Les matrices

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

30 mars 2011

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ représentera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1 Définition d'une matrice

Définition 1 :
Soient deux entiers $n, p \geq 1$.

On appelle *matrice* $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, une application $A : \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i, j) & \mapsto & a_{ij} \end{array}$

que l'on note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ ou parfois } (a_{ij}) \text{ ou encore } (A_{ij})$$

le coefficient a_{ij} (ou A_{ij}) se trouve à l'intersection de la $\boxed{\text{ième ligne}}$ et de la $\boxed{\text{jième colonne}}$.
On note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Remarque 1.

1. Pour un indice de ligne $i \in [\![1,n]\!]$, on note $L_i = (a_{i1}, \dots, a_{ip}) \in \mathbb{K}^p$ le i^{ieme} *vecteur ligne* de A.
2. Pour un indice de colonne $j \in [\![1,p]\!]$, on note $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le j^{ieme} *vecteur colonne* de A.

Remarque 2.

1. Si $n = p$ alors on parlera de matrice *carrée*
2. Si $n = 1$ alors on parlera de matrice *ligne*
3. Si $p = 1$ alors on parlera de matrice *colonne*

Remarque 3. Il est important d'utiliser dans la mesure du possible les conventions suivantes !!

1.	Pour les lignes :	on utilisera i comme indice courant	et	n pour le nombre de lignes
2.	Pour les colonnes :	on utilisera j comme indice courant	et	p pour le nombre de colonnes

Un coefficient sera noté a_{ij}, le premier indice étant l'indice de ligne et le second étant l'indice de colonne.

Définition 2 : **Opérations sur les matrices**
On définit les opérations suivantes sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (ce sont les opérations usuelles sur les applications).
Pour deux matrices A, $B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $A = B$ ssi $\forall (i, j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} = b_{ij}$.
2. $A + B = (c_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\forall (i, j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
3. $\lambda.A = (c_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\forall (i, j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $c_{ij} = \lambda.a_{ij}$.

Remarque 4. On appelera *matrice nulle* (notée 0), la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 3 : **Matrices de la base canonique**
Pour deux indices $k \in [\![1,n]\!]$ et $l \in [\![1,p]\!]$, on définit la *matrice élémentaire* $E_{kl} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$E_{kl} = (\delta_{ik}\delta_{lj}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients de la matrice E_{kl} sont nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la ligne k et de la colonne l qui vaut 1.

Remarque 5. La valeur δ_{ij} est appelé le *symbole de Kroneker*. Il est définie de la façon suivante : $\begin{cases} \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \end{cases}$

Théorème 1 : **L'ensemble des matrices est un $\mathbb{K}$-ev**
Muni des lois précédemment définies, l'ensemble $(\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \times p$.
La famille formée des $n \times p$ matrices E_{kl} est une base de cet ev, appelée *base canonique* de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Preuve 1 :

1. $(\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev car c'est l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{F}([\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \mathbb{K}), +, .)$.
2. On montre facilement que $(E_{11}, \dots, E_{np})$ est libre et que $\mathfrak{M}_{n\ p}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{11}, \dots, E_{np})$.

Remarque 6. On pourra penser à utiliser ces matrices E_{kl} dans certaines démonstrations.

Définition 4 : **Transposée**
Soit une matrice $A = (A_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de taille $n \times p$.
On appelle *transposée* de la matrice A, la matrice ${}^tA \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\boxed{{}^tA = (({}^tA)_{ij}) \quad \text{où} \quad \forall (i, j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad ({}^tA)_{ij} = A_{ji}}$$

L'application $T : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve :

1. Pas de difficulté pour démontrer la linéarité de l'application T.
2. On démontre que T est une bijection en prouvant que $\ker T = 0_{\mathrm{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$.

Remarque 7. Pour trouver la transposée d'une matrice, il suffit d'inverser les lignes et les colonnes.

`Exemple 1.` On a par exemple : ${}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

2 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

Définition 5 : Matrice d'un vecteur dans une base
Soit un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n et une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.
Soit $a \in E$ un vecteur qui se décompose dans la base e en : $a = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$.

On appelle *matrice du vecteur a dans la base e*, la matrice colonne contenant les coordonnées de a dans la base e :

$$Mat_e(a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Remarque 8.

1. Retenez que la matrice d'un vecteur dépend de la base e choisie. C'est pour cela qu'on la note $Mat_e(a)$.
2. Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ se confondent avec leur matrice uniquement lorsque la base choisie est la base canonique.
   Exemple :

   Déterminer la matrice de $x = (1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ dans la base canonique puis dans la base $e = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Définition 6 : Matrice d'une famille de vecteurs dans une base
Soit un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n et une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.
Soit $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de p vecteurs de E (ordonnée), qui se décomposent dans la base e sous la forme

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij}e_i \quad \text{ce qui s'écrit aussi :} \quad Mat_e x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

On appelle matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base e, la matrice $n \times p$ définie par :

$$Mat_e(\mathcal{F}) = Mat_e(x_1, x_2, \ldots, x_p) = \begin{pmatrix} x_{11} & \ldots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \ldots & x_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Remarque 9.

1. Attention à utiliser des indices courants cohérents avec les notations du premier paragraphe.
2. La j^{eme} colonne de $Mat_e(\mathcal{F})$ représente la matrice du vecteur x_j dans e.
3. Là encore, la matrice d'une famille de vecteurs dépend de la base e choisie.

`Exemple 2.` Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par $P = X^2 + 1$ et $Q = X^2 + 3X - 5$.

1. Déterminez la matrice de (P, Q) dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminez la matrice de (P, Q) dans la base $B = (1, (X - 1), (X - 1)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Définition 7 : Matrice d'une application linéaire dans deux bases
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension p et n et $\begin{cases} e = (e_1, \ldots, e_p) \text{ une base de } E \\ f = (f_1, \ldots, f_n) \text{ une base de } F \end{cases}$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ une application linéaire définie par : $\forall j \in [\![1,p]\!]$, $\boxed{u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}f_i}$.

On appelle, *matrice de u relativement aux bases e et f*, la matrice définie par :

$$Mat_{e,f}(u) = Mat_f\big(u(e_1), \ldots, u(e_p)\big) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Remarque 10.

1. Cette définition doit être PARFAITEMENT connue !!!
2. Par soucis de cohérence, il faut impérativement respecter les notations utilisées pour les indices !!
3. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on choisit en général $f = e$. On notera alors $Mat_e(u)$ la matrice de u dans la base e.

4. Si e et f sont les bases canoniques de E et de F alors on dira que $Mat_{e,f}(u)$ est *la matrice canonique* de u.
5. La matrice d'une forme linéaire est une matrice ligne (cf plus loin).
6. Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $\dim E = p$ et $\dim F = n$, alors la matrice de u appartient à $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

`Exemple 3.`

1. Déterminer la matrice de l'application id_E dans la base $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de E un $\mathbb{K}$-ev.
2. Déterminer la matrice canonique de $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X])$ défini par : $D \ : \ P \mapsto P'$.
3. Déterminer la matrice canonique de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ définie par : $\begin{cases} x' = 2x - y + 3z \\ y' = x - 2z \end{cases}$ dans les bases canoniques.

Proposition 2 : **Effet des OEL et OEC**
$u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec $e = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une base de F.
On note $A = \mathrm{Mat}_{ef}\, u$.

1. Une opération élémentaire sur les colonnes (OEC) de A revient à modifier de façon semblable la base e.
2. Une opération élémentaire sur les lignes (OEL) de A revient à modifier de façon semblable la base f.

On appelle qu'une *opération élémentaire* sur les colonnes consite à : "échanger la place de 2 colonnes", "multiplier une colonne par un scalaire non nul" et "additionner une colonne à une autre".

Preuve 2 : Par soucis d'écriture, on pourra utiliser une matrice 2×3.

Remarque 11. **Base adaptée à un projecteur :**
Soit p la projection d'un ev E sur F parallèlement à G ($E = F \oplus G$).
On appellera *base adaptée au projecteur* p une base e constituée en réunissant une base de F et un base de G.
Donner la matrice de p dans une telle base?
Comment définir la notion de *base adaptée* à une symétrie s?

Théorème Fondamental 3 : $\mathcal{L}(E, F)$ **et** $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **sont isomorphes**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p de base e et F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n de base f.

Alors l'application $\begin{array}{rccc} \phi_{e,f} & : & \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ & & u & \mapsto & Mat_{e,f}(u) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve 3 :

1. $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont bien des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.
2. On montre facilement qu'il s'agit bien d'une application linéaire.
3. On montre facilement que $\ker \phi_{e,f} = \{0_E\}$. D'où l'injectivité.
4. La surjectivité est quasi-immédiate.

Remarque 12.

1. Ce théorème est fondamental car il permet d'identifier matrices et applications linéaires.
   En d'autres termes, toute matrice peut s'interpréter comme une application linéaire, et toute application linéaire peut se représenter sous la forme d'une matrice. Après avoir, bien entendu, choisi les bases de départ et d'arrivée !!
2. Si A est une matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'unique application $u : \mathbb{K}^p \mapsto \mathbb{K}^n$ qui admet A pour matrice canonique est appelé *l'application linéaire canonique* associée à A.
3. Lorsque les bases e et f sont les bases canoniques de E et F, on dira que A est la matrice canoniquement associée à l'application u.

`Exemple 4.` Déterminer l'expression analytique de l'application linéaire canonique associée à la matrice : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

Corollaire 4 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p de base e et F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n de base f.
Soient u et v des applications linéaires de E dans F de matrices respectives U et V dans e et f.
Alors :

$$\boxed{u = v \iff U = V}$$

Preuve 4 : Conséquence immédiate du théorème.

Remarque 13.

1. En particulier, $u = 0 \iff U = 0$.

2. On pourra donc, sans difficulté passer d'une égalité entre applications linéaires à une égalité matricielle. Plus généralement, en raison de la linéarité de Φ_{ef}, on pourra traduire une combinaison linéaire entre applications linéaires par la même combinaison linéaire entre les matrices associée.
   A condition bien entendu que les matrices correspondent aux matrices des applications linéaires dans les mêmes bases.

Corollaire 5 : **Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$**
Si E et F sont deux ev de dimension finie, alors $\boxed{\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F}$

Preuve 5 :
D'après le théorème précédent, $\mathcal{L}(E, F)$ et $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes avec $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de dimension finie.
On montre alors que $\mathcal{L}(E, F)$ est nécessairement de dimension finie.
On en déduit l'égalité des dimensions.

Définition 8 : **Matrice d'une forme linéaire dans une base**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p, $e = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $e' = (1)$ la base canomique de $\mathbb{K}$.
Soit $\phi \in E^\star$ une forme linéaire.

La matrice de ϕ dans les bases e, e' est la matrice ligne suivante :

$$Mat_e(\phi) = \big(\phi(e_1), \quad \dots \quad ,\phi(e_p)\big) \in \mathfrak{M}_{1,p}(\mathbb{K})$$

Remarque 14.
1. Réciproquement, toute matrice ligne s'interprète comme la matrice d'une forme linéaire de $(\mathbb{R}^p)^\star$.
2. Remarquer que pour exprimer la matrice d'une forme linéaire, on prend toujours la base canonique de $\mathbb{K}$.

Définition 9 : **Matrice d'une famille de n formes linéaires**
Soient $\phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de n formes linéaires sur un $\mathbb{K}$-ev E de dimension p. Soit e une base de E.
On appelle *matrice de la famille ϕ dans e* la matrice dont la i^{eme} ligne est la matrice de φ_i dans e.

Remarque 15.
Toute matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ peut donc s'interpréter comme la matrice d'une famille de n formes linéaires sur $\mathbb{K}^p$.

3 Produit matriciel

3.1 Définition et propriétés

Définition 10 : **Produit de matrices**
Soit deux matrices $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.
On définit la *matrice produit* $AB = (c_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad \boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}}$$

Produit matriciel :

Remarque 16.

1. ⚠ la multiplication de 2 matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la deuxième.
2. La formule donnant le terme c_{ij} d'un produit de matrices est très souvent utilisée en exercice ou dans les démonstrations. Il faut donc la retenir par coeur !!!

`Exemple 5.` Effectuer le produit de matrices suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice : 1

1. Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
   A quelle condition les produits AB et BA sont-ils simultanément possibles ?
   Que dire dans ce cas, des deux matrices produits obtenues ?
2. Vérifier que le produit A^tA est toujours possible, et donner la particularité de cette matrice produit.
   Quelle particularité supplémentaire a la diagonale de A^tA lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$?

Théorème 6 : **Matrice d'une composée d'applications linéaires**
On considère trois $\mathbb{K}$-ev E, F et G de dimensions respectives p, q et n et deux applications linéaires u et v :

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$$

Si e, f et g sont des bases de E, F et G, alors $Mat_{e,g}(v \circ u) = Mat_{f,g}(v) Mat_{e,f}(u)$.

Preuve 6 : Dans cette démonstrations, il faut choisir judicieusement les indices courants. On prendra :
1. j l'indice courant de la base e (cohérent avec le choix de p pour la dimension de E)
2. i l'indice courant de la base g (cohérent avec le choix de n pour la dimension de G)
3. k l'indice courant de la base f

On appelera alors :
1. A la matrice de v dans les bases f, g.
2. B la matrice de u dans les bases e, f.

Il faut alors déterminer pour tout $j \in [\![1,p]\!]$ l'expression de $v \circ u(e_j)$ dans la base g.

On montre alors que la i^{ieme} coordonnée de $v \circ u(e_j)$ n'est autre que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$.

Remarque 17. Avec les notations habituelles, on aura ainsi : $w = v \circ u \iff W = VU$

Théorème 7 : **Propriétés de la multiplication**
1. **Associativité :** Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
2. **Bilinéarité :** En prenant les matrices et les scalaires dans des ensembles adaptés, on a :
   (a) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
   (b) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
   (c) $\lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B)$
3. **Commutativité :** Qu'en pensez-vous ?....

Preuve 7 : Simples calculs ... dont on se dispensera ...

Exercice : 2

1. Le produit suivant est-il possible ? $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$
2. Quelle est la taille de la matrice résultat ?
3. Effectuer le calcul.

Exercice : 3

Soit deux applications linéaires

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\,y,\,z) & \mapsto & (x-y,\,x+y+z) \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,\,y) & \mapsto & (x+y,\,x+2y,\,x-y) \end{array}$$

On note e la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Ecrire $Mat_{e,f}(u)$ et $Mat_{f,e}(v)$
2. Ecrire $Mat_{e,e}(v \circ u)$ et $Mat_{f,f}(u \circ v)$
3. Donner l'expression analytique de $u \circ v$ et $v \circ u$.

THÉORÈME 8 : **Transposée d'un produit**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$$

Preuve 8 : Simple calcul.

3.2 Recherche du noyau et de l'image d'une application linéaire

THÉORÈME 9 : **Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire**
Soit deux $\mathbb{K}$-ev E et F de $\left\{\begin{array}{l}\text{dimensions respectives } p \text{ et } n\\ \text{bases respectives } e \text{ et } f\end{array}\right.$.

Soient : $\begin{array}{lll} x \in E & \text{et} & X = Mat_e(x) \text{ sa matrice dans la base } e. \\ u \in \mathcal{L}(E,\,F) & \text{et} & U = Mat_{e,f}(u) \text{ sa matrice dans les deux bases } e \text{ et } f. \end{array}$

$$\boxed{\text{La matrice de } u(x) \quad \text{est} \quad UX}$$

Preuve 9 : Il s'agit d'une simple vérification.

Remarque 18. On aura ainsi : $u(x) = v(x) \Longleftrightarrow UX = VX$

`Exemple 6.` Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X],\,\mathbb{R}^2)$ de matrice $U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques. Calculer $u(X^2 - X + 2)$.

COROLLAIRE 10 :
Soient deux matrices $A,\,B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$AX = BX \quad \forall X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad A = B$$

Preuve 10 : Corollaire immédiat du théorème précédent ...

Remarque 19. Cette équivalence est la traduction de l'égalité des applications : $u = v \Longleftrightarrow u(x) = v(x) \quad \forall x \in D_f$.
ATTENTION !! Ce n'est pas parce que $AX_0 = BX_0$ pour un X_0 donné que $A = B$. Trouver un exemple !

Remarque 20. Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a alors : $\quad A = 0 \Longleftrightarrow AX = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Exercice : 4
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in L(E)$ un endomorphisme tel que $\forall \phi \in E^\star$, $\phi \circ u = 0_{E^\star}$.
Montrer que $u = 0$.

DÉFINITION 11 : **Noyau et Image d'une matrice**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de vecteurs colonnes $A = (C_1,\,\dots,\,C_p)$.
On appelle :

- *noyau de A* l'ensemble $\ker A = \{X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$
- *image de A* l'ensemble $\operatorname{Im} A = \{AX \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} = \operatorname{Vect}(C_1,\,\dots,\,C_p)$

`Exemple 7.` Déterminer le noyau et l'image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Recherche du noyau et de l'image d'une application linéaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de $\begin{cases} \text{dimensions respectives } p \text{ et } n \\ \text{bases respectives } e \text{ et } f \end{cases}$.

Soit $A = Mat_{e,f}(u)$ que l'on note $A = (C_1, \ \dots, C_p)$.

- si $x \in E$ on notera $X = Mat_e(x)$ sa matrice dans la base e.
- si $y \in F$ on notera $Y = Mat_f(y)$ sa matrice dans la base f.

1. **Recherche du NOYAU de** u : On a : $\boxed{x \in \ker u \iff X \in \ker A}$ $(\iff AX = 0)$
   Ainsi :
   (a) on détermine $\ker A$ sous la forme $\ker A = \text{Vect}(U_1, \ \dots, U_q)$.
   (b) on en déduit que $\ker u = \text{Vect}(u_1, \ \dots, u_q)$ avec $\forall k \in [\![1,q]\!]$, $u_k \in E$ tel que $U_k = Mat_e(u_k)$.

2. **Recherche de l'IMAGE de** u : On a : $\boxed{y \in \text{Im}\, u \iff Y \in \text{Im}\, A}$
   Ainsi :
   (a) on détermine $\text{Im}\, A = \text{Vect}(C_1, \ \dots, C_p)$ (en prenant soin d'éliminer les vecteurs redondants).
   (b) on en déduit que $\text{Im}\, u = \text{Vect}(c_1, \ \dots, c_p)$ avec $\forall k \in [\![1,p]\!]$, $c_k \in F$ tel que $C_k = Mat_f(c_k)$.

Proposition 11 : Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors :

$$\dim \ker A + \dim \text{Im}\, A = p$$

Preuve 11 : On introduit l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A auquel on applique le théorème du rang.
Il ne reste plus qu'à prouver que $\ker u$ et $\ker A$ ont même dimension ainsi que $\text{Im}\, u$ et $\text{Im}\, A$ à l'aide d'isomophismes bien choisis.

`Exemple 8.` Assurez-vous que ce résultat est vérifié dans l'exemple précédent.

`Exemple 9.` Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\ker A$ et $\text{Im}\, A$.
2. Déterminer $\ker u$ et $\text{Im}\, u$ dans le cas où $A = Mat_{e,f}(u)$ avec $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et e et f des bases de E et F.
3. Déterminer $\ker u$ et $\text{Im}\, u$ dans le cas où $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}_2[X])$ et $\begin{cases} e \text{ la base canonique de } \mathbb{R}^4 \\ f = (1, X-1, (X-1)^2) \end{cases}$.

Définition 12 : **Rang d'une matrice**
Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $C_1, \ \dots, C_p \in \mathbb{K}^n$ ses vecteurs colonnes.
On appelle *rang* de la matrice A, le rang du système de vecteurs $(C_1, \ \dots, C_p)$ dans l'espace $\mathbb{K}^n$.

$$\boxed{\text{rg}\, A = \dim \text{Im}\, A}$$

Proposition 12 : **Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire qu'elle représente**
Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Soit deux $\mathbb{K}$-ev E (dimension p) et F (dimension n) munis de deux bases e et f.
On sait qu'il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $Mat_{e,f}(u) = A$. Alors

$$\boxed{\text{rg}(A) = \text{rg}(u)}$$

Preuve 12 : Effectuée lors de la démonstration de la proposition 11.

Remarque 21. Le rang de $u \in \mathcal{L}(E, F)$ n'est autre que le rang de sa matrice exprimée dans des bases e et f quelconques. On pourra le déterminer à l'aide de l'algorithme du rang.

Exercice : 5
Endomorphismes de rang 1

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
   Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\text{rg}(A) = 1 \iff \exists (X, Y) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2 \;\; A = X\,{}^tY$

4 L'algèbre des matrices carrées.

4.1 Généralités

Définition 13 : Matrice carrée
On appelle *matrice carrée* d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$, une matrice de taille $n \times n$.
On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Dans le cas des endomorphismes, comme l'espace vectoriel de départ et d'arrivée sont les mêmes, on les munira pour simplifier, de la même base. D'où la définition suivante :

Définition 14 : Matrice d'un endomorphisme dans une base
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in L(E)$.
Soit une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de E.
On appelle matrice de l'endomorphisme u dans la base e, la matrice de l'application linéaire u relativement aux bases e et e :

$$Mat_e(u) = Mat_{e,e}(u)$$

Exercice : 6

Soit $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ et $A \in E$. On définit deux applications u et v par : $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ et $v : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \mapsto & MA \end{array}$

1. Donner une base $\mathcal{B}$ de E.
2. Vérifier que $u, v \in \mathcal{L}(E)$ et donner leur matrice dans $\mathcal{B}$.
3. Généraliser le résultat aux matrices d'ordre n.

Définition 15 : Matrice identité

On appelle $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 22. Habituellement, la matrice d'un endomorphisme, dépend de la base choisie.
Cependant, si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, les endomorphismes $\lambda\,\text{id}_E$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}$) sont des exceptions puisqu'ils admettent pour matrice λI_n dans *n'importe quelle* base de E.

Théorème 13 : L'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$
Muni des lois définies précédemment :
1. $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n^2
2. $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau d'élément neutre I_n pour la multiplication.
3. $(\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \times B)$.

Preuve 13 :
1. On sait que $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Sa dimension est donnée par un théorème précédent.
2. Pour prouver que $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, il reste à prouver que :
   • $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par la multiplication. OK !
   • la multiplication est associative et qu'elle admet un élément neutre. OK !
   • la distributivité de la multiplication sur l'addition. OK !
3. Simple vérification.

Remarque 23. Un ensemble qui admet ces 3 propriétés est appelée une $\mathbb{K}$ -*algèbre* associative et unitaire.

Théorème Fondamental 14 : **Identification de $\mathcal{L}(E)$ et de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$**
Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base e, alors l'application :

$$\begin{array}{rccc} \phi : & (\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ) & \longrightarrow & (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times) \\ & u & \mapsto & Mat_e(u) \end{array}$$ est un isomorphisme d'anneau et d'espace vectoriel.

Preuve 14 : On sait déjà que ϕ est une bijection et que les ensembles d'arrivée et de départ sont des anneaux et des espaces vectoriels. Il ne reste donc plus qu'à montrer que :

1. $\phi(u + \lambda.v) = \phi(u) + \lambda.\phi(v)$
2. $\phi(u \circ v) = \phi(u).\phi(v)$
3. $\phi(Id_E) = I_n$

Définition 16 : Si e est $\boxed{\text{la base canonique}}$ de $\mathbb{K}^n$:

1. L'application $\begin{array}{rccc} \phi : & \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & Mat_e(u) \end{array}$ est appelé *l'isomorphisme canonique* de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
2. L'antécédent de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ par ϕ est appelé l'endomorphisme canoniquement associé à A.

Exercice : 7

Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dans une base e donnée.

Proposition 15 : **Les non-propriétés de l'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$**

1. l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas *commutatif* : en général $AB \neq BA$
2. l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas *intègre* : $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$
3. l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un corps.

Preuve 15 :
1. Il suffit de prendre un exemple.
2. Il suffit de prendre un exemple.
3. Conséquence des propriétés précédentes.

Proposition 16 : **Formules :**

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\boxed{AB = BA}$.
Puisque $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, on a :

1. $(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k A^k B^{p-k}$ (binôme)
2. $A^p - B^p = (A - B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \cdots + AB^{p-2} + B^{p-1})$
3. $(I_n - A^p) = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1})$

Preuve 16 : Il s'agit des formules usuelles valables dans tout anneau.

Remarque 24. On utilise souvent la formule du binôme pour calculer les puissances d'une matrice.

Exercice : 8

1. Soit A une matrice carrée nilpotente (telle qu'il existe une puissance nulle).
   Montrer que la matrice $(I - A)$ est inversible.
2. Soit deux scalaires $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
3. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer A^2, A^3 et en déduire $\forall n \in \mathbb{N}$ l'expression de la matrice A^n.

Les résultats ou les méthodes précédents sont à retenir : on les rencontrera souvent dans les exercices ...

4.2 Trace d'une matrice carrée

DÉFINITION 17 : **Trace d'une matrice**
Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle *trace de la matrice* M, la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

PROPOSITION 17 : **Propriétés remarquables**

1. L'application Tr : $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$ est une forme linéaire.
2. Pour toute matrice $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Preuve 17 :
1. Aucune difficulté.
2. Il suffit de faire le calcul.

Remarque 25. Vérifier sur un exemple que en revanche : $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(ACB)$

Exercice : 9

1. Démontrer que : $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX) \iff A = B$
2. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$.
3. Existe-t-il deux matrices $A, B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $AB - BA = I_n$?

5 Matrices remarquables

5.1 Matrices scalaires

Ce sont des matrices de la forme : $M = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$

THÉORÈME 18 : L'ensemble des matrices scalaires est $\left\{ \begin{array}{l} \text{un sous-anneau} \\ \text{un sev} \end{array} \right.$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve 18 : Pour démontrer qu'il s'agit d'un sous-anneau et d'un sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il suffit de :
1. Prouver que cet ensemble contient I_n.
2. Prouver la stabilité par combinaison linéaire.
3. Prouver la stabilité par la multiplication.

Remarque 26. On dit alors que cet ensemble est une sous-algèbre de dimension 1 de l'algèbre $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +,\ \times,\ .)$

5.2 Matrices diagonales

Ce sont des matrices de la forme : $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(d_1,\ \dots,\ d_n)$ où $(d_1,\ \dots,\ d_n) \in \mathbb{K}^n$

THÉORÈME 19 : L'ensemble des matrices diagonales est $\left\{ \begin{array}{l} \text{un sous-anneau} \\ \text{un sev de dimension } n \end{array} \right.$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve 19 : Méthode précédente.

Remarque 27. On dit alors que cet ensemble est une sous-algèbre de dimension n de l'algèbre $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +\ ,\ \times\ ,\ .)$

Remarque 28. Le produit de deux matrices diagonales s'obtient en faisant le produit des éléments diagonaux :

$$\text{Diag}(d_1,\ \dots,\ d_n) \times \text{Diag}(d'_1\ \dots,\ d'_n) = \text{Diag}(d_1 d'_1,\ \dots,\ d_n d'_n)$$

5.3 Matrices triangulaires

Définition 18 : **Matrice triangulaire supérieure**
Soit une matrice $U = (u_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que cette matrice U est *triangulaire supérieure* ssi : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\quad i > j \Rightarrow u_{ij} = 0.$

Ce sont donc les matrices de la forme : $U = \begin{pmatrix} u_{11} & & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$

Remarque 29. On a bien sûr une définition équivalente pour les matrices triangulaires inférieures.

Théorème 20 :
L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est $\left\{ \begin{array}{l} \text{un sous-anneau} \\ \text{un sev} \end{array} \right.$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Preuve 20 :
1. Méthode usuelle.
2. On détermine la dimension en exhibant une base ...

Remarque 30. On dit alors que cet ensemble est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +\ ,\ \times\ ,\ .)$

Remarque 31. Une matrice à la fois triangulaire inférieure et supérieure est diagonale.

5.4 Matrices symétriques, antisymétriques

Définition 19 : **Matrices symétriques, antisymétriques**

1. On dit qu'une matrice carrée A est *symétrique* ssi ${}^t A = A$.
   On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques.
2. On dit qu'une matrice carrée A est *antisymétrique* ssi ${}^t A = -A$.
   On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Remarque 32. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique et la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 33. Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.

Théorème 21 : $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{S}_n \text{ est un sous-espace de } \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \text{ de dimension } \dfrac{n(n+1)}{2} \\ \mathcal{A}_n \text{ est un sous-espace de } \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \text{ de dimension } \dfrac{n(n-1)}{2} \end{array} \right.$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n$

Preuve 21 :
1. On démontre que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont des sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ en exhibant des bases.
   On détermine alors la dimension en comptant le nombre d'éléments contenus dans ces bases.
2. (a) Pour prouver que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_n + \mathcal{A}_n$, on effectuera une analyse.
   (b) On prouve alors facilement que la somme est directe en déterminant l'intersection des deux sev.

Remarque 34. $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ ne sont pas stables par la multiplication. Ce ne sont donc pas des sous-algèbres de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice : 10

Soient A, $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices symétriques.

1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B, pour que le produit AB soit encore symétrique.
2. Les puissances successives de A sont elles symétriques ?
3. Si A est inversible, A^{-1} est elle symétrique ?

6 Le groupe des matrices inversibles.

Définition 20 : **Matrice inversible**
Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit qu'elle est *inversible* si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Théorème 22 : **Elles forment un groupe**
L'ensemble des matrices inversibles $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$ est un groupe d'élément neutre la matrice identité I_n.

Preuve 22 : Il n'existe pas de groupe connu dont $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}),\times)$ serait un sous-groupe.
Il faut par conséquent, redémontrer chaque propriété une à une (non vide, stabilité par la multiplication, associativité, élément neutre, élément symétrique).

Remarque 35.

1. Bien entendu, le groupe des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif !!
2. Ce groupe est appelé le *groupe linéaire.*

Théorème 23 : Si A et B sont deux matrices $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Preuve 23 : Pas de difficulté du fait de l'associativité de la multiplication !

Détermination de l'inverse d'une matrice à l'aide d'un système
Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Si X et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont tels que : $Y = AX$, on a alors $X = A^{-1}Y$.

Pour trouver la matrice A^{-1}, il suffit donc de résoudre le système $Y = AX$.

Remarque 36. Nous avons "$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff Y = AX$ admet une unique solution". Par conséquent, si en inversant le système $Y = AX$ on obtient une unique solution X alors A est inversible et la matrice B telle que $X = BY$ est A^{-1}.

`Exemple 10.` Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème 24 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et e une base de E.

L'application $\begin{array}{cccc} \phi_e : & (\mathcal{GL}(E), \circ) & \longrightarrow & (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \\ & u & \mapsto & Mat_e(u) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Preuve 24 : Pas de difficulté.

Théorème Fondamental 25 : **Caractérisations des matrices inversibles**
Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. A est inversible à gauche : $\exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tq $BA = I_n$ et dans ce cas, $B = A^{-1}$.
3. A est inversible à droite : $\exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = I_n$ et dans ce cas, $B = A^{-1}$.
4. Pour $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: $AX = 0 \Rightarrow X = 0$.
5. $\text{rg}(A) = n$.

On verra aussi dans le cours sur les déterminants que : $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$.

Preuve 25 :
• En utilisant l'endomorphisme canoniquement associé à A, on démontre facilement que chacune des propriétés 2), 3), 4) et 5) impliquent que la matrice A est inversible.
• La réciproque est facile.

Remarque 37. Une matrice triangulaire est inversible ssi ses termes diagonaux sont tous non nuls.

`Exemple 11.` $(*)$ Démontrer que la matrice suivante est inversible : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Théorème 26 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. On a alors : $\boxed{A \text{ est inversible} \iff ad - cb \neq 0}$.
Et dans ce cas :

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-cb}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Preuve 26 : On peut résoudre le système $AX = Y$ ou montrer directement que la formule convient.

Exercice : 11

1. $(*)$ Soient deux matrices carrées non nulles A, $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = 0$.
   Montrer qu'aucune des 2 matrices n'est inversible.
2. $(*)$ Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.
   Montrer que la matrice ${}^tA$ est inversible et déterminer son inverse $({}^tA)^{-1}$.

Exercice : 12

$(**)$ Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. On pose $M = I + A$.

1. Soit une matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer la matrice ${}^tXAX$
2. En déduire que la matrice M est inversible.

Exercice : 13

$(**)$ On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ à *diagonale dominante* : $\forall i \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{ii}| > \sum_{j=1\ (j\neq i)}^{n} |a_{ij}|$.

Montrer que la matrice A est inversible.

7 L'algorithme du rang

L'algorithme du rang est une méthode algorithmique permettant de déterminer le rang d'une matrice par des opérations élémentaire successives sur les lignes (OEL) les colonnes (OEC) de la matrice. Il permet donc en particulier de vérifier si une matrice carrée est inversible ou pas.
En première partie, nous allons nous assurer que la rang d'une matrice est inchangé par OEL ou OEC, puis nous décrirons l'algorithme utilisant des OEL et OEC afin de rechercher le rang d'une matrice.

7.1 Matrices associées aux OEL et aux OEC

Lemme 27 : **Produits de matrices de la base canonique**
Soient $\{E_{ij} \mid (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$ la base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. On a alors :

$$E_{qr} \times E_{st} = \delta_{rs} E_{qt}$$

Preuve 27 : Simple calcul ...

Lemme 28 : **Effet du produit par une matrice de la base canonique**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$. On notera $L_1, \ldots, L_n$ ses lignes et $C_1, \ldots, C_p$ ses colonnes.
Soient $\{E_{ij} \mid (i,j) \in [\![1,q]\!]^2\}$ la base canonique de $\mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$ ($q = n$ ou $q = p$ selon le cas).
On a alors :

1. Effectuer $E_{ij} \times A$ revient à placer L_j à la place de L_i et annuler toutes les autres lignes.
2. Effectuer $A \times E_{ij}$ revient à placer C_i à la place de C_j et annuler toutes les autres colonnes.

Preuve 28 : Simples calculs ...

DÉFINITION 21 : Soit $A \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{K})$.
On appelle *opération élémentaire sur les lignes* (OEL), une des 3 opérations suivantes :

1. L'échange de deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$)
2. La multiplication d'une ligne par un scalaire non nul ($\lambda L_i \to L_i$)
3. L'ajout d'une autre ligne fois un scalaire à une ligne donnée ($L_i + \lambda L_j \to L_i$)

Remarque 38. On définit de la même façon les *opérations élémentaires sur les colonnes* (OEC).

DÉFINITION 22 : **Matrices associées**
Pour $(i, j) \in [\![1,n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \neq 0$, soient les matrices suivantes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $D_i^n(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$
2. $T_{ij}^n(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$
3. $P_{ij}^n = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$

Ces 3 matrices sont inversibles car :

1. $D_i^n(\lambda).D_i^n(\frac{1}{\lambda}) = I_n$
2. $T_{ij}^n(\lambda).T_{ij}^n(-\lambda) = I_n$
3. $[P_{ij}^n]^2 = I_n$

THÉORÈME 29 : **Effet de la multiplication par une matrice associée**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{K})$.

1. Effectuer $D_i^p(\lambda) \times A$ revient à effectuer l'opération $\lambda L_i \to L_i$
2. Effectuer $T_{ij}^p(\lambda) \times A$ revient à effectuer l'opération $L_i + \lambda L_j \to L_i$
2. Effectuer $P_{ij}^p(\lambda) \times A$ revient à effectuer l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$

Preuve 29 : Il suffit de décomposer le calcul.

Remarque 39. Multiplier à droite par $D_i^q(\lambda)$, $T_{ij}^q(\lambda)$ et $P_{ij}^q(\lambda)$ revient à effectuer les mêmes opérations sur les colonnes.

7.2 Les OEL et OEC conservent le rang

THÉORÈME 30 : **La multiplication par une matrice inversible conserve le rang**
Soit une matrice rectangulaire $M \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Soit A une matrice inversible de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et B une matrice inversible de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{K})$. Alors :

$$\text{rg}(AM) = \text{rg}(MB) = \text{rg}(M)$$

Preuve 30 : On sait que la composition (à droite et à gauche) par un isomorphisme ne change pas le rang d'un endomorphisme.
Pour démontrer ce théorème, on considère donc les endomorphismes canoniques associés à M, A et B.

THÉORÈME FONDAMENTAL 31 :
Les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes ne modifient pas le rang d'une matrice.

Preuve 31 : Conséquence directe du théorème précédent.

7.3 Applications pratiques

7.3.1 Recherche du rang d'une matrice

L'algorithme du rang consiste à transformer une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes et ses colonnes. Nous avons vu en effet, que ce type d'opérations ne modifie pas le rang d'une matrice. Le principe consiste donc à effectuer des opérations judicieuses afin d'obtenir une matrice dont le rang se détermine facilement.

Théorème 32 : **Transformation d'une matrice par OEL et OEC**
Tout matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ se transforme par OEL et OEC en une matrice de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & X & \dots & X & X & \dots & X \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & X & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & X & \dots & X \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad (X \text{représente un coefficient quelconque})$$

Le rang de la matrice A est alors égal au nombre de 1 apparaissant sur la diagonale.

Preuve 32 : Difficile à décrire en quelques lignes ...

Remarque 40. Les OEC servent à placer à droite de la matrice les colonnes nulles apparaissant au cours de le transformation et à annuler une colonne proportionnelle à une autre.

`Exemple 12.` (∗) Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque 41. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$, on a : $\operatorname{rg} M \leq \min(n, p)$.

Recherche du rang d'une matrice
Lorsque les exercices demandent de calculer le rang d'une matrice ainsi que son image et son noyau, on pourra procéder de la façon suivante :
1. On recherche le noyau (en résolvant $AX = 0$) ainsi que sa dimension (en recherchant une base)
2. On détermine le rang de la matrice (formule du rang)
3. On élimine les vecteurs redondants des colonnes de la matrice pour déterminer une base de l'image.

7.3.2 Inversion d'une matrice

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Lemme 33 : On peut transformer A en la matrice I_n, en n'utilisant que les OEL.

Preuve 33 :
1. On peut transformer A en une matrice triangulaire supérieure (algorithme de gauss) ne comportant que des 1 sur la diagonale.
2. Puis, en partant de la dernière colonne, on annule tous les coefficients hors de la diagonale.
3. On obtient alors I_n.

Corollaire 34 : Pour déterminer A^{-1}, il suffit d'effectuer sur I_n les mêmes OEL que sur A.

Preuve 34 : Pour déterminer A^{-1}, il suffit d'inverser le système $AX = Y$, c'est à dire $AX = I_n.Y$.
Ainsi, en multipliant à gauche par les matrices des OE, on finit par obtenir $I_n.X = A^{-1}Y$.
I_n a donc été transformée en A^{-1}.

Méthode d'obtention de A^{-1}

1. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} A & \mid & I_n \end{pmatrix}$.
2. Par application des OEL :
   (a) On transforme B de façon à obtenir une matrice triangulaire à la place de A.
   (b) On transforme B de façon à obtenir une matrice diagonale à la place de A.
   (c) On transforme B de façon à obtenir I_n à la place de A.
3. On obtient alors la matrice $B = \begin{pmatrix} I_n & \mid & A^{-1} \end{pmatrix}$.

`Exemple 13.` (∗) En utilisant la méthode précédente, déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

8 Changement de bases

8.1 Matrices de passage

Définition 23 : **Matrice de passage**

Soit un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n et deux bases $\begin{cases} e = (e_1, \ldots, e_n) \\ f = (f_1, \ldots, f_n) \end{cases}$ de E.

On appelle *matrice de passage* de la base e vers la base f, la matrice

$$\boxed{P_{e\to f} = Mat_e(f_1, \ldots, f_n)}$$

Remarque 42. Bien retenir cette définition !!!!

`Exemple 14.` (∗)

1. Dans le plan vectoriel euclidien, déterminer la matrice de passage de la base $(\vec{i}, \vec{j})$ vers la base polaire $(\vec{u}_\theta, \vec{v}_\theta)$. Et la matrice de passage inverse ?
2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, déterminer la matrice de passage de $B_1 = (1, X, X^2, X^3)$ vers $B_2 = (1, 2X, 3 + X + 2X^2, X^3)$. Et la matrice de passage de B_2 vers B_1 ?

Théorème 35 : **Interprétation d'une matrice de passage**

Si e et f sont deux bases du $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, alors : $P_{e\to f} = Mat_{f,e}(\mathrm{id})$

Preuve 35 : $Mat_{f,e}(\mathrm{id})$ est la matrice de $(\mathrm{id}(f_1), \ldots, \mathrm{id}(f_n))$ dans la base e. C'est à dire $Mat_e(f_1, \ldots, f_n)$.

Théorème 36 : **Inverse d'une matrice de passage**

Si e, f, g sont trois bases du $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, alors : $\begin{cases} 1)\ P_{e\to f}P_{f\to g} = P_{e\to g} \\ 2)\ P_{e\to f} \text{ est inversible et } P_{e\to f}^{-1} = P_{f\to e} \end{cases}$.

Preuve 36 :

1. Soient $P_{f\to g} = Mat_{gf}\mathrm{id}_1$, $P_{e\to f} = Mat_{fe}\mathrm{id}_2$ et $P_{e\to g} = Mat_{ge}\mathrm{id}_3$.
   L'égalité $\mathrm{id}_3 = \mathrm{id}_2 \circ \mathrm{id}_1$ donne matriciellement : $P_{e\to g} = P_{e\to f} \times P_{f\to g}$. CQFD !
2. C'est une conséquence de l'égalité précédente.

`Exemple 15.` Vérifier cette propriété en utilisant les résultats des exemples précédents.

Théorème 37 : **Une matrice inversible s'interprète comme matrice de passage**

Soit une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et une base e du $\mathbb{K}$-ev E de dimension n.
Alors il existe une base f de E telle que

$$P = P_{e\to f}$$

Preuve 37 : Soit $u \in L(E)$ tel que $u(e_j)$ admette pour coordonnées le j^{eme} vecteur de P dans la base e.
On a alors $P = Mat_e(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.
Soit $f = (u(e_1), \ldots, u(e_n))$. Comme u est inversible, alors f est une base de E et on a $P = P_{e\to f}$.

8.2 Changement de coordonnées

Théorème 38 : **Pour un vecteur**
Soit un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n et un vecteur $x \in E$. Soient deux bases e et e' de l'espace E.

On note : $\boxed{P = P_{e \to e'} \quad \text{et} \quad \begin{cases} X = Mat_e(x) \\ X' = Mat_{e'}(x) \end{cases}}$.

La relation liant les matrices du même vecteur x dans deux bases différentes s'écrit alors : $\boxed{X' = P^{-1}X}$

Preuve 38 : Il suffit de considérer l'application $\underset{e}{E} \overset{\mathrm{id}_E}{\longrightarrow} \underset{e'}{E}$.

Exercice : 14

$(*)$ Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les bases $e = (\vec{i}, \vec{j})$ et $e' = (\vec{u}, \vec{v})$ où $\vec{u} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{i} + \dfrac{1}{2}\vec{j}$ et $\vec{v} = \dfrac{-1}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées dans e vérifient l'équation $13x^2 + 7y^2 + 6\sqrt{3}xy = 16$.
Déterminer une équation de $\mathcal{E}$ dans la base e'.

Théorème 39 : **Pour une application linéaire**
Soient E et F, deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit une application linéaire $E \overset{u}{\to} F$.
Soient deux bases e, e' de E et deux bases f, f' de F.

On note : $\boxed{\begin{cases} P = P_{e \to e'} \\ Q = P_{f \to f'} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} A = Mat_{e,f}(u) \\ A' = Mat_{e',f'}(u) \end{cases}}$

La relation liant les deux matrices A et A' s'écrit alors : $\boxed{A' = Q^{-1}AP}$

Preuve 39 : Il suffit de remarquer que :

$$\begin{tikzcd} \underset{e}{E} \arrow[r, "u"] & \underset{f}{F} \arrow[d, "\mathrm{id}_F"] \\ \underset{e'}{E} \arrow[u, "\mathrm{id}_E"] \arrow[r, "u"] & \underset{f'}{F} \end{tikzcd}$$

Remarque 43. Ainsi, pour une forme linéaire φ sur un $\mathbb{K}$-ev E, la formule de changement d'une base e de E vers e' où $\mathbb{K}$ reste muni de sa base canonique, s'écrit :

$$\boxed{L' = LP} \quad \text{où} \quad P = P_{e \to e'} \text{ et } \begin{cases} L = Mat_e(\varphi) \\ L' = Mat_{e'}(\varphi) \end{cases}$$

Remarque 44. Réciproquement, si P et Q sont deux matrices inversibles et A et A' sont deux matrices vérifiant la relation $A' = PAQ$, alors A et A' sont les matrices d'une même application linéaire exprimée dans des bases différentes. Dans ce cas, les matrices A et A' sont dites *équivalentes*.

Corollaire 40 : **Pour un endomorphisme**
Soit un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n.
Soit un endomorphisme $E \overset{u}{\to} E$. Soient deux bases e, e' de E.

On note : $\boxed{P = P_{e \to e'} \text{ et } \begin{cases} A = Mat_e(u) \\ A' = Mat_{e'}(u) \end{cases}}$.

Alors, la relation liant les matrices du même endomorphisme dans les deux bases e et e' s'écrit : $\boxed{A' = P^{-1}AP}$

Preuve 40 : Il suffit d'appliquer la formule précédente.

Remarque 45. Soit P une matrice inversible et A et A', deux matrices vérifiant une relation de la forme $A' = P^{-1}AP$. Alors A et A' représentent le même endomorphisme exprimé dans des bases différentes. Dans ce cas, les matrices A et A' sont dites *semblables*.

Remarque 46. Comment peut-on définir la trace d'un endomorphisme en dimension finie ?

Remarque 47. On peut se souvenir de cette relation de changement de base sous la forme d'une relation de Chasles :

$$Mat_{e'}(u) = P_{e'\to e} Mat_e(u) P_{e\to e'}$$

`Exemple 16.` (∗) Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique e et les deux vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système $f = (f_1, f_2)$ est une base de E. Ecrire les matrices de passage $P_{e\to f}$ et $P_{f\to e}$.
2. Soit le vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ tel que $Mat_e x = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$.
   Trouver les coordonnées du vecteur x dans la base f.
3. Soit l'endomorphisme u dont l'expression analytique dans e est $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x, y) & \mapsto & (2x + y, x - y) \end{array}$.
   Ecrire les matrices de cet endomorphisme dans la base e, puis la base f et enfin les bases e et f.

Exercice : 15

(∗∗) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$ sont semblables.

Exercice : 16

(∗∗) Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, déterminer les matrices des l'endomorphismes $u \in L(\mathbb{R}^2)$ tels que : $\begin{cases} \ker(u) = \mathrm{Vect}(1, 2) \\ \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(1, 1) \end{cases}$.

Remarque 48. Recherche de la matrice de la projection p sur E_1 parallèlement à E_2 dans une base e :

1. On considère e' une base obtenue en rassemblant une base de E_1 et une base de E_2.
   On exprime alors la matrice de p dans la base e'.
2. Par la formule de changement de bases, on détermine alors la matrice de p dans la base e.

`Exemple 17.` Déterminer l'expression analytique dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la projection $\begin{cases} \text{sur } F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \\ \text{paral}^t \text{ à } G = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \end{cases}$.

8.3 Théorème de caractérisation du rang

Définition 24 : **Matrice** $J_r(n,p)$

Soient deux entiers n, p et un entier $r \leq \min(n, p)$. On définit la matrice de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$

$$J_r(n, p) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{1} & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad r \text{ fois le chiffre 1 sur la diagonale}$$

On a $\mathrm{rg}\big(J_r(n, p)\big) = r$.

Théorème 41 : **Caractérisation du rang**

Soit une matrice rectangulaire $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$. Soit $r \in [\![0, \min(n, p)]\!]$. Alors

$$\boxed{\begin{cases} \exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ \exists Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \end{cases} \text{telles que } A = PJ_r(n, p)Q \iff \mathrm{rg}(A) = r}$$

Preuve 41 :
Méthode 1 : on peut utiliser l'algorithme du rang.
Méthode 2 : on préfèrera la démonstration suivante qui est *constructive* :

- $\Rightarrow$ La multiplication par une matrice inversible ne modifie pas le rang d'une matrice.
- $\Leftarrow$ Soit $u \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A et r sont rang. On appelle e et f les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$. Il s'agit de déterminer des bases e' de $\mathbb{K}^p$ et f' de $\mathbb{K}^n$ dans lesquels $Mat_{e'f'}u = J_r(n, p)$.
  (a) On commence par déterminer $(e'_{r+1}, \ldots, e'_p)$ une base de $\ker u$, que l'on compléte en $(e'_1, \ldots, e'_p)$ pour obtenir une base e' de $\mathbb{K}^p$.
  (b) La famille $(u(e'_1), \ldots, u(e'_r))$ est libre. On peut la complèter à droite pour obtenir une base f' de $\mathbb{K}^n$.
  (c) La matrice de u dans les bases e' et f' est alors la matrice $J_r(n, p)$.

  En introduisant alors les matrices de passage $P_{e\mapsto e'}$ et $P_{f\mapsto f'}$, on obtient la relation matricielle cherchée.

Remarque 49. Ce théorème dit qu'une matrice de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ de rang r est équivalente à $J_r(n, p)$. C'est à dire, qu'en choisissant correctement les bases d'arrivée et de départ, toute application linéaire peut s'exprimer matriciellement sous la forme d'une matrice $J_r(n, p)$.

`Exemple 18.` $(*)$ Trouver deux matrices inversibles P et Q telles que : $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & -6 & -4 & 4 \\ -3 & 12 & 12 & 6 & -9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = PJ_3(4{,}5)Q$.

Exercice : 17

$(**)$ Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r.
Montrer qu'il existe deux matrices inversibles A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = A + B$

Théorème 42 : **Une matrice et sa transposée ont même rang**
$(**)$ Soit une matrice rectangulaire $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :

$$\mathrm{rg}({}^tA) = \mathrm{rg}(A)$$

Preuve 42 : On utilise le théorème précédent.

Exercice : 18

$(**)$ Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.