Les Fractions Rationnelles

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

23 février 2011

1 Définition du corps des fractions rationnelles

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif intègre, mais ce n'est pas un corps.
A partir de l'anneau $\mathbb{Z}$, nous avons construit le corps $\mathbb{Q}$. De la même manière, nous pouvons construire à partir de $\mathbb{K}[X]$ le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles. Le détail de la construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas au programme.

Définition 1 : **Fractions rationnelles**
Une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$ est notée $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $Q \neq 0$.
On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles.

Définition 2 :
On définit l'égalité de deux fractions rationnelles par : $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2} \Longleftrightarrow P_1.Q_2 = P_2.Q_1$
Si $F = \dfrac{P}{Q}$ alors $\dfrac{P}{Q}$ est appelé un représentant de F.

`Exemple 1.` $\dfrac{X}{X^2+1}$, $\dfrac{2X}{2X^2+2}$ et $\dfrac{X^2}{X^3+X}$ représentent la même fraction.

Définition 3 : **Représentant irréductible**
Si $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$ alors le couple (P,Q) est unique à une constante multiplicative non nulle près.
$\dfrac{P}{Q}$ est alors appelé un (et pas "le" !!) représentant irréductible de F.

`Exemple 2.` Soit $F = \dfrac{X^2-3X+2}{X^2-1}$. Alors F admet $\dfrac{X-2}{X+1}$ pour représentant irréductible.

Remarque 1. On obtient un représentant irréductible de $\dfrac{P}{Q}$ en divisant P et Q par $P \wedge Q$.

Définition 4 :
On définit sur $\mathbb{K}(X)$ la somme $+$, le produit $\times$ et la loi externe . par les formules suivantes :
Soient $(F_1, F_2) \in \mathbb{K}(X)$ telles que $F_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$, $F_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $F_1 + F_2 = \dfrac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}$
2. $F_1 \times F_2 = \dfrac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$
3. $\lambda.F_1 = \dfrac{\lambda.P_1}{Q_1}$

Remarque 2.
On vérifie simplement que les résultats de ces 3 opérations sont indépendants des répresentants choisis.

Théorème 1 : **Structure**
Muni des lois précédentes :

1. $(\mathbb{K}(X),\ +\ ,\ \times)$ est un corps.
2. $(\mathbb{K}(X),\ +\ ,\ .)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
3. $(\mathbb{K}(X),\ +\ ,\ \times\ ,\ .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative et unitaire (car $\times$ $\begin{cases}\text{est commutative}\\ \text{admet un élément neutre}\end{cases}$).

Preuve 1 : Il faut redémontrer une à une toutes les propriétés qui définissent chacune de ces structures.

Théorème 2 :

La fonction $\begin{array}{cccc}\phi : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X)\\ & P & \mapsto & \dfrac{P}{1}\end{array}$ est un morphisme injectif d'algèbres.

Preuve 2 : Il faut démontrer que $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}(X)$ sont deux $\mathbb{K}$-algèbres et que $\begin{cases}\phi(P+Q)=\phi(P)+\phi(Q)\\ \phi(P\times Q)=\phi(P)\times\phi(Q)\\ \phi(\lambda.P)=\lambda.\phi(P)\\ \phi(1)=1\end{cases}$

Remarque 3.
Cela signifie que tout $P \in \mathbb{K}[X]$ s'indentifie à la fraction $\dfrac{P}{1}$ et que l'on peut donc considérer que $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.

Définition 5 : **Degré d'une fraction rationnelle**
Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle degré de F, l'élément de $\mathbb{Z}$ défini par :

$$\boxed{\deg F = \deg P - \deg Q}$$

Lorsque $F \neq 0$, le degré de F est un entier relatif.
Lorsque $F = 0$, $\deg F = -\infty$.

Remarque 4. La fonction "degré" est bien indépendante du représentant choisi !

`Exemple 3.` Si $F = \dfrac{X^2}{X^4+1}$ et $G = \dfrac{X^2}{X-1}$ alors $\deg(F) = -2$ et $\deg(G) = 1$.

⚠ ATTENTION ⚠

Une fraction rationnelle de degré positif n'est pas forcément un polynôme
(cf la fraction G).

Proposition 3 : **Propriétés du degré d'une fraction rationnelle**
On a les mêmes propriétés que pour le degré des polynômes :

1. $\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2)$
2. $\deg(F_1F_2) = \deg F_1 + \deg F_2$
3. $\deg(\lambda.F) = \deg(F)$ si $\lambda \neq 0$ et $\deg(\lambda.F) = -\infty$ si $\lambda = 0$.

Preuve 3 : Il suffit de faire les calculs ...

Remarque 5. Si $\deg(F_1) \neq \deg(F_2)$, alors on a $\deg(F_1 + F_2) = \max(\deg F_1, \deg F_2)$.

Proposition 4 : Soit $n \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble $\mathbb{K}_n(X)$ des fractions rationnelles de degré inférieur ou égal à n est un sev de $\mathbb{K}(X)$.

Preuve 4 : On utilise la méthode usuelle pour démontrer qu'un ensemble est un sev.

Remarque 6. En revanche, comme $\mathbb{K}_n(X)$ n'est pas stable par $\times$, ce n'est pas une sous-algèbre de $\mathbb{K}(X)$.

Définition 6 : **Zéros, pôles d'une fraction rationnelle**

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ où $\dfrac{P}{Q}$ est $\boxed{\text{irréductible}}$. Les racines de $\begin{cases} P \text{ s'appellent les } \textit{zéros} \text{ de } F \\ Q \text{ s'appellent les } \textit{pôles} \text{ de } F \end{cases}$.

Remarque 7.

1. La définition des *zéros* et des *pôles* d'une fraction rationnelle est indépendante du représentant irréductible choisi.
2. Un pôle (resp. zéro) $a \in \mathbb{K}$ de la fraction $F = \dfrac{P}{Q}$ est dit de *multiplicité* $k \in \mathbb{N}$, lorsque a est une racine d'ordre de multiplicité k du polynôme Q (resp. P).

`Exemple 4.` Soit $F = \dfrac{(X-1)^2}{(X^2+1)(X+1)}$.

1. Dans $\mathbb{R}(X)$, 1 est le seul zéro de F (d'ordre 2) et -1 est le seul pôle de F.
2. Dans $\mathbb{C}(X)$, 1 est le seul zéro de F (d'ordre 2) et -1, i et -i sont les pôles de F.

Définition 7 : **fonctions rationnelles**

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ où $\dfrac{P}{Q}$ est irréductible et $\mathcal{P}$ est l'ensemble des pôles de F.

La *fonction rationnelle* $\widetilde{F}$ associée à F est définie par : $\begin{array}{rccc} \widetilde{F} : & \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)} \end{array}$.

On pourra noter $\mathbb{K}(x)$ l'ensemble des fractions rationnelles.

Théorème 5 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

La fonction $\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{K}(X) & \longrightarrow & \mathbb{K}(x) \\ & F & \mapsto & \widetilde{F} \end{array}$ est un isomorphisme d'algèbres.

Preuve 5 : Démonstration non exigible.

Remarque 8. Cela signifie en particulier que dans $\mathbb{R}(X)$ et $\mathbb{C}(X)$, deux fractions rationnelles sont égales si et seulement si leurs fonctions rationnelles associées sont égales.

Définition 8 : **Dérivée d'une fraction rationnelle**

Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$.

On définit *formellement* la dérivée de cette fraction rationnelle par la formule $F' = \dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2}$

Remarque 9. On définit la *fonction rationnelle* dérivée associée à la dérivée de F : $\widetilde{F'} : \mathbb{K} \setminus \mathcal{P} \mapsto \mathbb{K}$.
Cette fonction dérivée coïncide avec la dérivée usuelle de la fonction $\widetilde{F}$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2 Décomposition en éléments simples (DES) d'une fraction rationnelle

2.1 Résultats généraux dans $\mathbb{K}(X)$

2.1.1 Recherche de la partie entière d'une fraction rationnelle

Proposition 6 : **Décomposition 1 :** $\boxed{\textbf{Parties entière et fractionnaire d'une fraction rationnelle}}$

Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ irréductible.

Il existe un unique couple $(E, \widehat{F}) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}(X)$ tel que $\begin{cases} F = E + \widehat{F} \\ \deg \widehat{F} < 0 \end{cases}$

E est appelé la *partie entière* et $\widehat{F}$ est appelée la *partie fractionnaire* de la fraction F.

Preuve 6 :

1. L'existence provient de la division euclidienne de P par Q.
2. L'unicité se démontre de façon usuelle en pensant à utiliser la fonction degré.

Remarque 10. E est le quotient de la division euclidienne de P par Q.

PROPOSITION 7 : On montre facilement que :
- $E = 0$ lorsque $\deg F < 0$
- $\deg E = \deg F$ lorsque $\deg F \geq 0$.

Preuve 7 : Pas de difficulté !

On détermine $\left\{\begin{array}{l}\text{la partie entière}\\ \text{la partie fractionnaire}\end{array}\right.$ d'une fraction $\dfrac{P}{Q}$ en effectuant la division euclidienne de P par Q.

`Exemple 5.` Déterminer la décomposition de $F(X) = \dfrac{X^4+X+1}{X(X-1)(X-2)}$ sous la forme $F = E + \widehat{F}$ avec $\left\{\begin{array}{l} E \in \mathbb{R}[X] \\ \deg \widehat{F} < 0 \end{array}\right.$.

2.1.2 Décomposition de la partie fractionnaire d'une fraction rationnelle

On s'intéresse à la décomposition de $\widehat{F}$, une fraction rationnelle de degré < 0.

PROPOSITION 8 : **Décomposition 2 :** **Parties polaires d'une fraction rationnelle**

Soit $\widehat{F} = \dfrac{R}{(X-a)^k \widehat{Q}} \in \mathbb{K}(X)$ irréductible de degré < 0 et un pôle $a \in \mathbb{K}$ de multiplicité k (donc $\widehat{Q}(a) \neq 0$).

Il existe un unique couple $(A_k, B_k) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que :

$$\boxed{\frac{R}{(X-a)^k \widehat{Q}} = \frac{A_k}{(X-a)^k} + \frac{B_k}{\widehat{Q}}} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l} \deg(A_k) < k \\ \deg(B_k) < \deg \widehat{Q} \end{array}\right.$$

$\dfrac{A_k}{(X-a)^k}$ est appelée *partie polaire* de la fraction $\widehat{F}$ relative au pôle a.

Preuve 8 :

1. On démontre facilement qu'il existe deux polynômes A_k et B_k tels que $R = \widehat{Q}.A_k + (X-a)^k.B_k$ avec $\deg A_k < k$ à l'aide du théorème de Bezout et en adaptant le degré de A_k grâce à une division euclidienne.
2. Le fait que $\deg B_k < \deg \widehat{Q}$ est alors quasi-immédiat.
3. L'unicité s'obtient facilement grâce au théorème de Gauss.

COROLLAIRE 9 : **Décomposition de la partie fractionnaire pour Q scindé**

Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ telle que :

Q se décompose sous la forme : $Q = (X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_n)^{\alpha_n}$ avec les a_i distincts deux à deux.

Il existe alors n polynômes $A_k \in \mathbb{K}[X]$ et un polynôme $E \in \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$\boxed{F = E + \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{(X-a_k)^{\alpha_k}}} \quad \text{avec} \quad \forall k \in [\![1,n]\!], \quad \deg(A_k) < \alpha_k$$

Preuve 9 : On décompose la partie fractionnaire en généralisant le théorème précédent par récurrence.

Remarque 11. Bien entendu, le corollaire précédent est valable pour toute fraction rationnelle de $\mathbb{C}(X)$.

2.2 Décomposition en éléments simples (DES) pour Q scindé

2.2.1 Forme de la décomposition en éléments simples

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ avec $Q = (X-a_1)^{\alpha_1} \dots (X-a_n)^{\alpha_n}$.

Lemme 10 : Décomposition d'une partie polaire

La partie polaire associée au pôle a_k se décompose de façon unique sous la forme :

$$\frac{A_k}{(X-a_k)^{\alpha_k}} = \frac{\lambda_{k1}}{X-a_k} + \frac{\lambda_{k2}}{(X-a_k)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{k\alpha_k}}{(X-a_k)^{\alpha_k}} \qquad \text{(on rappelle que : } \deg A_k < \alpha_k\text{)}$$

Les coefficients λ_{ki} étant des éléments de $\mathbb{K}$.

Preuve 10 :

1. Ce théorème se démontre facilement en décomposant le polynômes A_k avec la formule de Taylor.
2. Pour l'unicité, on peut utiliser l'unicité de la décomposition d'un polynôme à l'aide de la formule de Taylor.

Remarque 12. Les éléments de la décomposition de la partie polaire sont appelés *éléments simples*.
On dit ainsi qu'on effectue une *décomposition en éléments simples*.

`Exemple 6.` Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle : $F = \dfrac{X^2+2X-1}{(X-1)^3}$

Théorème Fondamental 11 : Décomposition finale d'une fraction rationnelle lorsque Q est scindé

Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ avec Q scindé,
de pôles $a_1, \ldots, a_n$ d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.
La fraction F s'écrit alors de façon *unique* sous la forme

$$\begin{aligned} F = E &+ \left(\frac{\lambda_{11}}{X-a_1} + \frac{\lambda_{12}}{(X-a_1)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{1\alpha_1}}{(X-a_1)^{\alpha_1}}\right) + \cdots + \\ &+ \left(\frac{\lambda_{n1}}{X-a_n} + \frac{\lambda_{n2}}{(X-a_n)^2} + \cdots + \frac{\lambda_{n\alpha_n}}{(X-a_n)^{\alpha_n}}\right) \end{aligned}$$

1. Si $\deg(F) < 0$ alors $E = 0$
2. Si $\deg(F) \geq 0$ alors E est un polynôme de degré $\deg(F)$ (Quotient de la DE de P par Q)

Cette relation s'appelle *la Décomposition en Eléments Simples (DES) de F*.

Preuve 11 :

1. L'existence est une conséquence immédiate des théorèmes précédents.
2. L'unicité provient de l'unicité des différentes décompositions intervenant dans le calcul.

Remarque 13. Les termes apparaissant dans la décomposition précédente de F sont appelés des *éléments simples*.
Ainsi, les éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ sont :

1. Les polynômes de $\mathbb{C}[X]$.
2. Les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{\lambda}{(X-a)^\alpha}$ avec λ, $a \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Méthode générale de décomposition en éléments simples lorsque Q est scindé

1. On regarde le degré de la fraction F à décomposer.
   - Si celui-ci est positif : on détermine par division euclidienne $\begin{cases} \text{la partie entière } E \\ \text{la partie fractionnaire } \widehat{F} \end{cases}$.
   - Sinon : $F = \widehat{F}$.
2. On décompose ensuite la partie fractionnaire $\widehat{F}$ en commençant par factoriser son dénominateur :
   (a) On écrit la forme de la décomposition à obtenir (théorème précédent) avec les coefficients λ_{ij}.
   (b) On trouve les paramètres associés aux pôles simples et aux pôles multiples en utilisant les techniques suivantes.

PROPOSITION 12 : Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$ de racines $\alpha_1, \ \ldots, \alpha_n$ (éventuellement confondues) où $n \in \mathbb{N}^*$.
La décompostion en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{P'}{P}$ est alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{X - \alpha_k}$$

Preuve 12 : Il suffit de faire le calcul ...

Exercice : 1

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et de racines $x_1, \ldots x_n$ distinctes ou non. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $\widetilde{P}(a) \neq 0$.
Calculer à l'aide des données, les sommes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a - x_i}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a - x_i}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a - x_i)^2}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda.x_i + \mu}{(a - x_i)^2}$ $(\lambda \neq 0)$

2.2.2 Recherche des coefficients associés aux pôles simples

Recherche de la partie polaire $\dfrac{\lambda}{X - a}$ associée à un pôle simple a

Notons $\widehat{F} = \dfrac{P}{Q}$ la partie fractionnaire à décomposer.
Pour trouver le scalaire λ, on peut utiliser l'une des deux formules suivantes :

1. $\boxed{\lambda = \dfrac{\widetilde{P}(a)}{\widetilde{\widehat{Q}}(a)}}$ si $Q = (X - a)\widehat{Q}$
2. $\boxed{\lambda = \dfrac{\widetilde{P}(a)}{\widetilde{Q}'(a)}}$ si Q n'est pas factorisé

`Exemple 7.` Trouver dans $\mathbb{C}(X)$ les parties polaires associées aux différents pôles de ces 3 fractions rationnelles.

1. $F(X) = \dfrac{X - 4}{(X - 1)(X + 1)X}$
2. $G(X) = \dfrac{X^4 + X + 1}{X(X - 1)(X - 2)}$
3. $H(X) = \dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

2.2.3 Recherche des coefficients associés aux pôles multiples

Recherche des coefficients associés à la partie polaire $\dfrac{\alpha}{X - a} + \dfrac{\beta}{(X - a)^2}$ d'un $\boxed{\text{pôle d'ordre 2}}$

Attention : la technique suivante ne s'applique qu'à la partie fractionnaire $\widehat{F}$ d'une fraction rationnelle.

1. On peut multiplier la DES de $\widehat{F}$ par $(X - a)$ et faire tendre x vers ∞ dans la fonction rationnelle associée.
2. On peut multiplier la DES de $\widehat{F}$ par $(X - a)^2$ et prendre $x = a$ dans la fonction rationnelle associée.

`Exemple 8.` Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction $F = \dfrac{X^5 + 1}{(X - 3)(X - 1)^2}$.

Remarque 14. Pour aller encore plus vite ...

1. Si $\widehat{F} \in \mathbb{R}(X)$, on peut trouver des relations entre les coefficients de la DES dans $\mathbb{C}$, en considérant la fraction conjuguée de $\widehat{F}$.
2. Si $\widehat{F}$ est paire où impaire, on peut trouver des relations entre les coefficients en considérant $\widehat{F}(-X)$.
3. On peut facilement obtenir des relations vérifiées par les coefficients en choisissant des valeurs simples de x dans les fractions rationnelles associées.

`Exemple 9.` Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $G = \dfrac{X}{(X^2 + 1)^2}$
2. $H = \dfrac{X^2}{X^4 + 1}$

Recherche des coefficients associés à la partie polaire d'un pôle a $\boxed{\textbf{d'ordre } k \geq 3}$

1. Méthode standard :
   (a) Comme précédemment, on peut multiplier la relation par $(X-a)^k$ puis prendre $x = a$.
   On obtient alors la valeur de a_k.
   (b) En soustrayant $\dfrac{a_k}{(X-a)^k}$ de part et d'autre de la relation, on diminue de 1 l'ordre du pôle a.
   (c) On peut alors ré-itérer l'algorithme précédent.

2. Lorsque que l'on connaît la forme explicite $\dfrac{A_k}{(X-a)^k}$ de la partie polaire associée au pôle a, on peut aussi utiliser la formule de Taylor comme nous l'avons vu dans un théorème précédent ou une décomposition *pas à pas* comme nous l'avons vu dans un exemple précédent ($A_k = a_0 + \cdots + a_{k-1}(X-a)^{k-1}$)

3. D'autres méthodes existent, mais elles ne sont pas au programme de MPSI (division selon les puissances croissantes ...)

`Exemple 10.` Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $I = \dfrac{X^2-1}{X(X-i)^3}$
2. $J = \dfrac{2X^2+5}{(X^2-1)^3}$

Remarque 15. Pour obtenir la DES de $F(X)$ sous maple, on utilise la syntaxe : `> convert(F(X),parfrac,X);`

Remarque 16.
La décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$ n'est pas au programme. On l'obtient cependant facilement en :
1. Effectuant une DES de la fraction dans $\mathbb{C}(X)$.
2. On regroupant entre eux deux à deux les éléments simples correspondant aux racines complexes et à leur conjugué.

On constate alors que dans $\mathbb{R}(X)$ les éléments simples sont :

1. Les polynômes de $\mathbb{R}[X]$.
2. Les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{\lambda}{(X-a)^\alpha}$ avec λ, $a \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.
3. les fractions rationnelles de la formes $\dfrac{P}{(X^2+aX+b)^\alpha}$ avec $\begin{cases} P \in \mathbb{R}[X] \ / \ \deg P \leq 1 \\ X^2+aX+b \in \mathbb{R}[X] \ / \ \text{irréductible} \end{cases}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

Remarque 17. La décomposition en éléments simples sert en particulier dans le calcul de primitives mais trouve de nombreuses autres applications comme nous le verrons dans les exercices de TD.