases} e = (e_1, \dots, e_n) \text{ une base de } E \\ f = (f_1, \dots, f_n) \text{ une famille de } n \text{ vecteurs de } F \end{cases}$.

Il existe alors une unique application linéaire $u \in L(E, F)$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u(e_i) = f_i$

Preuve 20 : Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in [\![1,n]\!], \quad u(e_i) = f_i$.
On montre que l'image d'un $x \in E$ quelconque est alors parfaitement déterminée.

Remarque 13. Le théorème précédent est important. Il dit en particulier que pour déterminer une application linéaire, il suffit de donner l'image d'une base par cette application.

`Exemple 10.`

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base d'un ev E. Soit $\varphi \in E^\star$ définie par $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\varphi(e_i) = i$.
   Soit $x \in E$ et $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
   Déterminer l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées x_i.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par : $\left\{\begin{array}{l} f((1,0,0)) = (2,0,-1,0) \\ f((0,1,0)) = (0,1,2,0) \\ f((0,0,1)) = (1,1,1,1) \end{array}\right.$.
   Soit X un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. On note $X = (x, y, z)$ et $f(X) = (x', y', z', t')$.
   Déterminer x', y', z', t' en fonction de x, y, z.

Proposition 21 : **Applications Linéaires injectives**
Soit $u : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. u injective $\Longleftrightarrow (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ libre .
2. Si u est injective alors : $\dim F \geq \dim E$

Preuve 21 : Pas de difficulté.

Remarque 14. L'image d'une famille libre de E par $u \in \mathcal{L}(E, F)$ injective est une famille libre de F.

Proposition 22 : **Applications Linéaires Surjectives**
Soit $u : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. u surjective $\Longleftrightarrow (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ génératrice de F cad $F = \mathrm{Vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$
2. Si u est surjective alors : $\dim F \leq \dim E$

Preuve 22 : Pas de difficulté.

Remarque 15. L'image d'une famille génératrice de E par $u \in \mathcal{L}(E, F)$ injective est une famille génératrice de F.

`Exemple 11.` Que dire de l'injectivité et de la surjectivité des applications $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^4)$ et $v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^3)$?

Proposition 23 : **Applications Linéaires Bijectives**
Soit $u : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.

1. u bijective $\Longleftrightarrow (u(e_1), \ldots, u(e_n))$ base de F.
2. Si u est bijective alors : $\dim F = \dim E$

Preuve 23 : Pas de difficulté.

`Exemple 12.` Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que dire de l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$?

Proposition 24 : **Image d'un sev H**
Soit $u : E \to F$ une application linéaire avec $\dim E < +\infty$ et H un sev de E de base $\mathcal{B}_H = \{h_1, \ldots, h_q\}$.

1. $u(H)$ est un sev de F.
2. $u(H) = \mathrm{Vect}(u(h_1), \ldots, u(h_q))$.
3. $\dim u(H) \leq \dim H$

Preuve 24 :

1. Connu.
2. Facile par équivalences successives.
3. Immédiat compte-tenu du résultat précédent.

Remarque 16. Si $u : E \to F$ est injective alors $\dim u(H) = \dim H$ et en particulier, l'image par u d'une droite vectorielle est une droite vectorielle et l'image par u d'un plan vectoriel est un plan vectoriel.

Exercice : 9

(∗∗) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et x, y deux vecteurs de E.

1. On suppose $(x,\, y)$ libre. Montrer alors qu'il existe un automorphisme u de E tel que $\begin{cases} u(x) = x \\ u(y) = x + y \end{cases}$
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec tous les automorphismes de E.
   (a) Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $(x,\, f(x))$ est une famille liée.
   (b) En déduire que f est une homothétie.

Corollaire 25 : **Espaces isomorphes**
Soient deux ev E et F de dimension finie.
On dit qu'ils sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\varphi : E \mapsto F$.
On a la caractérisation

$$E \text{ et } F \text{ isomorphes} \quad \Longleftrightarrow \quad \dim E = \dim F$$

Preuve 25 :
- $\Rightarrow$ Supposons que E et F soient isomorphes. On considère $\mathcal{B}$ une base de E et φ l'isomorphisme. φ étant un isomorphisme de E dans F, alors $\varphi(\mathcal{B})$ est une base de F. CQFD !
- $\Leftarrow$ Supposons que $\dim E = \dim F$ et prenons $(e_1,\, \dots,\, e_n)$ une base de E et $(f_1,\, \dots,\, f_n)$ une base de F. Soit alors φ l'application linéaire définie par $\forall i \in [\![1,n]\!]\ \varphi(e_i) = f_i$. D'après le théorème précédent, φ est un isomorphisme de E dans F. CQFD !

Remarque 17. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Théorème 26 : **Dimension de $L(E,\, F)$**
Si E et F sont de dimension finie, alors $L(E,\, F)$ est également de dimension finie et

$$\boxed{\dim L(E,\, F) = \dim E \times \dim F}$$

Preuve 26 : Admis pour l'instant ... (voir le cours sur les matrices !)

Remarque 18. En particulier, si l'espace E est de dimension finie, son dual $E^\star$ est également de dimension finie et $\dim E^\star = \dim E$ (Voir la notion de *base duale* dans le cours de MP).

Exercice : 10
(∗∗) Soit E un ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (f_1,\, \dots,\, f_n)$ une famille de n formes linéaires sur E.
On suppose qu'il existe un vecteur non nul $a \in E$ tel que $\forall i \in [\![1,n]\!],\ f_i(a) = 0$.
Prouver que la famille $\mathcal{F}$ est liée.

4.2 La notion de Rang

Définition 3 : **Rang d'une famille de vecteurs, d'une application linéaire**
Soit un espace vectoriel E de dimension finie et une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$.
1. On appelle *rang* de la famille $\mathcal{F}$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$:
$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$$
2. Si E et F sont de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E,F)$, on appelle *rang* de u, la dimension de $\mathrm{Im}\, u$:
$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u)$$

Théorème 27 : **Le rang d'une application linéaire**
Si $(e_1,\, \dots,\, e_n)$ est une base de E et $u \in L(E,\, F)$,

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1),\, \dots,\, u(e_n)) \quad \left(= \dim \big(\mathrm{Vect}(u(e_1),\, \dots,\, u(e_n))\big)\right)$$

Preuve 27 : Immédiat !

Proposition 28 : Soit $\begin{cases} E \text{ un K-ev de dimension finie } n \\ F \text{ un K-ev de dimension finie } p \end{cases}$ et $u \in \mathcal{L}(E,F)$. On a alors : $\mathrm{rg}(u) \leq \min(n,\, p)$.

Preuve 28 : On a :

1. $\text{rg}(u) = \dim \text{Vect}(u(e_1),\ \ldots,\ u(e_n))$ avec $\text{Vect}(u(e_1),\ \ldots,\ u(e_n)) \subset F$
2. $\text{rg}(u) = \dim u(E) \leq \dim E$

`Exemple 13.` $(*)$ Déterminer le rang de l'application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P associe P'.

Exercice : 11

Soient $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ où E est une $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Prouver que :

1. $\text{rg}(u \circ v) \leq \text{rg}\, u$
2. $\text{rg}(u \circ v) \leq \text{rg}\, v$

Exercice : 12

$(**)$ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, F un K-ev de dimension finie p et $u,\ v \in \mathcal{L}(E,\ F)$.
Montrer que

$$\left|\text{rg}(u) - \text{rg}(v)\right| \leq \text{rg}(u+v) \leq \text{rg}(u) + \text{rg}(v)$$

Lemme 29 : On ne change pas le rang d'une famille de vecteurs en :

1. Echangeant la place de 2 vecteurs.
2. Multipliant un vecteur par un scalaire $\lambda \neq 0$.
3. Ajoutant un vecteur du système à un autre.

Preuve 29 : En effet, ces 3 opérations ne changent pas le sev engendré par la famille de vecteurs.

Remarque 19. On ne change donc pas le rang d'une famille de vecteurs en multipliant un vecteur par un scalaire non nul et en lui ajoutant une CL des autres vecteurs de la famille.

Algorithme du rang

Pour rechercher le rang d'un système de vecteurs dont on connaît les coordonnées dans une base B donnée, on peut représenter ces vecteurs dans une matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs.
Les opérations élémentaires précédentes correspondent alors à des opérations sur les colonnes. On admettra pour l'instant qu'il est possible d'effectuer ces mêmes opérations sur les lignes. On peut ainsi triangulariser cette matrice par la méthode de Gauss.
Une fois la matrice triangularisée, on lit le rang en comptant le nombre de termes non nuls de la diagonale.

Algorithme du rang

`Exemple 14.` $(*)$ Rechercher le rang de la famille de vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 de $\mathbb{R}^5$:

$$u_1(2,\ 3,\ -3,\ 4,\ 2),\quad u_2(3,\ 6,\ -2,\ 5,\ 9),\quad u_3(7,\ 18,\ -2,\ 7,\ 7),\quad u_4(2,\ 4,\ -2,\ 3,\ 1)$$

Remarque 20. Pour toutes les opérations d'algèbre linéaire, Maple utilise le package `> with(linalg);`.
La syntaxe est alors la suivante : `> rank(matrix([[2,3,-3,4,2],[3,6,-2,5,9],[7,18,-2,7,7],[2,4,-2,3,1]]));`.

Théorème Fondamental 30 : **Formule du rang**

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel quelconque et $u \in L(E,\ F)$.
On a alors la fomule suivante appelée, *formule du rang* :

$$\boxed{\dim E = \dim \ker(u) + \text{rg}\, u}$$

Preuve 30 :
Soit $(e_1, \dots, e_p)$ une base de $\ker u$, que l'on complète avec $(e_{p+1}, \dots, e_n)$ pour obtenir une base de E.
On montre alors que $(u(e_{p+1}), \dots, u(e_n))$ est une base de $\operatorname{Im} u$.
Par conséquent, $\dim \operatorname{Im} u = n - p$, relation dont on déduit la formule du rang !

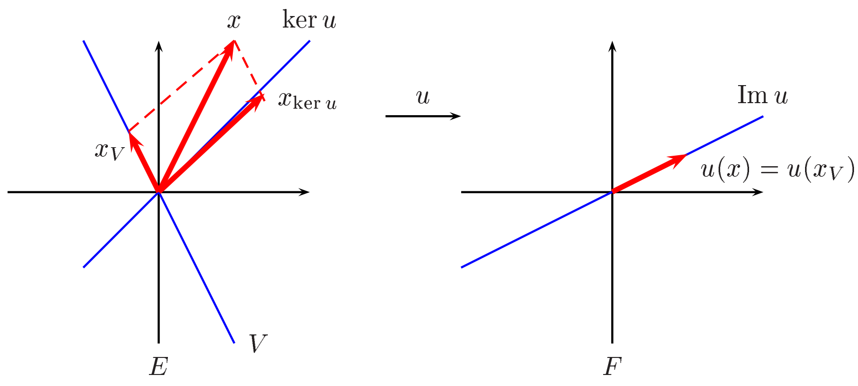

FIG. 2 – *Démonstration de la formule du rang : $E = \ker u \oplus V$ et $V \approx \operatorname{Im} u$*

Remarque 21. On montre dans la démonstration de la formule du rang, que $\operatorname{Im} u$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\ker u$, mais en général, même si u est un endomorphisme, $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas supplémentaires. Trouver un exemple d'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ pour lequel $\operatorname{Im} u = \ker u$!

`Exemple 15.` $(*)$ Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

1. $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (y - z, z - x, x - y)$
2. $f : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z, t) = (2x + y, x + y + t, x + z - t)$
3. $f : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\overline{z}$ ($\mathbb{C}$ étant ici considéré comme un $\mathbb{R}$-ev).

Exercice : 13
$(**)$ Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension n tels que $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \ker u + \ker v = E$.
Prouver que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont supplémentaires, ainsi que $\ker u$ et $\ker v$.

THÉORÈME FONDAMENTAL 31 : **Isomorphismes en dimension finie**
Soient deux espaces vectoriels E et F sur le corps $\mathbb{K}$ de *même dimension finie* n.
Soit une application linéaire $u \in L(E, F)$. Alors

$$u \text{ injective } \iff u \text{ surjective } \iff u \text{ bijective}$$

Preuve 31 :

1. Supposons u injective.
   Alors $\ker u = \{0_E\}$ et d'après la formule du rang : $\dim \operatorname{Im} u = n$. $\operatorname{Im} u$ est donc un sev de F de même dimension que F. On a donc $\operatorname{Im} u = F$ et u est donc surjective. Et donc bijective !
2. Supposons u surjective.
   On utilise là encore la formule du rang.

Remarque 22. Ce théorème est bien entendu faux si les deux espaces n'ont pas la même dimension.

COROLLAIRE 32 : Soient deux espaces vectoriels E et F sur le corps $\mathbb{K}$ de *même dimension finie* n.
Soit une application linéaire $f \in L(E, F)$. Alors

$$f \text{ est bijective } \iff \operatorname{rg}(f) = n$$

Exercice : 14

1. $(**)$ On considère $(n+1)$ réels distincts $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(x_0), \dots, P(x_n)) \end{array}$
   (a) Montrer que ϕ est un isomorphisme.

(b) En déduire que si $(y_0, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [0, n]$, $P(x_i) = y_i$. Ce polynôme est alors appelé : *polynôme interpolateur de Lagrange*.

2. (∗∗) Soient deux réels distincts $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et quatre réels $(\alpha, \beta, \delta, \gamma) \in \mathbb{R}^4$.
En utilisant la méthode précédente, montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(a) = \alpha,\ P'(a) = \beta,\ P(b) = \delta,\ P'(b) = \gamma$$

Théorème 33 : **Conservation du rang par un isomorphisme**
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Soit $u \in L(E, F)$ et $f \in L(F, G)$ injective . On a alors : $rg(fou) = rg(u)$
2. Soit $u \in L(E, F)$ et $f \in L(G, E)$ surjective. On a alors : $rg(uof) = rg(u)$
3. Soit $u \in L(E)$ et $f \in L(E)$ bijective. On a alors : $rg(uof) = rg(fou) = rg(u)$

Preuve 33 :

1. Il suffit de remarquer qu'une application linéaire injective conserve la dimension d'un sev.
2. On a $\mathrm{Im}(uof) = u(\mathrm{Im}\, f) = u(E) = \mathrm{Im}\, u$.

Remarque 23. Les formules $rg(fou) = rg(u)$ et $rg(uof) = rg(u)$ sont a fortiori vérifiées lorsque f est un isomorphisme.

5 Endomorphismes en dimension finie

Exercice : 15

(∗∗) Soit E un K-ev de dimension finie n, et $u \in L(E)$. Montrer que : $\ker u = \mathrm{Im}\, u \iff \begin{cases} u^2 = 0 \\ n = 2\,\mathrm{rg}(u) \end{cases}$

Théorème Fondamental 34 : **Caractérisation 1 des automorphismes en dimension finie**
Soit un espace vectoriel E de dimension finie n et un endomorphisme $u \in L(E)$. On a :

$$\boxed{u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}} \iff rg(u) = n$$

Preuve 34 : C'est une conséquence immédiate du théorème 27.

Remarque 24. Ce théorème est très utile en pratique. Si E est de dimension finie, alors pour prouver qu'un endomorphisme u de E est bijectif, il suffira de montrer qu'il est injectif (le plus facile puisqu'il s'agit simplement de prouver que $\ker u = \{0\}$).

Exercice : 16

(∗∗) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in E$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E$ vérifiant $P' + P = Q$.

Définition 4 : Soit E un espace vectoriel et un endomorphisme $u \in L(E)$. On dit que

1. u est inversible à gauche ssi il existe $v \in L(E)$ tel que $v \circ u = \mathrm{id}$.
2. u est inversible à droite ssi il existe $w \in L(E)$ tel que $u \circ w = \mathrm{id}$.
3. u est inversible ssi il existe $u^{-1} \in L(E)$ tel que $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \mathrm{id}$.

Théorème Fondamental 35 : **Caractérisation 2 des automorphismes en dimension finie**
Soit $u \in L(E)$.
Lorsque E est de dimension finie, on a la caractérisation :

$$\boxed{u \text{ inversible} \iff u \text{ inversible à gauche} \iff u \text{ inversible à droite}}$$

Dans ce cas, on a : $v = w = u^{-1}$.

Preuve 35 :

1. Si u est inversible à gauche, alors l'endomorphisme v tel que $v \circ u = \mathrm{id}_E$ est surjectif.
Comme E est de dimension finie, v est bijectif. Dans ce cas, $u = v^{-1}$ et u est bijectif.
2. De même si u est inversible à droite.

Remarque 25. Ce résulat est faux en dimension infinie comme le montre le contre-exemple suivant.
Soit $\mathcal{S}$ l'espace des suites réelles.
On définit deux endomorphismes (le " shift " à gauche et à droite) : $\left\{\begin{array}{l} s_g : (a_0,a_1,\dots) \mapsto (a_1,a_2,\dots) \\ s_d : (a_0,a_1,\dots) \mapsto (0,a_0,a_1,\dots) \end{array}\right.$.
Etudier l'injectivité, la surjectivité de s_g, s_d. Calculer $s_g \circ s_d$. Conclure.

Exercice : 17

($*$) Soit E un K-ev de dimension finie n et $u,v \in L(E)$. Montrer que : $u^2 \circ v - u \circ v \circ u + \mathrm{id} = 0 \quad \Rightarrow \quad u \in GL(E)$

6 Les formes linéaires en dimension finie

Définition 5 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle *forme linéaire* sur E tout élément de $L(E, \mathbb{K})$.
$L(E, \mathbb{K})$ est appelé le *dual* de E et est noté E^*.

Théorème Fondamental 36 : **Expression analytique d'une forme linéaire**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
On note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées d'un vecteur x dans cette base.
Alors,

$$\boxed{\phi \in E^* \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tels que } \forall x \in E,\ \phi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i}$$

Preuve 36 :

- $\Rightarrow$ Si $\phi \in E^*$. Soit x de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.
  On a alors $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$ et par conséquent, $\phi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i.\phi(e_i)$. Ceci est bien de la forme attendue !
- $\Leftarrow$ Si ϕ est de la forme $\phi(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i$ alors il est évident que ϕ est une forme linéaire.

Théorème 37 : **Les hyperplans en dimension finie**
On rappelle qu'un *hyperplan* de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension fini $n \in \mathbb{N}$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$.
On note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées d'un vecteur x de E dans cette base.

1. H est un hyperplan $\Longleftrightarrow \exists (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ (non tous nuls) tels que $\left(x \in H \Longleftrightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = 0\right)$
2. H hyperplan de E si et seulement si H a pour dimension $n - 1$

Preuve 37 :

1. Evident compte-tenu du théorème précédent.
2. $\Rightarrow$ Evident compte-tenu du théorème du rang.
   $\Leftarrow$ en remarquant qu'il existe une droite vectorielle supplémentaire.

`Exemple 16.` ($*$) Soit $H = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4,\ 2x_1 - x_2 = x_4\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

`Exemple 17.` ($*$) Soit $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$. Montrer que $\left\{\begin{array}{l} u(1, 2, 1) \\ v(-1, 1, 1) \end{array}\right.$ forment une base de H.

Exercice : 18

($*$) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et H_1 et H_2, deux hyperplans distincts de E.
Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

7 Etude des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Objectif : Trouver l'expression en fonction de n du terme général d'une suite récurrente d'ordre 2.

$$\forall n \geq 2, \quad \boxed{u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}}$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
On considère : $\boxed{E_p = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \geq 2,\, u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}\}}$.

On considère le polynôme $P = X^2 - aX - b$ appelé le *polynôme caractéristique* de la suite (u_n).

7.1 Préliminaires

1. Montrez que E_p est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
2. Prouvez qu'une suite (u_n) de E_p est parfaitement déterminée par la donnée de u_0 et u_1.
3. A l'aide de l'application $\phi : \begin{array}{ccc} E_p & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (u_n) & \mapsto & (u_0, u_1) \end{array}$, déterminez la dimension de E_p.

Théorème 38 : Dimension de l'ensemble des suites linéaires récurrentes d'ordre 2
Soit $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.
L'ensemble des suites (u_n) telles que : $\forall n \geq 2,\, u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

7.2 Etude des différents cas :

1. On suppose que P admet 2 racines distinctes λ et μ dans $\mathbb{R}$.
   On note $g_\lambda = (\lambda^n)$ et $g_\mu = (\mu^n)$.
   (a) Montrez que $(g_\lambda\,; g_\mu)$ est une base de E_p
   (b) En déduire la forme générale des suites de E_p.
   (c) **Exemple :** calculez u_n lorsque : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = -1,\, u_1 = 1 \\ \forall n \geq 2,\, u_n = \dfrac{3}{2}u_{n-1} - \dfrac{1}{2}u_{n-2} \end{array}\right.$
2. On suppose que P admet une racine double λ appartenant à $\mathbb{R}$.
   On note $g_\lambda = (\lambda^n)$ et $h_\lambda = (n\lambda^n)$.
   (a) Montrez que $(g_\lambda\,; h\lambda)$ est une base de E_p.
   (b) En déduire la forme générale des suites de E_p.
   (c) **Exemple :** calculez u_n lorsque : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1,\, u_1 = 9 \\ \forall n \geq 2,\, u_n = u_{n-1} - \dfrac{1}{4}u_{n-2} \end{array}\right.$.
3. On suppose que P est à coefficients réels et admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\omega}$ et $\rho e^{-i\omega}$ avec $\rho > 0$ et ω n'étant pas un multiple de π.

   On pose : $c = (\rho^n \cos n\omega)$ et $s = (\rho^n \sin n\omega)$.
   (a) Montrez que (c, s) est une base de E_p.
   (b) En déduire la forme générale des suites de E_p.
   (c) **Exemple :** calculez u_n lorsque : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1,\, u_1 = 1 \\ \forall n \geq 2,\, u_n = -2u_{n-1} - 4u_{n-2} \end{array}\right.$.

7.3 Bilan

Etude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Soit (u_n) une suite réelle telle que : $\forall n \geq 2,\ u_n = au_{n-1} + bu_{n-2}$ avec $b \neq 0$.
On introduit $P = X^2 - aX - b$ appelé le polynôme caractéristique de (u_n).

1. 1er cas : P admet 2 racines distinctes λ et μ dans $\mathbb{R}$.
   Alors la suite (u_n) est de la forme : $u_n = \alpha.\lambda^n + \beta.\mu^n$.
   On trouve α et β en considérant $n = 0$ et $n = 1$

2. 2eme cas : P admet une racine double λ appartenant à $\mathbb{R}$.
   Alors la suite (u_n) est de la forme : $u_n = (\alpha. + \beta.n)\lambda^n$.
   On trouve α et β en considérant $n = 0$ et $n = 1$

3. 3eme cas : P admet deux racines complexes conjuguées $\rho e^{i\omega}$ et $\rho e^{-i\omega}$
   Alors la suite (u_n) est de la forme : $u_n = \rho^n(\alpha. \cos n\omega + \beta. \sin n\omega)$.
   On trouve α et β en considérant $n = 0$ et $n = 1$