Les fonctions réelles d'une variable réelle
Propriétés Locales

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

25 novembre 2010

Dans ce chapitre, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et seront définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Après avoir introduit quelques concepts et propriétés de base, nous nous intéresserons au comportement des fonctions réelles de la variable réelle en des "points" particuliers de leur ensemble de définition (point de vue LOCAL). Nous introduirons en particulier les notions de *limite* et de *continuité* en un point.
La fonction qui a tout $x \in I$ associe 0, sera notée 0.

1 Vocabulaire de base

DÉFINITION 1 : **Opérations sur les fonctions**

Soient $(f, g) \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ on définit les lois de composition internes et externe suivantes :

Loi	Notation	Définition
Addition :	$(f + g)$	$\forall x \in I, \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Multiplication par un réel :	$\lambda.f$	$\forall x \in I, \quad (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$
Multiplication :	$f \times g$	$\forall x \in I, \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
Valeur absolue d'une fonction :	$\lvert f\rvert$	$\forall x \in I, \quad \lvert f\rvert(x) = \lvert f(x)\rvert$
Inf de deux fonctions :	$\inf(f, g)$	$\forall x \in I, \quad \inf(f, g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$
Sup de deux fonctions :	$\sup(f, g)$	$\forall x \in I, \quad \sup(f, g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$

On définit aussi les fonctions : $f^+ = \sup\{f, 0\}$ et $f^- = \sup\{-f, 0\}$

Remarque 1.

1. Les opérations $\times$ et $+$ dans $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ sont commutatives et associatives et $\times$ est distributive par rapport à $+$.
   On dira que $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}), +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}), +, \times)$ est un anneau.
2. ⚠ : $f \times g = 0$ ne signifie pas que l'une des deux fonctions est nulle.
   On dira que l'anneau $(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}), +, \times)$ n'est pas intègre.
3. On remarquera que : f^+ et f^- sont positives, que $f = f^+ - f^-$ et que $|f| = f^+ + f^-$

DÉFINITION 2 : *Relation d'ordre*
On dit que "f est inférieur à g" (notation : $f \leq g$) ssi : $\forall x \in I, f(x) \leq g(x)$
On définit ainsi une relation d'ordre partielle sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

Remarque 2. ⚠ Réfléchir au sens de $f < g$!!

Définition 3 : **Fonctions bornées (Propriété Globale)**
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

1. On dit qu'une fonction f est minorée ssi $\exists m_1 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ m_1 \leq f(x)$.
2. On dit qu'une fonction f est majorée ssi $\exists m_2 \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I,\ f(x) \leq m_2$.
3. On dit qu'une fonction f est bornée ssi elle est majorée et minorée.

Proposition 1 : Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si

$$\exists M > 0 \text{ tel que } \forall x \in I, \quad \text{on a} \quad |f(x)| \leq M$$

Preuve 1 : Traduction des hypothèses :
Si f est bornée, alors il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I,\ m_1 \leq f(x) \leq m_2$.
Le réel $M = \max(|m_1|, |m_2|)$ convient !!

Remarque 3.

1. Si f et g sont bornées sur I, alors $f+g$, λf, $|f|$ et fg le sont aussi. *Démontrez-le avec la proposition précédente.*
2. On définit les bornes supérieures et inférieures d'une fonction f sur un intervalle I : (voir cours sur les réels)
   Elles seront notées : $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ (ou $\sup\limits_{I} f$) et $\inf\limits_{x\in I} f(x)$ (ou $\inf\limits_{I} f$).

Définition 4 : **Voisinage d'un point de $\mathbb{R}$**

1. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un *voisinage* de $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha, a+\alpha[\subset V$.
   On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a.
2. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un *voisinage* de $+\infty$ s'il existe un réel $A > 0$ tel que $]A, +\infty[\subset V$.
3. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un *voisinage* de $-\infty$ s'il existe un réel $B < 0$ tel que $]-\infty, B[\subset V$.

Dessin

Voisinage d'un point

Remarque 4. Pour simplifier, on considérera qu'un voisinage est de la forme : $\begin{cases}]a-\alpha, a+\alpha[\text{ pour un voisinage de } a \in \mathbb{R} \\ ]A, +\infty[\text{ pour un voisinage de } +\infty \\ ]-\infty, B[\text{ pour un voisinage de } -\infty \end{cases}$.

Ainsi la proposition "il existe V un voisinage de a tel que $\forall x \in I,\ x \in V \Rightarrow$ ..." se traduit par :

1. $\exists \delta > 0$ tel que $\forall x \in I,\ |x-a| \leq \delta \Rightarrow$ ... lorsque $a \in \mathbb{R}$
2. $\exists A > 0$ tel que $\forall x \in I,\ x \geq A \Rightarrow$ ... lorsque $a = +\infty$
3. $\exists B < 0$ tel que $\forall x \in I,\ x \leq B \Rightarrow$ ... lorsque $a = -\infty$

Définition 5 : **Adhérence et Intérieur d'une partie**
Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dira que :

1. Un élément a appartient à *l'adhérence* de A lorsque tout voisinage de a rencontre A.
   On note $\bar{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.
   Si A est un intervalle, alors $\bar{A}$ est l'intervalle avec les bornes comprises.

2. Un élément a appartient à *l'intérieur* d'une partie A lorsqu'il existe un voisinage de a inclus dans A.
   On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.
   Si A est un intervalle, alors $\mathring{A}$ est l'intervalle sans ses bornes.

`Exemple 1.` Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants :

1. $\mathbb{N}$
2. $\mathbb{Q}$
3. $\{1\}$
4. $[0, 1[\cup]3, 5[$

Définition 6 : Maximum global d'une fonction (Propriété Globale)

On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un *maximum global* de f ssi : $\boxed{\begin{cases} \text{il existe } a \in I \text{ tel que } f(a) = M \\ \text{pour tout } x \text{ de } I,\ f(x) \leq f(a) \end{cases}}$

On dit aussi que $\begin{cases} \text{"}f \text{ présente en } a \text{ un maximum global } M \text{ sur } I\text{"} \\ \text{"}f \text{ atteint sur } I \text{ son maximum } M \text{ en } a\text{"} \end{cases}$.

On notera : $\boxed{M = \max_{x \in I} f(x)}$

Remarque 5.

1. On définit de même la notion de minimum global : $m = \min_{x \in I} f(x)$.
2. le maximum et le minimum global d'une application f sur I seront appelés des *extrema* de f.
3. Le maximum et le minimum global, s'ils existent, sont uniques mais peuvent être obtenus en plusieurs valeurs.

Extrema globaux d'une fonction

Définition 7 : Extremum local

On dit que $M = f(a)$ est un *extremum local* de f ssi il existe V un voisinage de a tel que la restriction de f à $V \cap I$ présente en a un extremum (global).

Extremum locaux d'une fonction

Définition 8 : Fonctions monotones (Propriété Globale)

On dit que f est croissante sur I	ssi	$\forall (x, y) \in I^2$		$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
On dit que f est décroissante sur I	ssi	$\forall (x, y) \in I^2$		$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
On dit que f est monotone	ssi elle est	croissante	ou	décroissante.
On dit que f est *strictement* croissante sur I	ssi	$\forall (x, y) \in I^2$		$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
On dit que f est *strictement* décroissante sur I	ssi	$\forall (x, y) \in I^2$		$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Remarque 6.

1. Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.
2. Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ strictement monotone est bijective de I dans $f(I)$.

⚠⚠⚠. Une fonction ne change pas nécessairement de sens de variation en un extrémum local. C/ex : $f(x) = |x \sin \dfrac{1}{x}|$.

`Exemple 2.` Soit $f\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que fof est croissante tandis que $fofof$ est strictement décroissante. Montrer que f est strictement décroissante.

PROPOSITION 2 : **Règle des signes**
Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions monotones. Si $f(I) \subset J$, on peut définir $g \circ f : I \mapsto \mathbb{R}$.
Dans ce cas, $g \circ f$ est monotone et l'on peut utiliser une règle équivalente à la règle des signes pour retrouver la monotonie de $g \circ f$:

f	g	$g \circ f$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Preuve 2 : Applications simples des définitions précédentes.

2 Notions de limite et de continuité

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on notera $\overline{I}$ le segment comprenant I et ses extrémités. (éventuellement infinies)

DÉFINITION 9 : **Limite d'une fonction en un point a**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, $a \in \overline{I}$, et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dira que f admet l pour *limite* au point a
ssi
pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout élément $x \in V_a$ on a $f(x) \in V_l$.

On note alors : $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou plus rapidement : $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

Remarque 7. Traduction selon que a et l soient des réels ou pas :

Lorsque a et l sont réels, on a	$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$	$\Longleftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\forall x \in I,\ \lvert x-a\rvert \leq \delta \Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert \leq \varepsilon$
Lorsque $a = +\infty$ et $l = -\infty$ on a	$f(x) \xrightarrow[x\to +\infty]{} -\infty$	$\Longleftrightarrow$	$\forall B < 0, \exists\ A > 0$ tq $\forall x \in I,\ x \geq A \Rightarrow f(x) \leq B$
Lorsque $a = -\infty$ et l est réel on a	$f(x) \xrightarrow[x\to -\infty]{} l$	$\Longleftrightarrow$	$\forall \varepsilon > 0, \exists\ B < 0$ tq $\forall x \in I,\ x \leq B \Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert \leq \varepsilon$
Lorsque a est réel et $l = +\infty$ on a	$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$	$\Longleftrightarrow$	$\forall A > 0, \exists\ \delta > 0$ tq $\forall x \in I,\ \lvert x-a\rvert \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq A$

Remarque 8. On peut utiliser des inégalités strictes dans la définition des limites, mais cela présente peu d'intérêt.

Limite d'une fonction en $a \in \mathbb{R}$	Limite d'une fonction en $+\infty$

THÉORÈME 3 : **Existence et Unicité de la limite**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$.

1. f n'admet pas forcément de limite au point a
2. Si cette limite existe, elle est alors unique.

Preuve 3 :

1. Existence : prenons par exemple la fonction "Partie Entière" et $a = 1$.
2. Unicité : On peut par exemple, démontrer le cas où $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$. Les autres cas se démontrant de façon équivalente. On procède alors par l'absurde en considérant qu'il existe deux limites l_1 et l_2. Dans ce cas, en prenant $\varepsilon < |l_1 - l_2|$ on aboutit facilement à une contradiction.

Remarque 9. Cas où a appartient à l'ensemble de définition de f.
Si f admet une limite en a alors cette limite ne peut-être que $f(a)$.
Démontrer cette affirmation par l'absurde en supposant que la limite l est différente de $f(a)$ et en prenant $\epsilon < |l - f(a)|$

PROPOSITION 4 : Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in \bar{I} \cap \mathbb{R}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
On a alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = l \\ \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l \end{cases}$$

Preuve 4 : Pas de difficulté à l'aide des définitions.

PROPOSITION 5 :

– Lorsque $l \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence suivante : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \iff \lim\limits_{x \to a} f(x) - l = 0$
– Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence suivante : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \iff \lim\limits_{h \to 0} f(a + h) = l$

Preuve 5 : Ces deux équivalences proviennent directement de la définition des limites.

DÉFINITION 10 : **Continuité en un point**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et un point $a \in I$.
On dira que la fonction f est *continue* au point a ssi f admet une limite en a.
C'est à dire, compte-tenue d'une remarque précédente :

$$\boxed{f \text{ est } \textit{continue} \text{ au point } a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

Remarque 10. Avec des quantificateurs cette définition se traduit par:

$$\boxed{f \text{ est continue en } a \in I \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon}$$

Remarque 11.

1. Une fonction qui n'est pas définie en un point a ne peut pas être continue en ce point.
2. Les notions de limite et de continuité en un point se définissent au voisinage d'un point.
   On dit qu'il s'agit de **notions locales**. Pour les étudier, on pourra donc se placer au voisinage du point a.

`Exemple 3.` Démontrez que la fonction $f(x) = \sin x$ est continue en tout $x_0 \in \mathbb{R}$.

THÉORÈME FONDAMENTAL 6 : **Caractérisation séquentielle de la limite en un point**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \bar{I}$. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \iff$ Pour *toute* suite (x_n) de points de I qui tend vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ tend vers l.

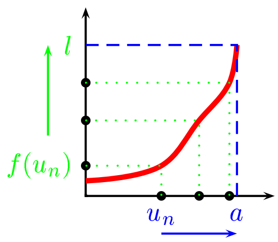

FIG. 1 – *Image d'une suite par une fonction*

Preuve 6 :
- $\Rightarrow$ On considère une suite (x_n) de points de I convergeant vers a. On considère $\varepsilon > 0$ et on montre facilement en explicitant les hypothèses qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|f(x_n) - l| \leq \varepsilon$.
- $\Leftarrow$ Par contraposée : on montre que si $\lim_{x \to a} f(x) \neq l$ alors on peut construire une suite (x_n) convergeant vers a telle que $f(x_n)$ ne converge pas vers l.

Application : Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on pourra :
- Soit prendre une suite (x_n) tendant vers a telle que $(f(x_n))$ n'admet pas de limite
- Soit prendre (x_n) et (y_n) tendant vers a mais telles que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ aient des limites différentes

`Exemple 4.`
1. Montrer que la fonction "Partie Entière" n'admet pas de limite en tout $n \in \mathbb{N}$
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0

Exercice : 1

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ périodique.
Montrez que si $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ existe, alors la fonction f est constante.

Corollaire 7 : La continuité de f en a se traduit alors par :
f continue en $a \iff$ Pour *toute* suite (x_n) de points de I convergeant vers a, $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

`Exemple 5.` **Application à l'étude de la limite d'une suite**
Si (u_n) converge vers 2, que dire alors de la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$?

`Exemple 6.` **Application au transfert de propriété valables sur les rationnels**
Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ nulles en tout point rationnel.

Exercice : 2

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(2x) = f(x)$.
Montrer que f est une fonction constante.

Corollaire 8 : **Limite d'une suite récurrente**
On utilise ce théorème dans l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$
Si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, et si la fonction f est continue au point l, alors la limite l de la suite récurrente est solution de l'équation : $x = f(x)$

Preuve 8 : Immédiat !

`Exemple 7.` La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \ln(u_n) \\ u_0 = 2 \end{cases}$ peut-elle converger ?

Théorème 9 : **Une fonction admettant une limite finie est localement bornée**
Toute fonction admettant une limite finie en un point de $\overline{\mathbb{R}}$ est bornée sur un voisinage de ce point.

Preuve 9 : C'est une conséquence immédiate de la définition de la limite !!

Proposition 10 : **Opérations algébriques sur les limites**
On suppose que les fonctions f et g ont une limite $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. la fonction $|f|$ a une limite en a et : $|f(x)| \xrightarrow[x \to a]{} |l|$.
2. la fonction $(f+g)$ a une limite en a et : $(f+g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l + l'$.
3. la fonction (fg) a une limite en a et : $(fg)(x) \xrightarrow[x \to a]{} ll'$
4. la fonction $1/f$ a une limite en a et : $(1/f)(x) \xrightarrow[x \to a]{} 1/l$ (lorsque $l \neq 0$)
5. la fonction (f/g) a une limite en a et : $(f/g)(x) \xrightarrow[x \to a]{} l/l'$ (lorsque $l' \neq 0$)

Preuve 10 : On démontre ces propositions à l'aide de la définition de la notion de limite. L'idée est alors de majorer chacune des quantités suivantes par des expressions que l'on peut rendre aussi petites que possible, c'est à dire qui font apparaître les quantités $|f(x) - l|$ et $|g(x) - l'|$:

1. $||f(x)| - |l||$ 2. $|f.g(x) - ll'|$ 3. $|\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1}{l}|$ 4. $|\dfrac{f(x)}{g(x)} - \dfrac{l}{l'}|$ 5. $|(f+g)(x) - (l+l')|$

Remarque 12. On peut généraliser ces résultats aux cas où l, $l' \in \{0, \infty\}$ lorsque l'on n'a pas de forme indéterminée.

COROLLAIRE 11 : **Théorème général sur la continuité en $a \in I$**

1. Si f et g sont deux fonctions continues en $a \in I$, alors : $|f|$, $f+g$, $f.g$ et λf le sont. ($\forall \lambda \in \mathbb{R}$)
2. Si de plus, $g(a) \neq 0$ alors $\dfrac{f}{g}$ est aussi continue en a.

Preuve 11 : Immédiat compte-tenu du théorème précédent !

Exercice : 3

Soient deux fonctions $f,\ g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues en un point x_0.

1. Montrer que $\sup(f,\ g) = \dfrac{1}{2}\big(|f-g| + (f+g)\big)$ et que $\sup(f,\ g) = \dfrac{1}{2}\big((f+g) - |f-g|\big)$
2. En déduire que les fonctions $\sup(f,\ g)$, $\inf(f,\ g)$, $f^+ = \sup(f,\ 0)$ et $f^- = \sup(-f,\ 0)$ sont continues au point x_0.

THÉORÈME 12 : **Composition de limites**

Soient deux intervalles $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : I \mapsto J$, $g : J \mapsto \mathbb{R}$.
Soient un point $a \in \overline{I}$, un point $b \in \overline{J}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que : $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \\ g(y) \xrightarrow[y \to b]{} l \end{cases}$, alors $\boxed{g \circ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l}$

Preuve 12 : On traite différents cas selon que a et b sont des réels ou non.
Il s'agit alors d'exprimer de façon cohérente les deux hypothèses.

Remarque 13. Ce théorème justifie la possibilité d'effectuer un changement de variable lors du calcul d'une limite.

Exercice : 4

Déterminer les limites de :

1. $f(x) = x^x$ en 0^+
2. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ en 0
3. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$ en 0
4. $f(x) = \dfrac{1-x}{\arccos x}$ en 1
5. $f(x) = \ln x . \ln(\ln x)$ en 1^+.
6. $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{\ln x + x}$ en $+\infty$

COROLLAIRE 13 : Soient $f : I \mapsto J$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$. Soit un point $a \in I$.
Si f est continue en a et si g est continue en f(a), alors gof est continue en a.

Preuve 13 : Immédiat !

`Exemple 8.` Les fonctions f et g étant continues en $x_0 \in [0,\ 1]$, prouver que la fonction $t \mapsto f(t).g(1-t)$ l'est aussi.

THÉORÈME 14 : **Théorème de la limite monotone**

Soient $(a,\ b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Si $f\ :\ ]a,\ b[\mapsto \mathbb{R}$ est une fonction *croissante*, alors :

1. $\begin{cases} \text{Soit } f \text{ est majorée, et alors } f \text{ admet une limite finie } l \text{ lorsque } x \to b \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to b} f(x) = \sup\limits_{]a,\ b[} f \\ \text{Soit } f \text{ n'est pas majorée, et alors } f(x) \to +\infty \text{ lorsque } x \to b. \end{cases}$
2. $\begin{cases} \text{Soit } f \text{ est minorée et alors } f \text{ admet une limite finie lorsque } x \to a \quad \text{et} \quad \lim\limits_{x \to a} f(x) = \inf\limits_{]a,\ b[} f \\ \text{Soit } f \text{ n'est pas minorée et alors } f(x) \to -\infty \text{ lorsque } x \to a \end{cases}$

On a des résultats similaires dans le cas où f est décroissante.

Preuve 14 : L'existence de la borne sup ne pose pas de difficulté. On prouve alors le résultat à l'aide de la définition de la limite et en utilisant la caractérisation de la borne sup par ε.

Théorème de la limite monotone

`Exemple 9.` Déterminer la limite en $+\infty$ et 0^+ de la fonction logarithme.

3 Prolongement par continuité

Définition 11 : **Limite à gauche, limite à droite**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et a un réel tel que $a \in \overline{I}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.
On dira que :

$$\boxed{f \text{ admet une limite à gauche } l \text{ en } a \iff \text{la restriction de } f \text{ à } I \cap]-\infty\,; a[\text{ admet une limite en } a.}$$

On écrira : $f(x) \xrightarrow[x \to a^-]{} l$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$
On définit de même la limite à droite

Remarque 14. Vous constaterez que les intervalles sont ici ouverts en a !

Limites à droite et à gauche en a.

`Exemple 10.` Limites à droite et à gauche de la fonction f définie par $f(x) = 2x - E(x)$ en tout point $n \in \mathbb{Z}$?

Définition 12 : Soit f définie sur I et $a \in I$.
On dira que f est continue à droite en a ssi $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$
De même, on définit la continuité à gauche en a.

Continuité à droite et à gauche

PROPOSITION 15 : **Caractérisation de la continuité**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ et un point $a \in I$.
On a :

$$f \text{ continue en a} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{continue à droite en a} \\ \text{continue à gauche en a} \end{cases}$$

`Exemple 11.` Etudier la continuité de f définie par $f(x) = 2x - E(x)$ en tout point $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice : 5

Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie par $\begin{cases} \dfrac{\sin x + a}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \tan(x+b) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ soit continue en 0.

DÉFINITION 13 : **Prolongement par continuité**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f\ :]a, b] \to \mathbb{R}$.
Si la fonction f admet une limite finie l à droite en a, on pourra alors *prolonger* f en une fonction

$$\widetilde{f} \ : \ \begin{array}{ccc}]a, b] \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a, b] \\ l & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

La fonction $\widetilde{f}$ ainsi construite est continue à droite au point a.
On dit que $\widetilde{f}$ est le *prolongement par continuité* de f au point a.

Prolongement par continuité

Remarque 15.
1. Pour éviter de compliquer les notations, on confondra souvent f et $\widetilde{f}$
2. De même, si f est définie sur $[a; b[$, on peut définir le prolongement par continuité de f en b.

`Exemple 12.` Prolongez par continuité en 0 les deux fonctions suivantes :

1. $f(x) = x.\ln x$
2. $g(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$

Exercice : 6
Soit $x \geq 0$.
Prouver que la fonction f définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par $f(t) = (\sin t)^x$ est prolongeable par continuité.

4 Limites et inégalités

THÉORÈME 16 : **La connaissance d'une limite fournit une inégalité**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, et un point $a \in \overline{I}$.
Soient deux réels $(k, k') \in \mathbb{R}^2$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \\ k < l < k' \end{cases}$ alors il existe un voisinage V de a sur lequel $\forall x \in V \cap I, \quad k \leq f(x) \leq k'$

Preuve 16 : Il suffit de considérer $\varepsilon = \min(l-k,\, k'-l)$ dans la définition de la limite !

Remarque 16. Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est donc strictement positive au voisinage de ce point.

THÉORÈME 17 : **Passage à la limite dans les inégalités**
Soient deux fonctions f, $g : I \mapsto \mathbb{R}$, un point $a \in \overline{I}$, et deux réels l et l'.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \text{ et que } g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l' \\ f(x) \leq g(x) \text{ au voisinage } V \text{ du point } a \end{cases} \qquad \text{alors} \quad l \leq l'.$$

Preuve 17 : Par l'absurde en utilisant le théorème précédent.

⚠⚠⚠. Dans le théorème précédent, même si $f(x) < g(x)$ au voisinage de a, il est faux d'écrire que $l < l'$.
Pour vous en convaincre, considérez : $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice : 7
Montrer que si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l'$ avec l et l', deux réels tels que $l < l'$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$,
alors il existe un voisinage de a sur lequel : $f(x) < g(x)$

THÉORÈME 18 : **Théorème des gendarmes**
Soient α, f et β trois fonctions définies sur un voisinage V d'un point $a \in \mathbb{R}$, et $l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall x \in V,\ \alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x) \\ \alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \\ \beta(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \end{cases} \qquad \text{alors} \quad \boxed{f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l}$$

Preuve 18 : La traduction des hypothèses donne immédiatement le résultat !

⚠⚠⚠. **Contre-exemple**
Lorsque les fonctions α et β tendent vers deux limites différentes la fonction f n'admet pas forcément de limite.

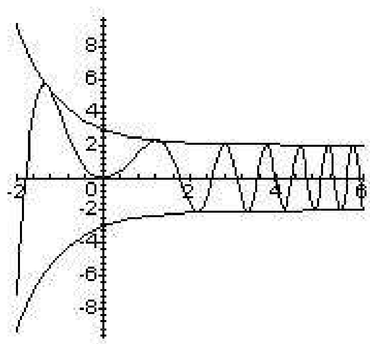

FIG. 2 – *Contre-exemple*

⚠⚠⚠. Ne pas confondre le théorème des gendarmes et le passage à la limite dans les inégalités.
Le théorème des gendarmes donne l'existence de la limite de f, alors que pour passer à la limite dans les inégalités, il faut supposer que f admet une limite.

Remarque 17. Le théorème des gendarmes se généralise aux limites infinies. Ainsi :

1. Si sur un voisinage de $a \in \overline{I}$, on a : $\begin{cases} \alpha(x) \leq f(x) \\ \alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{cases}$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.
2. Si sur un voisinage de $a \in \overline{I}$, on a : $\begin{cases} f(x) \leq \beta(x) \\ \beta(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty \end{cases}$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.

`Exemple 13.`

1. Soit g bornée au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$. Prouvez que $f(x).g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
2. Soit g majorée au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$. Prouvez que $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.
3. Soit g minorée au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f telle que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$. Prouvez que $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

Corollaire 19 : **Théorème de majoration**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, un point $a \in \overline{I}$ et un réel $l \in \mathbb{R}$.
Soit θ une fonction définie sur un voisinage V de a.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall x \in V,\ |f(x) - l| \leq \theta(x) \\ \theta(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{cases} \qquad \text{alors} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l.$$

Preuve 19 : Immédiat en remarquant que dans ce cas, $l - \theta(x) \leq f(x) \leq l + \theta(x)$.

Exercice : 8

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x.\sin\dfrac{1}{x}$ en 0
2. $f(x) = \dfrac{x.\cos(e^x)}{x^2+1}$ en $+\infty$
3. $f(x) = e^{x-\sin x}$ en $+\infty$
4. $f(x) = \dfrac{x + \arctan x}{x}$ en $+\infty$

Exercice : 9

Déterminer si elles existent, les limites en 0^+, en 0^- et en $+\infty$ de $f(x) = x.E(1/x)$.

5 Rappel : Etude des branches infinies d'une courbe $y = f(x)$

f désigne une application d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. On note Γ le graphe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Définition 14 : On dira que Γ admet une branche infinie lorsque l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

1) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \infty$ avec $a \in \mathbb{R}$ on dira que Γ admet une asymptote verticale x = a
2) $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} b$ avec $b \in \mathbb{R}$ on dira que Γ admet une asymptote horizontale y = b
3) $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ ce cas mérite une étude plus poussée.

Définition 15 : **Cas où :** $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$

1) Si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ on dira que Γ admet une branche parabolique de direction Oy en +/-∞
2) Si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ on dira que Γ admet une branche parabolique de direction Ox en +/-∞
3) Si $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} m \in \mathbb{R}$ on dira que Γ admet une direction asymptotique en a d'équation $y = mx$

   Si $f(x) - mx \xrightarrow[x\to\infty]{} p \in \mathbb{R}$ on dira que Γ admet une asymptote oblique d'équation $y = mx + p$

BP Oy	BP Ox	DA $y = mx$	Asymptote $y = mx + p$

`Exemple 14.` Etudier les branches infinies des 3 fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{x^2 + \ln x}{x + e^{-x}}$
2. $f(x) = x + \cos x$
3. $f(x) = x + \sqrt{x}$

6 Comparaison locale de deux fonctions

Soient 2 fonctions f, $g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$.
Nous supposerons ici que f et g sont deux fonctions qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a privé de a.
Il s'agit ici de comparer les 2 fonctions au voisinage de a.

Pour cela, formons leur rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ et regardons ce qui se passe lorsque $x \to a$.

3 cas intéressants se présentent alors :

Cas 1 :	$f(x)/g(x)$ est borné au voisinage de a	On dira que f est dominé par g :	$f = O(g)$
Cas 2 :	$f(x)/g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a	On dira que f est négligeable devant g :	$f = o(g)$
Cas 3 :	$f(x)/g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers a	On dira que f et g sont équivalentes :	$f \sim g$

6.1 La relation : "Est dominée par ..."

Soit $a \in \overline{I}$ et f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur un voisinage de a privé de a.

Définition 16 : **"Est dominée par ..."**
On dira que la fonction f est *dominée* par la fonction g au voisinage du point a ssi

$$\exists M > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \quad \text{tels que} \quad \forall x \in V \cap I, \quad |f(x)| \leq M.|g(x)|$$

Notation : $f = O(g)$
Par abus de language, on notera $O(g)$ toute fonction dominée par g au voisinage de a.

Remarque 18. Puisque g ne s'annule pas sur un voisinage de a, on a aussi :

$$\boxed{f = O(g) \text{ au voisinage de } a \iff \text{la fonction } \frac{f}{g} \text{ est bornée au voisinage de } a \text{ (privé de } a).}$$

Remarque 19.
1. La notation $f = O(g)$ ne veut rien dire si l'on ne précise pas au voisinage de quel point on se trouve.
2. Ecrire $f = O(1)$ au voisinage de a signifie que f est bornée au voisinage de a.

`Exemple 15.`
1. Si $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x$ alors $f = O(x)$ au voisinage de 0
2. Si $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x$ alors $f = O(x^5)$ au voisinage de $+\infty$

6.2 "Est négligeable devant ..."

Soit $a \in \overline{I}$ et f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur un voisinage de a privé de a.

Définition 17 : **La relation : "Est négligeable devant ..."**
On dira que la fonction f est *négligeable* devant la fonction g au voisinage du point a ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \quad \text{tel que} \quad \forall x \in V \cap I, \quad |f(x)| \leq \varepsilon.|g(x)|$$

Notation : $f = o(g)$ ou parfois $f << g$
Par abus de language, on notera o(g) toute fonction négligeable devant g au voisinage de a.

Remarque 20. Puisque g ne s'annule pas sur un voisinage de a privé de a, on a aussi :

$$\boxed{f = o(g) \text{ au voisinage de } a \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0.}$$

Remarque 21.

1. La notation $f = o(g)$ ne veut rien dire si l'on ne précise pas au voisinage de quel point on se trouve.
2. $f = o(g)$ signifie que $f(x)$ est *beaucoup plus petit en valeur absolue* que $g(x)$ au voisinage de a.
3. Ecrire $f = o(1)$ au voisinage de a signifie que $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$

`Exemple 16.` Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. On a : $x^p = o(x^q)$ au voisinage de 0 $\iff q < p$

`Exemple 17.`

1. Si $f(x) = 3x^5 - x^4 + x^2$ alors $f = o(x)$ au voisinage de 0
2. Si $f(x) = 3x^5 - x^4 + x^2$ alors $f = o(x^6)$ au voisinage de $+\infty$

Théorème 20 : **Comparaison des fonctions usuelles**
Soient α, β, $\gamma > 0$ trois réels.

1. Comparaison ln et puissance :
   - en $+\infty$: $(\ln x)^\gamma = o(x^\alpha)$
   - en 0^+ : $|\ln x|^\gamma = o(\frac{1}{x^\alpha})$
2. Comparaison puissance et exponentielle :
   - en $+\infty$: $x^\alpha = o(e^{\beta x})$
   - en $+\infty$: $x^\alpha = o(a^x)$, lorsque $a > 1$
   - en $-\infty$: $e^{\beta x} = o(\frac{1}{x^\alpha})$, lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$

Par transitivité, on en déduit que : • en $+\infty$: $\ln^\beta x = o(e^{\alpha x})$

Preuve 20 : Voir le cours sur les fonctions usuelles.

`Exemple 18.` Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x^3.\ln^2 x}{e^{5x}}$.

Le théorème précédent dit en gros la chose suivante :

"Aux bornes de leur intervalle de définition,
les exponentielles l'emportent sur les fonctions puissance et
les fonctions puissance l'emporte sur le logarithme."

Proposition 21 : **Opérations sur les relations de comparaisons**

1)	$f = o(g)$, $g = o(h)$	$\Rightarrow$	$f = o(h)$	cad	(transitivité)	idem avec O
2)	$f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g)$	$\Rightarrow$	$f_1 + f_2 = o(g)$	cad	$o(g) + o(g) = o(g)$	idem avec O
3)	$f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$	$\Rightarrow$	$f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$	cad	$o(g_1)o(g_2) = o(g_1 g_2)$	idem avec O
4)	$f = o(g)$	$\Rightarrow$	$hf = o(hg)$	cad	$ho(g) = o(hg)$	idem avec O
5)	$f = o(\lambda g)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$	$\Rightarrow$	$f = o(g)$	cad	$o(\lambda g) = o(g)$	idem avec O

Preuve 21 : Ces démonstrations ne posent aucune difficulté.

`Exemple 19.`

1. En 0, on suppose que : $f(x) = x + o(x)$ et que $g(x) = x^2 + o(x^2)$. Que dire que f + g?
2. Déterminer une fonction f telle que $x \ln x = o(f(x))$ au voisinage de $+\infty$.
3. Déterminer une fonction f telle que $\dfrac{\ln x}{x} = o(f(x))$ au voisinage de 0.

Exercice : 10

Ordonner les fonctions suivantes selon la relation "*est négligeable devant* " au voisinage de $+\infty$.

x^2e^x, $x + x^2$, $\dfrac{x^2}{\ln x}$, $x^3 \ln x$, $\dfrac{e^x}{x \ln x}$, $x + \ln\sqrt{x}$, $\dfrac{x^2}{x + \ln x}$, $x^2 \ln^2 x$

6.3 La relation : "Est équivalent à ..."

Soit $a \in \overline{I}$ et f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur un voisinage de a privé de a.

Définition 18 : **"Est équivalent à ..."**
On dira que f et g sont *équivalentes* au voisinage du point a ssi

$$\forall \varepsilon > 0, \exists V \in \mathcal{V}_a \quad \text{tel que} \quad \forall x \in V \cap I, \quad |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon.|g(x)|$$

Notation : $f \underset{a}{\sim} g$ ou $f \underset{x\to a}{\sim} g$ ou encore $f \sim g$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Remarque 22. Puisque g ne s'annule pas sur un voisinage de a privé de a, on a aussi :

$$\boxed{f \underset{a}{\sim} g \iff \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 1.}$$

Remarque 23.
1. On a $f \sim g \iff f - g = o(g)$ ou encore, $f \sim g \iff f = g + o(g)$ au voisinage de a.
2. La notation $f \sim g$ ne veut rien dire si l'on ne précise pas au voisinage de quel point on se trouve.

⚠⚠⚠.
1. Contrairement aux apparences, il n'y a aucune implication entre $f \underset{a}{\sim} g$ et $f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
2. Ecrire que $f \underset{a}{\sim} 0$ signifie que f est nulle sur un voisinage de a.
   Comme cela n'est, en général, pas le cas en pratique, on veillera à ne jamais l'écrire !

Proposition 22 : La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
Elle est en particulier symétrique, c'est à dire : si f est équivalente à g, g est alors équivalente à f.
On dira donc que f et g sont équivalentes.

Preuve 22 : On démontre facilement que $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 20.
1. Si P est une fonction polynomiale non nulle :
   P est équivalente à son monôme de plus haut degré au voisinage de $+\infty$
   P est équivalente à son monôme de plus bas degré au voisinage de 0
2. Au voisinage de $+\infty$: $\operatorname{ch} x \sim \dfrac{e^x}{2}$ et $\operatorname{sh} x \sim \dfrac{e^x}{2}$
3. Au voisinage de 0 :

(a) $\ln(1+x) \sim x$
(b) $e^x - 1 \sim x$
(c) $\sin x \sim x$
(d) $\arcsin x \sim x$
(e) $\operatorname{sh} x \sim x$
(f) $\operatorname{argsh} x \sim x$
(g) $\tan x \sim x$
(h) $\arctan x \sim x$
(i) $\operatorname{th} x \sim x$
(j) $\operatorname{argth} x \sim x$
(k) $1 - \cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$
(l) $1 - \operatorname{ch} x \sim -\dfrac{x^2}{2}$

Remarque 24. En fait, une fonction donnée admet une infinité d'équivalents au voisinage d'un point a. Seulement l'intérêt d'un équivalent est de remplacer une fonction par une autre fonction plus simple. On choisira donc **toujours** l'équivalent le plus simple.

Par exemple, au voisinage de $+\infty$ on a : $\begin{cases} x^2 + x \sim x^2 \\ x^2 + x \sim x^2 + 2x + 1 \\ x^2 + x \sim x^2 - x - 3 \end{cases}$. Seul le premier équivalent a un intérêt !!

⚠⚠⚠
On retiendra de cet exemple qu'il ne faut jamais donner un équivalent sous la forme d'une somme !!!

Exercice : 11
Prouver que si $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $P(x)e^x + Q(x)e^{-x} = 0$ avec P et Q des fonctions polynômiales, alors $P = Q = 0$.

⚠⚠⚠. Ne pas confondre la notation $\sim$ avec la notation $\simeq$ utilisée parfois en physique.

1. $\cos x \sim 1$ au voisinage de 0 est un équivalent
2. $\cos x \simeq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ au voisinage de 0 est un développement limité caché (Notation jamais utilisée en Math !!)

Proposition 23 : **Un équivalent donne localement le signe de la fonction**
Soient deux fonctions f, $g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$.
Si au voisinage du point a, $f \sim g$ alors, il existe un voisinage V de a sur lequel f et g ont même signe.

Preuve 23 : On démontre facilement qu'il existe un voisinage de a sur lequel $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Théorème Fondamental 24 : Un équivalent donne la limite !
Soient deux fonctions $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$$

Preuve 24 : Pas de difficulté en considérant la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Remarque 25. Pour déterminer la limite d'une fonction, on pourra ainsi rechercher un équivalent simple de la fonction. Pour cela, nous pourrons utiliser les résultats qui suivent ...

Théorème 25 : Equivalents classiques lorsque $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0}$

Au voisinage de a :

- $\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$
- $\sin f(x) \sim f(x)$
- $\arcsin f(x) \sim f(x)$
- $\operatorname{sh} f(x) \sim f(x)$
- $\operatorname{argsh} f(x) \sim f(x)$
- $\tan f(x) \sim f(x)$
- $\arctan f(x) \sim f(x)$
- $\operatorname{th} f(x) \sim f(x)$
- $\operatorname{argth} f(x) \sim f(x)$
- $1 - \cos f(x) \sim \dfrac{f(x)^2}{2}$
- $1 - \operatorname{ch} f(x) \sim -\dfrac{f(x)^2}{2}$
- $\left[e^{f(x)} - 1\right] \sim f(x)$
- $[(1 + f(x))^\alpha - 1] \sim \alpha f(x)$

Preuve 25 : Ces résultats proviennent directement des limites vues dans le cours sur les fonctions usuelles.

Proposition 26 : Calculs avec des équivalents

1. Si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ et $l \neq 0$ alors $f \underset{a}{\sim} l$
2. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $\begin{cases} f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2 \\ f_1 / f_2 \underset{a}{\sim} g_1 / g_2 \end{cases}$
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Si $f \underset{a}{\sim} g$ et f et g sont positives alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ (α est ici indépendant de x !).

Preuve 26 : Pas de difficultés !

Exercice : 12
Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage de 0.

1. $f(x) = \dfrac{xe^x}{x^2 + 1} \ln(1 + x)$
2. $g(x) = \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{\operatorname{argth}(\cos x - 1)}$

⚠⚠⚠. On ne peut pas tout faire avec des équivalents :

1. Soient les fonctions : $f(x) = x^2 + x \qquad g(x) = -x^2 \qquad h(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

   Au voisinage de $+\infty$ on a $\begin{cases} f(x) \sim x^2 \\ g(x) \sim -x^2 \\ h(x) \sim x^2 \end{cases}$, et pourtant $\begin{cases} f(x) + g(x) \sim x \\ h(x) + g(x) \sim \dfrac{1}{x} \\ e^{f(x)} \not\sim e^{x^2} \text{ alors que } e^{h(x)} \sim e^{x^2} \end{cases}$.
2. Soit $\begin{cases} f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}} \\ g(x) = (1 - x)^{\frac{1}{x}} \end{cases}$. Montrer qu'au voisinage de 0 : $\begin{cases} f(x) \not\sim 1^{\frac{1}{x}} \\ g(x) \not\sim 1^{\frac{1}{x}} \end{cases}$.

⚠⚠⚠. Conséquences !!

1. Le symbole $\sim$ ne se manipule pas comme le signe $=$ notamment lorsqu'on a une somme.
2. On peut prendre sans réfléchir des produits, quotients, puissances d'équivalents, mais il faut prendre certaines précautions (voir ci-dessous !) dans la recherche d'un équivalent d'une somme, d'une exponentielle ou d'un logarithme.

3. Dans le cas où α est une fonction de x, il faudra écrire : $f^\alpha = e^{\alpha \ln f}$.
4. La forme 1^∞ est une forme indéterminée !

Théorème 27 : Cas du logarithme et de l'exponentielle

1. Si $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{1\} \end{cases}$ Alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$

2. Si $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{cases}$ Alors $e^f \underset{a}{\sim} e^g$

Preuve 27 : Pas de difficulté.

`Exemple 21.` Déterminer un équivalent de : $f(x) = \ln((x + \sin x)^2 + 1)$ au voisinage de $+\infty$.

Remarque 26. Lorsque $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1 \end{cases}$, on pourra écrire : $\ln f(x) = \ln(1 + (f(x) - 1)) \underset{a}{\sim} f(x) - 1$.

Exercice : 13

Etudier les limites suivantes :

1. $f(x) = \ln \dfrac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}$ en $+\infty$
2. $g(x) = \dfrac{\sin(\sin^3 x^2)}{\sin^3(\sin^2 x)}$ en 0
3. $h(x) = \dfrac{1}{x(x - \ln x)^x}$ en 0^+
4. $k(x) = (\dfrac{\ln(1 + x)}{\ln x})^{x \ln x}$ en $+\infty$
5. $l(x) = (1 + \ln x)^{\tan(\frac{\pi}{2}x)}$ en 1
6. $m(x) = \ln(\ln x + \dfrac{1}{x})$ en $+\infty$

Remarque 27. Lorsqu'on cherche un équivalent au voisinage de $a \in \mathbb{R}^*$, on pourra se ramener en 0 en posant $t = x - a$.

Méthode : Recherche d'un équivalent d'une somme : $f = g + h$

1. On commencera par vérifier si la somme est factorisable.
2. Si ce n'est pas le cas, on recherchera un équivalent simple des fonctions g et h : $\begin{cases} g \sim a \\ h \sim b \end{cases}$.
   On remplacera écrira alors $f = a + o(a) + b + o(b)$ et on comparera les ordres de grandeur de a et b.
3. Lorsque $a + b = 0$, la méthode précédente ne marche pas. On pourra alors :
   - soit tenter de transformer la fonction (factorisation, quantité conjuguée...).
   - soit recourir aux développements limités (voir un cours ultérieur).

`Exemple 22.`

1. $f(x) = x^2 + x. \ln 1/x$ au $\mathcal{V}(+\infty)$.
2. $f(x) = 2x + \ln(1 + x)$ au $\mathcal{V}(0)$.
3. $f(x) = \sin x - \sin \sqrt{x^2 + 1}$ au $\mathcal{V}(0)$.
4. $f(x) = \sin x - x$ au $\mathcal{V}(0)$.

`Exemple 23.`

1. Prouver qu'au voisinage de 0 on a :

   1. $(\sin x)^{\operatorname{sh} x} - 1 \sim x \ln x$
   2. $\dfrac{\sin^3 x}{\ln(1 + x^2)} + \sqrt{x} \sim x$

2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a :

   1. $x^2 + (x - 1)\ln x \sim x^2$
   2. $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x \sim \ln^2 x$
   3. $\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{2 + x + x^2} \sim \dfrac{-1}{2}$
   4. $\ln^3(x + 1) - \ln^3 x \sim \dfrac{3\ln^2 x}{x}$
   5. $\operatorname{sh}\sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh}\sqrt{x^2 - x} \sim e^x \operatorname{sh}\dfrac{1}{2}$

Exercice : 14

Prouver que :

1. $\lim_{x\to 0^+} x\ln(x\,\mathrm{sh}\,\frac{1}{x}) = 1$

2. $\lim_{x\to a} \frac{\log_x a - \log_a x}{\mathrm{sh}\,x - \mathrm{sh}\,a} = \frac{-2}{a\ln a\,\mathrm{ch}\,a}$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} = -1$

4. $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})} = 0$

5. $\lim_{x\to 1} \frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \frac{-2e^2}{\pi}$

6. $\lim_{x\to a} \big(2-\frac{x}{a}\big)^{\tan\frac{\pi x}{2a}} = e^{\frac{2}{\pi}}$

7. $\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\mathrm{sh}\,x\sin x}} = e^{-\frac{1}{2}}$

8. $\lim_{x\to +\infty} \big(\frac{\ln x}{\ln(x+1)}\big)^{x\ln x} = e^{-1}$

9. $\lim_{x\to 0^+} (\ln(1+x))^{\ln(1+x^2)} = 1$