La dérivation

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

13 janvier 2011

1 Dérivée

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 1 : **Dérivée d'une fonction**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, et un point $x_0 \in I$.

On définit le *taux d'accroissement* de la fonction f au point x_0 :

$$\Delta_{x_0} : \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$$

1. On dit que f est *dérivable* en $x_0 \in I$ lorsque : $\lim_{x \to x_0} \Delta_{x_0}(x)$ existe et est finie.
   On note $f'(x_0)$ cette limite.

2. On dit que la fonction f est :

   a) *dérivable à droite* en x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0^+} \Delta_{x_0}(x)$ existe et est finie

   b) *dérivable à gauche* en x_0 lorsque $\lim_{x \to x_0^-} \Delta_{x_0}(x)$ existe et est finie

   On note alors $f'_d(x_0)$ (*dérivée à droite*) et $f'_g(x_0)$ (*dérivée à gauche*) ces deux limites.

Remarque 1.

1. Lorsque $I = [a, b[$, les notions de dérivée en a et de dérivée à droite en a coïncident.
2. Lorsque f est définie sur un voisinage de x_0, on aura alors la caractérisation suivante :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} f \text{ dérivable à gauche et à droite en } x_0 \\ f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \end{cases}.$$

`Exemple 1.` $(*)$ Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

DÉFINITION 2 : Avec le changement de variable $h = x - x_0$, on a aussi la définition suivante :
On dit que la fonction f est dérivable au point $x_0 \in I$ lorsque :

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{admet une limite finie lorsque} \quad h \mapsto 0 \text{ et } h \neq 0$$

Remarque 2.

– En physique, la dérivée d'une fonction f de variable x en x_0 est notée $\dfrac{df}{dx}(x_0)$. Cette notation représente le rapport de la variation infinitésimal de f (noté df) lorsque x_0 varie d'une quantité infinitésimal dx.

– Si $\vec{f}$ représente la position d'un mobile M en fonction du temps t, alors $\vec{f}'(t_0)$ représente les coordonnées du vecteur vitesse de M au temps t_0.

`Exemple 2.` $(*)$

1. Prouver que la fonction $f : x \mapsto \sin x$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = \cos x_0$.
2. Prouver que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en $x = 0$.
3. Prouver que la fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

THÉORÈME 1 : **DL à l'ordre 1 d'une fonction dérivable**

La fonction f est dérivable au point $x_0 \in I$ $\boxed{\text{si et seulement si}}$ il existe un réel $c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$,

$$f(x) = f(x_0) + c(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{au voisinage de } x_0.$$

On a alors $\boxed{c = f'(x_0)}$.
Cette expression est appelée : *développement limité* de f en x_0 à l'ordre 1 : $\mathrm{DL}(x_0, 1)$.

Preuve 1 : Pas de difficulté.

Remarque 3.

1. Le $\mathrm{DL}(x_0, 1)$ s'écrit : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + R(x)$ avec $\begin{cases} R(x) = o(x - x_0) \\ R(x) = (x - x_0)\varepsilon(x - x_0) \text{ et } \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \end{cases}$
2. (a) La droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_0.
   (b) La fonction $R(x) = f(x) - y(x)$ représente la distance algébrique entre le point $\big(x, f(x)\big)$ de la courbe représentative de f et le point correspondant $\big(x, g(x)\big)$ de sa tangente.
   (c) La propriété $R(x) = o(x - x_0)$ dit qu'en x_0, cette distance tend vers 0 plus vite qu'une fonction linéaire.

Dessin

Interprétation géométrique du $\mathrm{DL}(x_0, 1)$

Remarque 4. En posant $h = x - x_0$, le $\mathrm{DL}(x_0, 1)$ de f peut également s'écrire :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \text{ tq } x_0 + h \in I \ : \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \begin{cases} h\varepsilon(h) & \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \\ o(h) \end{cases}$$

COROLLAIRE 2 : **Dérivable implique continue**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Alors

$$(f \text{ dérivable au point } x_0) \Rightarrow (f \text{ continue au point } x_0)$$

Preuve 2 : Conséquence immédiate du théorème précédent.

Remarque 5. La réciproque est bien entendu fausse (C/ex : $f(x) = |x|$)

DÉFINITION 3 : **Dérivabilité sur un intervalle**
On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I ouvert ssi elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$.

On définit alors la fonction dérivée : $\quad f' \; : \; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$

Remarque 6. Un monstre mathématique : la fonction de Bolzano !

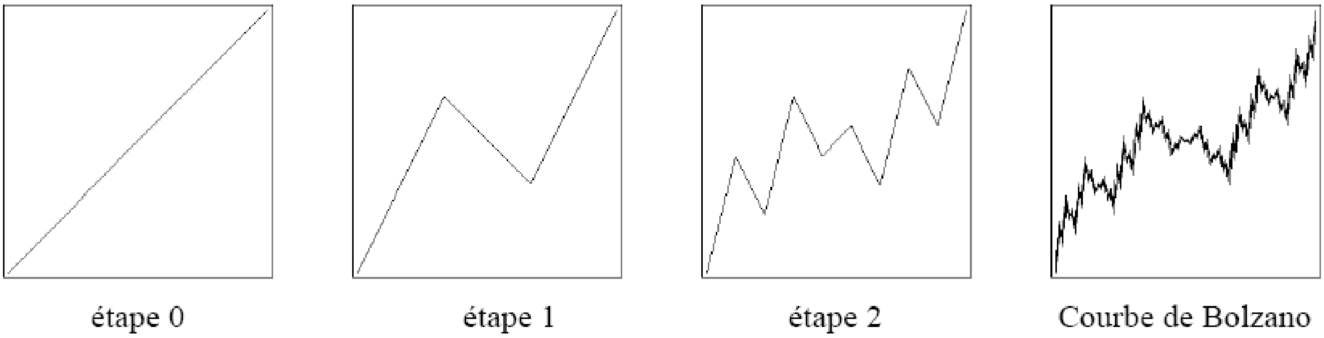

FIG. 1 – *Une fonction continue en tout point de* $[0,\,1]$ *mais dérivable nulle part*

THÉORÈME 3 : **Règles de calcul de dérivées**
Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, on a :

- La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda.u)$ est dérivable sur I et $(\lambda.u)' = \lambda \times u'$
- La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'.v + u.v'$
- Si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et $(\dfrac{1}{v})' = -\dfrac{v'}{v^2}$
- Si v ne s'annule pas sur I, $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\dfrac{u}{v})' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
- Pour un entier $\boxed{n \in \mathbb{Z}}$, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

Preuve 3 : On considère un x_0 quelconque, appartenant à I et on démontre en utilisant la définition et les $DL(x_0,1)$ que ces différentes fonctions sont bien dérivables en x_0 et que leurs dérivées s'expriment sous la forme indiquée.

Exercice : 1

$(*)$ Soient $f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n$, n fonctions dérivables sur I.
Prouver que $f_1 f_2 \dots f_n$ est dérivable sur I et déterminer l'expression de sa dérivée.

THÉORÈME 4 : **Dérivation des fonctions composées**

Soient deux fonctions $\begin{cases} f \ :\ I \mapsto \mathbb{R} \\ g \ :\ J \mapsto \mathbb{R} \end{cases}$ telles que $\begin{cases} I \\ J \end{cases}$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f(I) \subset J$.

On suppose que : $\begin{cases} \text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } I \\ \text{la fonction } g \text{ est dérivable sur } f(I) \end{cases}$ alors,

$$\boxed{\text{la fonction } g \circ f \text{ est dérivable sur } I \quad \text{avec} \quad (g \circ f)' = \left[g'of\right] \times f'}$$

Preuve 4 : Même méthode que dans le théorème précédent ...

`Exemple 3.` $(*)$ Démontrer que la dérivée d'une fonction paire dérivable est impaire, que la dérivée d'une fonction impaire dérivable est paire et que la dérivée d'une fonction périodique est périodique de même période.

COROLLAIRE 5 :
Si : $f(x) = f_1 \circ \cdots \circ f_n(x)$ alors $f'(x) = [f_1' \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n(x)] \times [f_2' \circ f_3 \circ \cdots \circ f_n(x)] \times \cdots \times f_n'(x)$

Preuve 5 : Il s'agit d'une simple récurrence ...

`Exemple 4.` $(*)$ Dériver la fonction définie par $f(x) = \sin\left[\ln\left(\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right]$.

Remarque 7. La plupart du temps, on calcule des dérivées afin d'étudier leur signe. Comme la dérivation en chaîne donne un produit de fonctions, il suffit alors de déterminer le signe de chacun des facteurs.

Exercice : 2

(∗) Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
2. $f(x) = \cos^2(3x-1)$
3. $f(x) = \ln \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$
4. $f(x) = \tan \dfrac{1}{x}$
5. $f(x) = x^x$
6. $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^x}{1+e^x}}$
7. $f(x) = \sqrt{x^5+5x}$
8. $f(x) = \exp(\dfrac{x}{x^2-1})$
9. $f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1}$

Vous pourrez vérifier vos résultats en utilisant les commandes `>diff(f(x),x);` ou `> D(f);` de Maple.

THÉORÈME 6 : **Dérivation de la fonction réciproque**

Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ avec I un intervalle.

On suppose que : $\begin{cases} f \text{ est une bijection de } I \text{ dans } J = f(I) \\ f \text{ est dérivable en tout point de } I \\ f'(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in I \end{cases}$

La fonction f^{-1} est alors définie et dérivable sur $f(I)$ avec $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' o f^{-1}}$

Preuve 6 : La formulation du problème se fait simplement.

1. On commence par remarquer que $f(I)$ est un intervalle.
2. Pour prouver que f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in f(I)$, la principale difficulté consiste alors à montrer que $x \xrightarrow[y \to y_0]{} x_0$ où $x = f^{-1}(y)$. On peut, pour cela, prouver que f^{-1} est continue en y_0 en utilisant le théorème de la bijection vu dans le cours sur la continuité. On aura besoin pour cela de prouver que la fonction f est strictement monotone à l'aide du TVI.

`Exemple 5.` (∗) Démontrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur fonction dérivée :

1. $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
2. $g : x \mapsto e^x$.
3. arcsin
4. argth

Exercice : 3

(∗) Soit $f : [0; \frac{\pi}{2}] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\sin x} + x$.

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

2 Dérivées successives

2.1 Définitions

DÉFINITION 4 : **Dérivées successives**

Lorsqu'elle existe, on définit la fonction f'' par $(f')'$, et par récurrence : $\begin{cases} & f^{(0)} = f \\ \forall k \in \mathbb{N}, & f^{(k+1)} = (f^{(k)})' \quad (= (f')^{(k)}) \end{cases}$

On notera $\mathcal{D}^k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur l'intervalle I.

Remarque 8.

1. Assurez-vous toujours de l'existence de la fonction $f^{(k)}$ avant de calculer cette fonction.
2. En science physique, la dérivée k-ème d'une fonction est notée : $\dfrac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.
   En cas de doute, cette notation a le mérite d'expliciter la variable par rapport à laquelle on dérive la fonction !

`Exemple 6.` (∗)

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin x$.
   Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $f^{(n)}(x)$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x-a}$.
   Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ f est n fois dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ et déterminer une expression de $f^{(n)}(x)$.
   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ la fonction $f : x \mapsto \ln x$ est n fois dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.
3. Prouver que la fonction tan est dérivable à tout ordre sur son domaine de définition.

DÉFINITION 5 : **Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$**
Soit une fonction $f\ :\ I \mapsto \mathbb{R}$ définie sur sur l'intervalle I.

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur l'intervalle } I \text{ ssi } \begin{cases} \text{elle est } k\text{-fois dérivable sur l'intervalle } I \\ \text{La fonction } f^{(k)} \text{ est continue sur l'intervalle } I \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I.
On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle I.

Pour montrer qu'une fonction f est $\mathcal{C}^\infty(I)$, on montrera qu'elle est $\mathcal{C}^n(I)\ \forall n \in \mathbb{N}$.

`Exemple 7.` Les résultats suivants pourront-être utilisés dans les exercices :
- La fonction exp, les fonctions polynomiales, les fonctions cos et sin sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles, tan, ln sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Remarque 9.
S'intéresser à la *régularité* d'une fonction, c'est se demander jusqu'à quelle valeur de k, la fonction est $\mathcal{C}^k(I)$.

`Exemple 8.` $(*)$ Etudier la régularité en 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x.\sin(\dfrac{1}{x})$
2. $f : x \mapsto x^2.\sin(\dfrac{1}{x})$
3. $f : x \mapsto x^3.\sin(\dfrac{1}{x})$

Remarque 10. la continuité en un point est une notion de régularité plus faible que la dérivabilité en un point, qui est elle-même plus faible que de dire que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle contenant ce point. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{C}^\infty(I) \cdots \subset \mathcal{D}^3(I) \subset \mathcal{C}^2(I) \subset \mathcal{D}^2(I) \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I)}$$

2.2 Théorèmes généraux

PROPOSITION 7 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$, alors $f+g$ et $\lambda.f$ sont de classe $\mathcal{C}^n(I)$.

Preuve 7 : On démontre par récurrence que les deux propriétés suivantes sont vraies pour tout entier n :
1. (P_n) : $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^n(I)$ et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
2. (Q_n) : $\lambda.f$ est de classe $\mathcal{C}^n(I)$ et $\lambda.f^{(n)} = \lambda.f^{(n)}$

THÉORÈME 8 : **Formule de Leibniz** [a]
Soient f, g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I.
Alors la fonction (fg) est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I et on a la formule de Leibniz qui exprime la dérivée nième du produit :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

[a] Gottfried Whilhelm von Leibniz (01/07/1646-14/11/1716), Allemand. À l'origine avec Newton du calcul différentiel.

Preuve 8 :
Comme dans la démonstration du théorème précédent, ce résultat se démontre par récurrence en posant :
(P_n) : "Si f est g sont $\mathcal{C}^n(I)$, alors $f.g$ est $\mathcal{C}^n(I)$ et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$"

`Exemple 9.` $(*)$ Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction h définie par $h(x) = (x^2+1)f(x)$. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x)$.
En déduire la dérivée n^{ieme} de $f(x) = (x^2+1)e^{2x}$.

THÉORÈME 9 : **La composée de fonctions $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$**
Soient I et$J$ deux intervalles ouverts.
Si $f \in \mathcal{C}^n(I,J)$ et $g \in \mathcal{C}^n(J,\mathbb{R})$, alors $g \circ f \in \mathcal{C}^n(I,\mathbb{R})$.

Preuve 9 : Par récurrence sur $0 \leq k < n$. On applique l'hypothèse de récurrence à la fonction $(fog)'$.

Remarque 11. Il n'y a pas de formule simple qui donne $(g \circ f)^{(n)}$.

`Exemple 10.` $(*)$ Montrer que les deux fonctions suivantes sont $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I à déterminer :

1. $f(x) = (x+1)^x$
2. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

COROLLAIRE 10 : Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1. Si f est $\mathcal{C}^n$ et ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
2. Si f et g sont $\mathcal{C}^n$ et si g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Preuve 10 : Ce sont des applications du théorème précédent à des applications bien choisies.

DÉFINITION 6 : **Difféomorphismes**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
On dit que f est un $\mathcal{C}^n$-*difféomorphisme* de l'intervalle I vers $J = f(I)$ ssi :

1. f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I
2. f est une bijection de I dans J
3. f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^n$ sur J

Remarque 12.

1. Si $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I vérifie $\forall x \in I,\ f'(x) \neq 0$ alors f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de I vers $J = f(I)$.
2. Les théorèmes prouvant qu'une application est un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme ne sont pas au programme (pour $n > 1$).

`Exemple 11.` La fonction ln est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Remarque 13. Tous les théorèmes précédents restent valables si l'on remplace $\mathcal{C}^n$ par $\mathcal{C}^\infty$.

3 Théorème de Rolle et Théorème des accroissements finis

THÉORÈME 11 : **La dérivée s'annule en un extremum local intérieur**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$, et un point $a \in I$.

On suppose que $\begin{cases} a \text{ est un point } \textit{intérieur} \text{ à } I \\ f \text{ admet un extremum local en } a \\ f \text{ est dérivable au point } a \end{cases}$, alors $f'(a) = 0$.

Preuve 11 : On procède par l'absurde en montrant que si $f'(a) \neq 0$ alors $f(a)$ n'est pas un extrémum local.

Remarque 14.

1. Si l'on sait que f présente un extremum en un point intérieur à I et si f est dérivable sur I alors on cherchera ce point parmi les solutions de $f'(x) = 0$.
2. $f'(a) = 0$ n'est pas une condition suffisante pour que f admette un extremum local en a (penser à $f(x) = x^3$).

`Exemple 12.` Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x^4 - x + 3$.
Déterminer le minimum de f après avoir justifié son existence.

THÉORÈME FONDAMENTAL 12 : **Théorème de Rolle** [a]
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$.

On suppose que : $\begin{cases} f \text{ est continue sur le segment } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur l'intervalle ouvert }]a,b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$ alors $\exists x_0 \in]a,b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

[a] Michel Rolle, 1652 – 1719, mathématicien français à l'origine de la notation $\sqrt[n]{x}$.

Le théorème de Rolle

Preuve 12 : Comme f est continue sur $[a;b]$ alors $f([a;b]) = [c;d]$ où c et d sont les extrema de f sur $[a;b]$. Si c est atteint en un point intérieur à I alors il suffit d'appliquer le théorème 11 et c'est fini. Sinon, on démontre facilement que d est atteint en un point intérieur à I et on applique de nouveau le théorème 11.

Remarque 15. Donner un contre-exemple prouvant que la continuité en a et b est indispensable !

Exercice : 4

($**$) On considère la fonction polynômiale $P(x) = x^n + ax + b$ avec $n \geq 2$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que la fonction P possède au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice : 5

($**$) Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.
Montrer que, même si f' n'est pas continue, il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 16. Le résultat de l'exercice précédent est connu sous le nom de : théorème de Darboux qui dit que :
Si une fonction est dérivable, alors on peut appliquer le TVI à la fonction dérivée f' même si celle-ci n'est pas continue.
Gaston Darboux, $(1842 - 1917)$ est français et a démontré de nombreux théorèmes en géométrie différentielle. Il a aussi construit une intégrale qui porte son nom.

Exercice : 6

Généralisation du théorème de Rolle

($*$) Démontrer que :

$$\boxed{\text{Si}} \text{ une fonction } f : [a, +\infty[\mapsto \mathbb{R} \text{ vérifie} : \begin{cases} f \text{ est continue sur } [a, +\infty[\\ f \text{ est dérivable sur }]a, +\infty[\\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = f(a) \end{cases}, \quad \boxed{\text{alors}} \ \exists c \in]a, +\infty[\text{ tel que } f'(c) = 0.$$

Généralisation du théorème de Rolle :

Théorème 13 : Théorème des accroissements finis

Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Si}} \begin{cases} f \text{ est continue sur le segment } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur l'intervalle ouvert }]a,b[\end{cases} \quad \boxed{\text{alors}} \quad \exists c \in]a,b[\text{ tel que } f(b) - f(a) = (b-a)f'(c).$$

Théorème des accroissements finis

Preuve 13 : L'idée consiste à appliquer le théorème de Rolle à la fonction g obtenue en soustrayant la droite passant par les extrémités de la courbe à la fonction f.

Remarque 17. On rencontre parfois une autre formulation du TAF : Soit $f : [a,\, a+h] \mapsto \mathbb{R}$.
Si f est continue sur $[a,\, a+h]$ et dérivable sur $]a,\, a+h[$, alors $\exists \theta \in]0,\, 1[$ tel que $f(a+h) - f(a) = h.f'(a+\theta h)$.

`Exemple 13.` **Application à la recherche de limites**
$(*)$ Etudier la limite en 1 de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}}$

`Exemple 14.` **Application à la recherche d'inégalités**
$(*)$ Prouver que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $\dfrac{1}{1+x} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \dfrac{1}{x}$

`Exemple 15.` **Application à la recherche d'équivalents**
$(*)$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.
Déterminer un équivalent de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha} - \dfrac{1}{(n+1)^\alpha}$.

Exercice : 7
$(**)$ Soit f une fonction continue et ne s'annulant pas sur $[a,\, b]$ et dérivable sur $]a,\, b[$.
En appliquant le théorème des accroissements finis à une fonction bien choisie, montrer que :

$$\text{il existe } c \in]a;b[\quad \text{tel que} \quad f(b) = f(a) \exp\big((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\big)$$

Corollaire 14 : **Inégalité 1 des accroissements finis**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ définie sur $[a,b]$ (avec $\boxed{a < b}$) et un réel $M \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Si}}$: $\begin{cases} \text{la fonction } f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \text{la fonction } f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ \forall x \in]a,b[,\ m \leq f'(x) \leq M \end{cases}$, $\boxed{\text{alors}}$ $m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$.

Preuve 14 : Pas de difficulté : c'est une conséquence immédiate du TAF.

Corollaire 15 : **Inégalité 2 des accroissements finis**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un segment et un réel $M \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Si}}$: $\begin{cases} \text{la fonction } f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \text{la fonction } f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ \forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \leq M \end{cases}$, $\boxed{\text{alors}}$ $|f(b) - f(a)| \leq M|b-a|$.

Preuve 15 : Pas de difficulté : c'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

`Exemple 16.` $(**)$ **Application à l'étude de suite récurrentes.**
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{1}{u_n})$.
Montrer que (u_n) existe bien, et que sa limite éventuelle L vérifie $|u_n - L| \leq \dfrac{1}{2^n}|u_0 - L|$.
En déduire la convergence de (u_n).

Corollaire 16 : **Une fonction à dérivée bornée est lipschitzienne**
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et un réel $k \geq 0$. Alors :

$$\boxed{\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq k \Longleftrightarrow f \text{ est } k\text{\_lipschitzienne sur } I}$$

Une telle fonction est donc en particulier "uniformément continue" sur I.

Preuve 16 : Aucune difficulté !

Remarque 18.

1. On en déduit qu'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a,b]$ est lipschitzienne.
2. Attention : le théorème précédent ne dit pas qu'une fonction lipschitzienne est dérivable !

Exercice : 8

Formule des accroissements finis généralisés
Soient f et g des fonctions continues sur un segment $[a,b]$ et dérivables sur $]a;b[$.
En appliquant le théorème de Rolle à une fonction bien choisie, montrer que :

$$\text{il existe } c \in]a;b[\quad \text{tel que} \quad (f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$$

Théorème 17 : **Caractérisation des fonctions constantes, monotones**

On suppose que : $\begin{cases} f \text{ est une fonction continue sur le segment } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur l'intervalle ouvert }]a,b[\end{cases}$

On a alors les résultats suivants :

1) $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante sur$[a,b]$.
2) $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[a,b]$.
3) $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0 \iff f$ est constante sur le segment $[a,b]$.

Preuve 17 :

1. La CS est facile à démontrer.
   Pour la CN, on commence par considérer $x_1 < x_2$ deux éléments de $]a;b[$. On applique alors l'égalité de AF sur $[x_1;x_2]$.
2. Par l'absurde : S'il existe x_1 et x_2 dans $[a;b]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, alors en utilisant Rolle, on montre que f' s'annule sur $]x_1;x_2[$.
3. Dire que $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$ revient à dire que $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \leq 0$ et que $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0$ ...

Remarque 19.

1. On a bien entendu des résultats équivalents lorsque la dérivée est négative sur $]a;b[$ ...
2. Ces résultats s'étendent à un intervalle I quelconque : si une fonction $f\ :\ I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intérieur de l'intervalle I, et si pour tout point x intérieur à I, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I. On a les mêmes caractérisations pour les fonctions décroissantes.
3. La réciproque de (2) est fausse : si $f(x) = x^3$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée s'annule en 0.
4. Il est important dans ce théorème que I soit un *intervalle.* Si $I = [0,1] \cup [2,3]$, et si $f = 1$ sur $[0,1]$, $f = 0$ sur $[2,3]$, on a bien $f' = 0$ et pourtant la fonction f n'est pas constante sur l'ensemble I.

Exercice : 9

(∗∗) Soit $M > 0$ et g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ |g'(x)| \leq M$.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + a.g(x)$.
Prouver qu'en choisissant a correctement, la fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 18 : **Recherche d'un extrémum local**
Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.
Si $\begin{cases} \text{f est dérivable sur un voisinage de } x_0 \\ f'(x_0) = 0 \text{ et } f' \text{ change de signe en } x_0 \text{ sur ce voisinage} \end{cases}$, alors f admet un extremum local en x_0.

Preuve 18 : Evident en utilisant le théorème précédent ...

`Contre-Exemple 1.` (∗) En étudiant au voisinage de 0 la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2(1+\sin\dfrac{1}{x^2}) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$, montrer que la réciproque du théorème précédent est fausse.

Théorème 19 : **Théorème de dérivabilité en un point**

Soit une fonction $f\ :\ [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ $\boxed{\text{vérifiant}}$: $\begin{cases} \text{la fonction } f \text{ est continue sur le segment } [a,b] \\ \text{la fonction } f \text{ est dérivable sur l'intervalle }]a,b] \end{cases}$

1. Si $f'(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} l \in \mathbb{R}$ alors la fonction f est dérivable à droite au point a et $f'_d(a) = l$.
   De plus, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en a.
2. Si $f'(x) \xrightarrow[x\to a^+]{} \infty$ alors la fonction f n'est pas dérivable à droite au point a.

Théorème de dérivabilité en un point

Preuve 19 : Pas de difficulté : il suffit d'appliquer le TAF sur un intervalle $[a;x]$ et de faire tendre x vers a.

`Contre-Exemple 2.` (∗) En étudiant la fonction $f\ :\ x \mapsto \begin{cases} x^2\sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ au voisinage de 0, montrer que la réciproque du théorème précédent est fausse !!

Exercice : 10

(∗)
1) Soit $f\ :\ ]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = e^{-1/x}$. Etudier la régularité du prolongement de la fonction f en 0.
2) Soit $f\ :\ ]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 \ln x$. Montrer que le prolongement de la fonction f en 0 est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Définition 7 : **Primitives**

Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I.
On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I si et seulement si :
1. La fonction F est dérivable sur I ;
2. $\forall x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

Théorème 20 : **Deux primitives diffèrent d'une constante**

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un $\boxed{\text{intervalle } I}$ et deux primitives F, $G : I \mapsto \mathbb{R}$ de la fonction f sur l'intervalle I. Alors ces deux primitives diffèrent d'une constante :

$$\exists\, C \in \mathbb{R} \text{ tq } \quad \forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + C$$

Preuve 20 : On considère la fonction $H = F - G$ et on la dérive ...

Remarque 20. Ce résultat est une conséquence du TAF qui lui-même dérive du théorème de Rolle ...

Corollaire 21 : Si une fonction f admet une primitive sur I alors, pour tout $x_0 \in I$, elle admet une unique primitive qui s'annule en x_0.
Cette primitive est notée :

$$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Preuve 21 : Pas de difficulté.

Corollaire 22 : **"intégration" d'égalités et d'inégalités**
Soient deux fonctions $f,\, g : I \mapsto \mathbb{R}$ dérivables sur un intervalle I.

1. Si $\forall x \in I,\ f'(x) = g'(x)$
   Alors pour tout couple $(a,\, b) \in I^2$, on a : $\quad f(b) - f(a) = g(b) - g(a)$

2. Si $\forall x \in I,\ f'(x) \leq g'(x)$
   Alors pour tout couple $(a,\, b) \in I^2$, avec $\boxed{a \leq b}$, on a : $\quad f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$

Preuve 22 : Il suffit de considérer h une primitive de $f' - g'$.

Exercice : 11
$(**)$ Soit une fonction $f : [0, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur $[0, +\infty[$ telle que $\forall x \geq 0,\ f'(x) + f(x) \leq 1$.
Montrer que la fonction f est majorée.
Aide : multiplier l'inégalité par e^x

4 Etude d'une fonction

Définition 8 : **Asymptotes**
Soit $f : [c, +\infty[\mapsto \mathbb{R}$.
On dit qu'une courbe $y = g(x)$ est *asymptote* à la courbe $y = f(x)$ en $+\infty$ ssi

$$f(x) - g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

En particulier, une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f ssi

$$f(x) - [ax + b] \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$$

Courbe asymptote à une autre

Remarque 21. Si $f(x) \sim ax^2$ en ∞ $(a \neq 0)$, on peut alors envisager de rechercher des paraboles asymptotes.

Plan d'étude d'une fonction

1. Trouver le domaine de définition si celui-ci n'est pas donné.
2. Justifier la dérivabilité, calculer la dérivée, la factoriser, et étudier son signe.
3. Construire le tableau de variations. On précise les valeurs *exactes* remarquables, les limites et les prolongements éventuels (on étudie alors la dérivabilité de la fonction prolongée). On peut éventuellement rajouter certaines valeurs utiles.
4. Rechercher les asymptotes ou courbes asymptotiques éventuelles.
5. Faire un tracé approximatif de la courbe $y = f(x)$: on représente les points particuliers, les asymptotes, les tangentes horizontales et verticales.

Remarque 22. La construction d'un tableau de valeurs numériques obtenues à l'aide de la calculatrice ne présente en général aucun intérêt !