Les fonctions usuelles

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

1er octobre 2010

1 Rappels

1.1 Fonctions polynomiales et rationnelles

Proposition 1 : $\left\{\begin{array}{l}\text{Les fonctions polynomiales}\\ \text{Les fonctions rationnelles}\end{array}\right.$ sont $\left\{\begin{array}{l}\text{continues}\\ \text{dérivables}\end{array}\right.$ sur leurs ensembles de définition.

Preuve 1 : Résultats connus !

1.2 Théorèmes et définitions utiles

Les théorèmes suivants sont rappelés sans démonstration. I représente un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition 1 : **"Image" et "Image réciproque" d'un ensemble**
Soit $f \in \mathcal{F}(E, F)$, $A \subset E$ et $B \subset F$.

1. On appelle *image par f de l'ensemble A* le sous-ensemble de F défini par :

$$f(A) = \{f(x) \mid x \in A\} \quad \subset F$$

2. On appelle *image réciproque par f de l'ensemble B* le sous-ensemble de E défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\} \quad \subset E$$

Image d'un ensemble :	Image réciproque d'un ensemble :

Remarque 1. Attention !!! $f(A)$ et $f^{-1}(B)$ sont juste des notations utilisées pour nommer ces ensembles.
En particulier, écrire $f^{-1}(B)$ ne signifie pas que la fonction f^{-1} existe !

`Exemple 1.` Soit la fonction $\begin{array}{rcl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$. Déterminer les ensembles $f(\mathbb{Z})$ et $f^{-1}([2, 3])$.

Remarque 2. Que signifie qu'un ensemble I est stable par l'application f ?

Définition 2 : **Bijection et bijection réciproque**
On dit qu'une application $f : I \to J$ est bijective de I dans J lorsque tout élément y de J admet par f un unique antécédent x dans I.
En d'autres termes :

$$f : I \to J \text{ est bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in J, \exists! x \in I \text{ tel que } y = f(x)$$

Lorsqu'une application est bijective de I dans J, on peut définir son application réciproque $f^{-1} : J \to I$ qui à tout y de J associe x, l'unique antécédent de y par f.

On a alors : $\begin{cases} \forall x \in I, & f^{-1} o f(x) = x \\ \forall x \in J, & f o f^{-1}(x) = x \end{cases}$

Bijection

Remarque 3. Soit $f : I \to J$ une bijection.
1. Si $a, b \in I$, alors : $a = b \Longleftrightarrow f(a) = f(b)$ (très utile lors de la résolution d'équations)
2. Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Théorème Fondamental 2 : **Théorème de la bijection**
Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On note $J = f(I)$.
On suppose que la fonction f est : $\begin{cases} \text{continue sur } I \\ \text{strictement monotone sur } I \end{cases}$
Alors :
1. J est un intervalle.
2. La fonction f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J.
3. Sa bijection réciproque $f^{-1} : J \mapsto I$ est continue et strictement monotone de même sens que f.

Preuve 2 : Cf cours sur les fonctions à variable réelle

`Exemple 2.`
Ce théorème permet de définir la fonction exponentielle comme fonction réciproque de la fonction logarithme.

Théorème 3 : **Caractérisation d'une bijection**
Soit $f \in \mathcal{F}(I, J)$.

Il existe une application $g \in \mathcal{F}(J, I)$ telle que $\begin{cases} f \circ g = \mathrm{id}_J \\ g \circ f = \mathrm{id}_I \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est une bijection et $f^{-1} = g$.

Preuve 3 : On montre assez simplement qu'une telle application f est sujective et injective.

Remarque 4. Ainsi, une fonction *involutive* (c'est à dire qui vérifie $f \circ f = \mathrm{id}_I$) est bijective.

`Exemple 3.` On prouve ainsi que la fonction $f : x \mapsto 1/x$ est bijective de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}^*$ et que $f^{-1} = f$.

DÉFINITION 3 : **Prolongement par continuité**
Soit $a \in \mathbb{R}$ et $I =]a; b]$ et $f : I \mapsto \mathbb{R}$.
Si la fonction f admet une limite finie à droite en a, on pourra alors prolonger f en une fonction

$$\widetilde{f} : \begin{array}{ccc} I \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in I \\ \lim\limits_{x \to a} f(x) & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

La fonction $\widetilde{f}$ ainsi construite est continue à droite au point a.
On dit que $\widetilde{f}$ est le prolongement par continuité de f au point a. On confond souvent $\widetilde{f}$ et f.

`Exemple 4.` Ainsi, la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}.\sin x$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$.

THÉORÈME FONDAMENTAL 4 : **Primitivation**
Soit I un **intervalle** de $\mathbb{R}$.
1. Toute fonction réelle continue sur I admet des primitives sur I.
2. Si la dérivée d'une fonction est nulle sur un **intervalle** I alors cette fonction est constante sur I.
3. Les primitives d'une fonction f sur I diffèrent entre elles d'une constante.
4. Si $a \in I$ et $b \in \mathbb{R}$, alors toute fonction continue sur I admet une unique primitive F telle que $F(a) = b$.

Preuve 4 : Cf cours sur la dérivabilité des fonctions à variable réelle

`Exemple 5.` Ce théorème permet de construire la fonction logarithme à partir de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$.

THÉORÈME FONDAMENTAL 5 : **Dérivation de la fonction réciproque**
Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

On suppose que : $\begin{cases} f : I \mapsto \mathbb{R} \text{ est bijective de } I \text{ dans } J = f(I) \text{ avec } I \text{ et } J \text{ des intervalles} \\ f \text{ est dérivable sur l'intervalle } I \\ \forall x \in I,\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$

alors la fonction $f^{-1} : J \to I$ existe et est dérivable sur l'intervalle J avec $\quad (f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

Preuve 5 : Cf cours sur la dérivabilité des fonctions à variable réelle

`Exemple 6.` Ce théorème permet de justifier la dérivabilité de la fonction exponentielle et d'en calculer sa dérivée.

THÉORÈME FONDAMENTAL 6 :
Soient $\begin{cases} g & : I \mapsto \mathbb{R} \\ f & : J \mapsto \mathbb{R} \end{cases}$ deux fonctions telles que $\begin{cases} g \text{ est dérivable sur } I \\ f \text{ est dérivable sur } g(I) \quad (g(I) \subset J) \end{cases}$.
Alors la fonction fog est dérivable sur I et $\forall x \in I$, $\quad \boxed{(fog)'(x) = f'og(x).g'(x)}$

Preuve 6 : Cf cours sur la dérivabilité des fonctions à variable réelle

`Exemple 7.` Montrer que la fonction définie par $f(x) = \sin\left(\ln \dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

THÉORÈME FONDAMENTAL 7 :
Soit f une fonction réelle dérivable sur un intervalle $I = [a, b]$.
1. si pour tout $x \in]a, b[$, $\quad f'(x) > 0 \quad$ alors $\quad f$ est strictement croissante sur I
2. si pour tout $x \in]a, b[$, $\quad f'(x) = 0 \quad$ alors $\quad f$ est constante sur I
3. si pour tout $x \in]a, b[$, $\quad f'(x) < 0 \quad$ alors $\quad f$ est strictement décroissante sur I

Preuve 7 : Cf cours sur la dérivabilité des fonctions à variable réelle

2 Premières fonctions usuelles

2.1 Logarithme népérien

Le théorème fondammental 4 permet de définir la fonction logarithme de la façon suivante :

Définition 4 : **La fonction logarithme**

La fonction $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
Elle admet donc des primitives.
On appelle "fonction logarithme népérien" l'unique primitive de f qui s'annule en $x = 1$.
Cette fonction est notée :

$$\boxed{\ln : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}}$$

Proposition 8 : **Rappel des propriétés principales**

1. ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\boxed{(\ln)'(x) = \dfrac{1}{x}}$.
2. La fonction ln vérifie : $\forall x, y > 0$, $\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$ et $\begin{cases} \ln(1/x) = -\ln x \\ \ln(x/y) = \ln x - \ln y \\ \ln x^n = n \ln x \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$
3. On a : $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$
4. On a l'inégalité classique : $\forall x > 0$, $\boxed{\ln(x) \leq x - 1}$
5. On a la limite connue : $\boxed{\dfrac{\ln(x)}{x-1} \xrightarrow[x \to 1]{} 1}$

Preuve 8 :

1. Par définition de la fonction logarithme
2. (a) On dérive la fonction $f_y(x) = \ln(xy) - \ln x - \ln y$ où y est un paramètre strictement positif.
   (b) Les deux autres formules s'en déduisent.
3. (a) La démonstration de la limite en $+\infty$ fait appel à des théorèmes vus dans le cours sur la dérivabilité.
   (b) La limite en 0^+ s'en déduit.
4. On étudie le signe de la fonction $f(x) = \ln x - (x - 1)$.
5. C'est la traduction de la dérivabilité du logarithme en 1.

Remarque 5. Les résultats précédents permettent d'obtenir le graphe de la fonction ln.

Graphe de la fonction logarithme

Exercice : 1

Prouver que pour tout entier $n > 3$, la dérivée n^{ieme} de la fonction $f(x) = x^2.\ln x$ est donnée par :

$$f^{(n)}(x) = 2.(-1)^{n-1}\frac{(n-3)!}{x^{n-2}}$$

2.2 Exponentielle

Le théorème fondammental 2 permet de définir la fonction exponentielle de la façon suivante :

Définition 5 : **La fonction exponentielle**

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}^{+*}$.
Elle réalise donc une bijection de $I = \mathbb{R}^{+*}$ vers $\ln(I) = \mathbb{R}$.

On définit la fonction exponentielle comme sa bijection réciproque : $exp : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ x & \mapsto & exp(x) \end{array}$.

On notera $exp(x) = e^x$.

Remarque 6. En fait, la définition officielle de la fonction exponentielle est : $x \mapsto e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$

Cette définition, valable aussi lorsque $x \in \mathbb{C}$, ne sera vue qu'en deuxième année.

Proposition 9 : **Rappel des propriétés principales**

1. exp est dérivable sur $J = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{exp'(x) = exp(x)}$
2. exp est un morphisme de groupes : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$ et $\begin{cases} e^{nx} = (e^x)^n & \forall n \in \mathbb{Z} \\ e^{-x} = 1/e^x \end{cases}$
3. On a l'inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^x \geq 1 + x}$
4. Limites : $\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+}$ et $\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$.
5. Autre limite importante : $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$.

Preuve 9 :

1. On applique le théorème de dérivation d'une fonction réciproque
2. C'est une conséquence de la relation fonctionnelle $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
   Les deux autres formules se déduisent facilement de la première.
3. On étudie la fonction $f(x) = e^x - (1 + x)$.
4. Ces deux limites se déduisent immédiatement des limites en 0^+ et en $+\infty$ de la fonction logarithme.
5. C'est la traduction de la dérivabilité de l'exponentielle en 0.

Remarque 7. On obtient le graphe de la fonction exp par symétrie du graphe de ln par rapport à la première bissectrice.

Dessin

Graphe de la fonction exponentielle

2.3 Exponentielle de base a

DÉFINITION 6 : **Exponentielle de base a**
Pour $a > 0$ on définit la fonction *exponentielle de base a* par :

$$f_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a^x \end{array} \qquad \text{avec} \quad \forall x \in \mathbb{R} \ : \ \boxed{a^x = e^{x \ln a}}$$

Remarque 8. Dès que l'on sera en présence d'une exponentielle de base a, on pensera systématiquement à la transformer en utilisant la définition précédente. Cette transformation nous permet d'appliquer les propriétés usuelles de la fonction exponentielle et nous dispense donc de connaître par coeur les propriétés suivantes.

PROPOSITION 10 :

1. Elle vérifie l'équation fonctionnelle : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a^{x+y} = a^x a^y$
2. Elle est dérivable sur $I = \mathbb{R}$ et sa dérivée vaut : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_a'(x) = (\ln a) e^{x \ln a} = (\ln a) a^x$
3. Sens de variation :
   - Si $a = 1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_a(x) = 1$;
   - Si $a > 1$, alors f_a est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
   - Si $0 < a < 1$, alors f_a est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve 10 :

1. Application immédiate de la définition.
2. Vérification immédiate !
3. Conséquence de l'étude du signe de la dérivée.

Dessin

Graphe des fonctions exponentielles de base $a > 0$

Exercice : 2

Prouver que les graphes des fonctions exponentielles de base a et $1/a$ sont symétriques par rapport à O_y.

2.4 Logarithme de base a : $\log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Le théorème de la bijection réciproque permet alors de définir le logarithme de base a.

DÉFINITION 7 : **Logarithme de base a**
Soit $a > 0$.
Lorsque $a \neq 1$, $f_a : x \mapsto a^x$ est continue et strictement monotone de $I = \mathbb{R}$ dans $J =]0; +\infty[$.
Elle réalise une bijection de I dans J. On note $\log_a$ sa bijection réciproque.

PROPOSITION 11 :
1. La fonction $\log_a$ est continue sur $J =]0, +\infty[$ de même sens de variation que f_a.
2. La fonction $\log_a$ est dérivable sur $J =]0, +\infty[$ et $\boxed{\forall x \in J =]0, +\infty[, \quad \log_a'(x) = \dfrac{1}{(\ln a)x}}$
3. On peut exprimer le logarithme de base a à l'aide du logarithme népérien : $\boxed{\forall x > 0, \quad \log_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a}}$
4. Le logarithme en base a vérifie l'équation fonctionnelle : $\boxed{\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2, \quad \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y}$

Preuve 11 :
1. Conséquence du théorème d'existence d'une fonction réciproque.
2. Conséquence du théorème de dérivation de la réciproque d'une fonction.
3. On utilise le fait que $\log_a$ est la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(\ln a)x}$ qui donne 1 pour $x = a$.
   On peut aussi retrouver cette formule en résolvant l'équation $y = a^x$ d'inconnue y.
4. C'est une conséquence de la formule précédente.

Dessin

Graphe des fonctions logarithme de base $a > 0$

Remarque 9. Parmi les logarithmes de base a, le plus utilisé est le logarithme décimal (base 10) noté log.
En représentant sur un axe la grandeur $x' = \log x$ (au lieu de x), il permet de représenter sur un graphe une grandeur x prenant des valeurs dont l'amplitude est de plusieurs puissances de 10 (distances astronomiques, concentrations ...). Comme $\log(10.x) = 1 + \log x$, le passage d'une unité à l'autre indique alors un saut d'une puissance de 10.

Echelle logarithmique :

2.5 Fonctions puissance $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ (où $\alpha \in \mathrm{R}$!!)

DÉFINITION 8 : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit $f_\alpha : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array}$

Remarque 10.
1. Vérifier la cohérence de cette définition avec les définitions connues de x^n lorsque $n \in \mathbb{Z}$.
2. Même si certaines fonctions puissances se définissent sans difficulté sur $\mathbb{R}$, on se limitera ici à $\mathbb{R}^{+*}$.

PROPOSITION 12 : Les fonctions puissances vérifient les propriétés usuelles sur les puissances entières.
Ainsi, $\begin{cases} \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2 \\ \forall x\in\mathbb{R}^{+*} \end{cases}$: $\begin{array}{llcl} 1. & x^\alpha.x^\beta & = & x^{\alpha+\beta} \\ 2. & (x^\alpha)^\beta & = & x^{\alpha.\beta} \end{array}$

Preuve 12 : La vérification est immédiate !

`Exemple 8.` Démontrer les formules $\ln(x^\alpha)=\alpha.\ln x$ et $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$ pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

PROPOSITION 13 :
1. f_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (fonction composée) et $\boxed{\forall x\in\mathbb{R}^{+*},\quad f_\alpha'(x)=\alpha x^{\alpha-1}}$.
2. En notant $I=]0,+\infty[$,
   - Si $\alpha=0$, f_α est constante et vaut 1.
   - Si $\alpha>0$, f_α est strictement croissante sur I.
   - Si $\alpha<0$, f_α est strictement décroissante sur I.

Preuve 13 : Vérifications immédiates !

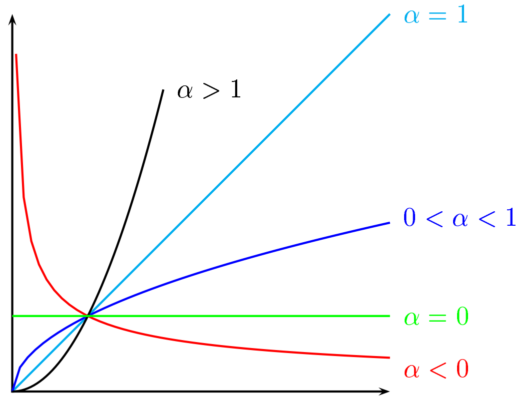


FIG. 1 – *Fonctions puissance x^α*

PROPOSITION 14 : **Continuité et dérivabilité en 0**
1. Lorsque $\alpha>0$, on peut prolonger par continuité f_α et 0 en posant $f_\alpha(0)=0$.
2. Dérivabilité en 0 :
   - Si $\alpha>1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0)=0$.
   - Si $\alpha=1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0)=1$.
   - Si $0<\alpha<1$, f_α n'est pas dérivable en 0 (demi-tangente verticale).

Preuve 14 : Simples calculs de limites !

PROPOSITION 15 : **Inverse d'une fonction puissance**
La fonction f_α est bijective de I vers $J=]0,+\infty[$ et

$$f_\alpha^{-1}=f_{\frac{1}{\alpha}}$$

Preuve 15 : On démontre facilement en vérifiant que $\forall x\in\mathbb{R}^{+*}\quad f_\alpha o f_{\frac{1}{\alpha}}(x)=f_{\frac{1}{\alpha}} o f_\alpha(x)=x$

Exercice : 3
Justifiez la dérivabilité de la fonction f définie sur $]0;\frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=(\cos^2 x)^{\ln x}$.
Calculez sa dérivée.

3 Comparaison des fonctions ln, exp et puissances

DÉFINITION 9 : **Notation de Landau**
Soit a une notation qui représente, soit un réel, soit $\pm\infty$ ($a \in \bar{\mathbb{R}}$).
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a, avec g ne s'annulant pas au voisinage de a privé de a.
On dira que f est *négligeable* devant g au voisinage de a lorsque :

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \text{et on écrira :} \qquad f(x) = o(g(x))$$

THÉORÈME 16 : **Comparaison des fonctions usuelles en** $\boxed{+\infty}$
Soient α, β, γ trois réels strictement positifs.

1) Comparaison puissance et exponentielle : en $+\infty$: $x^\alpha = o(e^{\beta x})$

2) Comparaison ln et puissance : en $+\infty$: $\ln^\gamma x = o(x^\alpha)$ d'où $x^\alpha \ln^\beta x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

3) Comparaison ln et exponentielle : en $+\infty$: $\ln^\gamma x = o(e^{\beta x})$

Preuve 16 :
1. On se ramène à l'étude de la limite de $\dfrac{e^x}{x^\theta}$ en $+\infty$. Puis on étudie la fonction $f(x) = \dfrac{e^{x/2}}{x^\theta}$.
2. On se ramène à la situation précédente en posant $y = \ln x$.
3. On utilise les deux résultats précédents.

`Exemple 9.` Calculez les limites suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x}.\ln(3x)$ en 0^+.
2. $g(x) = \dfrac{3^{4x}}{x^3}$ en $+\infty$.
3. $h(x) = \ln x.\dfrac{x^3}{e^x}$ en $+\infty$.

4 Les fonctions circulaires et leurs réciproques

4.1 Rappels sur les fonctions circulaires

PROPOSITION 17 :
Les fonctions $\left\{\begin{array}{l} x \mapsto \cos x \\ x \mapsto \sin x \end{array}\right.$ sont $\left\{\begin{array}{l} \text{définies} \\ \text{continues} \\ \text{dérivables} \end{array}\right.$ sur $\mathbb{R}$ et : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \quad \left\{\begin{array}{l} (\cos x)' = -\sin x \\ (\sin x)' = \cos x \end{array}\right.}$.

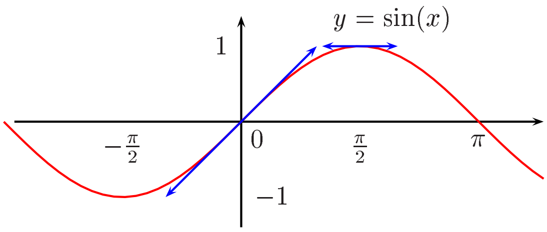
La fonction $x \mapsto \tan x$ est $\left\{\begin{array}{l} \text{définie} \\ \text{continue} \\ \text{dérivable} \end{array}\right.$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}\ [\pi]\}$ et : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}\ [\pi]\} : \quad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$

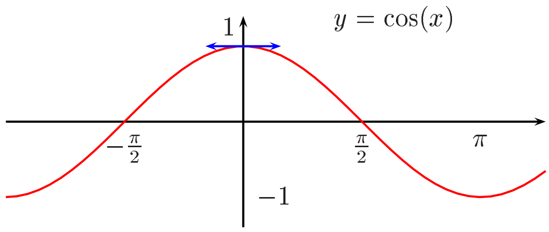
Preuve 17 : Résultats connus et admis !

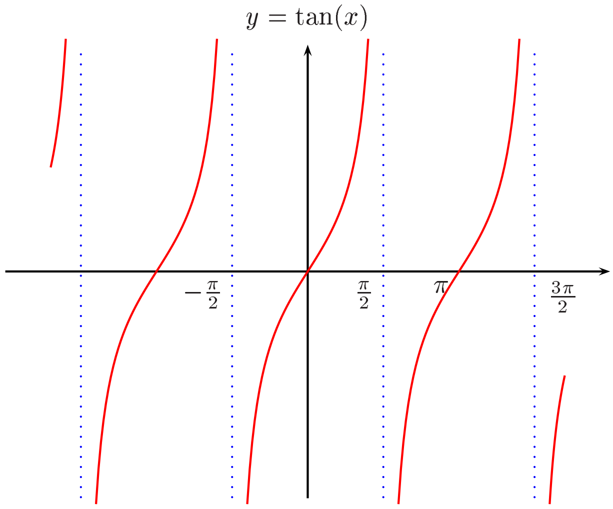
Remarque 11. Dans la proposition précédente, les notations $(\cos x)'$, $(\sin x)'$ et $(\tan x)'$ sont pratiques mais incorrectes ! On acceptera cependant cet *abus de notation*.

Je vous rappelle les formules de trigonométrie à connaître impérativement :

1. $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
2. $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$
3. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$
4. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2.\cos^2 a - 1 = 1 - 2.\sin^2 a$
5. $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$
6. $\tan 2a = \dfrac{2.\tan a}{1 - \tan^2 a}$







On obtient en posant $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$:

1. $\cos\theta = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
2. $\sin\theta = \dfrac{2t}{1+t^2}$
3. $\tan\theta = \dfrac{2t}{1-t^2}$

Remarque 12.
Les formules précédentes sont très utiles dans le calcul d'intégrales ou de primitives de fonctions circulaires.

Proposition 18 : **Comparaison au voisinage de 0**

1. $\dfrac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$
2. $\dfrac{\tan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$
3. $\dfrac{1-\cos x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \dfrac{1}{2}$

Preuve 18 :
1. Dérivabilité du sinus en 0.
2. Dérivabilité de la tangente en 0.
3. On lève la forme indéterminée en multipliant numérateur et dénominateur par $1+\cos x$.

4.2 La fonction arcsin

Sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, la fonction sinus est continue strictement croissante vers $[-1,1]$.

Elle admet donc une bijection réciproque notée $\boxed{\arcsin : [-1,1] \mapsto [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}$.

Quelques valeurs particulières à connaître :

$\arcsin(0) = 0$ $\quad \arcsin(1/2) = \dfrac{\pi}{6}$ $\quad \arcsin(\dfrac{1}{\sqrt{2}}) = \dfrac{\pi}{4}$ $\quad \arcsin(\dfrac{\sqrt{3}}{2}) = \dfrac{\pi}{3}$ $\quad \arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$

La fonction arcsin :

Remarque 13.

1. Il est possible de retrouver assez facilement la valeur de $\arcsin x$ en se rappelant qu'il s'agit de :
   "$\arcsin x$ est l'*arc* de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le *sinus* est x"
2. On peut aussi retrouver facilement ces valeurs en traçant le graphe de la fonction sinus.
3. Comme la fonction sin, la fonction arcsin est impaire et croissante

`Exemple 10.` Démontrer que $\forall x \in]-1,1[, \quad \tan(\arcsin x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Attention : Piège !!!

La définition de la fonction arcsin nous donne deux relations : $\begin{cases} 1.\ \forall x \in [-1,\ 1] \text{ on a : } \sin(\arcsin x) = x \\ 2.\ \forall x \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}] \text{ on a : } \arcsin(\sin x) = x \end{cases}$

Mais que dire de $\arcsin(\sin x)$ pour x réel quelconque ?...

Exercice : 4

Etudier l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

PROPOSITION 19 :
La fonction arcsin est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ (demi-tangentes verticales en -1 et 1) et

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Preuve 19 : Application du théorème de dérivation de la réciproque d'une fonction.

Remarque 14. La fonction arcsin n'est pas dérivable aux bornes de son ensemble de définition.

PROPOSITION 20 : **Limite**
On a la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

Preuve 20 : Conséquence de la dérivabilité de la fonction arcsinus en 0.

4.3 La fonction arccos

Sur l'intervalle $[0,\pi]$, la fonction cosinus est continue strictement décroissante vers $[-1,1]$.
Elle admet donc une bijection réciproque notée $\boxed{\arccos : [-1,1] \mapsto [0,\pi]}$.

Quelques valeurs particulières à connaître :

$$\arccos(0) = \frac{\pi}{2} \qquad \arccos(1/2) = \frac{\pi}{3} \qquad \arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4} \qquad \arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6} \qquad \arccos(1) = 0$$

Remarque 15.

1. Il est possible de retrouver assez facilement la valeur de $\arccos x$ en se rappelant qu'il s'agit de :

   "$\arccos x$ est l'*arc* de $[0, \pi]$ dont le *cosinus* est x"
2. On peut aussi retrouver facilement ces valeurs en traçant le graphe de la fonction cosinus.
3. Comme la fonction cos, la fonction arccos est décroissante.

La fonction arccos :

`Exemple 11.` Démontrer que $\forall x \in [-1,1],\ x \neq 0, \quad \tan(\arccos x) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Attention : Piège !!!

La définition de la fonction arccos nous donne deux relations : $\begin{cases} 1.\ \forall x \in [-1,\,1] \text{ on a : } & \cos(\arccos x) = x \\ 2.\ \forall x \in [0,\,\pi] \text{ on a : } & \arccos(\cos x) = x \end{cases}$

Mais que dire de $\arccos(\cos x)$ pour x réel quelconque ?...

PROPOSITION 21 :
La fonction arccos est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ (demi-tangente verticale en -1 et 1), et

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Preuve 21 : Application du théorème de dérivation de la réciproque d'une fonction.

Remarque 16. La fonction arccos n'est pas dérivable aux bornes de son ensemble de définition.

PROPOSITION 22 :

$$\forall x \in [-1,1], \quad \boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (1)} \quad \text{et} \quad \boxed{\arccos x + \arccos(-x) = \pi \quad (2)}$$

Preuve 22 : On peut par exemple étudier les dérivées des fonctions $\begin{cases} f(x) = \arcsin x + \arccos x \\ g(x) = \arccos x + \arccos(-x) \end{cases}$.

Formule 1	Formule 2

Remarque 17.

1. La relation (1) permet d'exprimer la fonction arccos en fonction de la fonction arcsin.
   On pourra ainsi l'utiliser pour remplacer $\arccos(x)$ par $\arcsin(x)$ dans les études de fonctions.
2. On peut utiliser la relation (2) pour prouver que le graphe de la f° arccos est symétrique par rapport à $A(0, \dfrac{\pi}{2})$.

`Exemple 12.` Etudier l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arccos(\cos x)$.

Exercice : 5

Etudier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(\sin x) + \dfrac{1}{2}.\arccos(\cos 2x)$ dans le but de la représenter.

4.4 La fonction arctan

Sur l'intervalle $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$, la fonction tangente est continue strictement croissante vers $\mathbb{R}$.

Elle admet donc une bijection réciproque notée $\boxed{\arctan : \mathbb{R} \mapsto]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[}$.

Restriction de tan à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et fonction arctan :

Quelques valeurs particulières à connaître :

- $\arctan(0) = 0$
- $\arctan(\dfrac{1}{\sqrt{3}}) = \dfrac{\pi}{6}$
- $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$
- $\arctan(\sqrt{3}) = \dfrac{\pi}{3}$

Remarque 18.

1. Il est possible de retrouver assez facilement la valeur de $\arctan x$ en se rappelant qu'il s'agit de :
   "$\arctan x$ est l'*arc* de $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$ dont la *tangente* est x"
2. On peut aussi retrouver ces valeurs en traçant le graphe de la fonction tangente.

Attention : Piège !!!

La définition de la fonction arctan nous donne deux relations : $\begin{cases} 1.\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ on a : } & \tan(\arctan x) = x \\ 2.\ \forall x \in]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[\text{ on a : } & \arctan(\tan x) = x \end{cases}$

Mais que dire de $\arctan(\tan x)$ pour x réel quelconque ?...

`Exemple 13.` Calculer $X = \arctan\dfrac{1}{2} + \arctan\dfrac{1}{5} + \arctan\dfrac{1}{8}$

Exercice : 6

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

PROPOSITION 23 : La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{(\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}}$

Preuve 23 : Par application du théorème de dérivation de la fonction réciproque.

PROPOSITION 24 : **Comparaison en 0**
On a la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arctan x}{x} = 1$

Preuve 24 : Conséquence de la dérivabilité de la fonction arctan en 0.

PROPOSITION 25 : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\boxed{\arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \varepsilon \dfrac{\pi}{2}}$ $(\varepsilon = signe(x))$

Preuve 25 : Il suffit de dériver la fonction $f(x) = \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x}$.

Exercice : 7
Soient $(a, x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax \neq 1$.
Montrer que : $\arctan a + \arctan x = \arctan \dfrac{a+x}{1-ax} + \varepsilon\pi \quad (\varepsilon \in \{-1,0,1\})$

Pour simplifier une expression ou démontrer une formule comportant des fonctions trigonométriques circulaires, il existe en général trois méthodes possibles :

1. On peut effectuer un changement de variable judicieux
2. On peut s'intéresser à la tangente, au cosinus ou au sinus d'un des deux membres.
3. On peut effectuer une dérivation et reconnaître une dérivée connue.
   Attention dans ce cas à appliquer correctement le théorème de primitivation.

Exercice : 8
Simplifier pour $x \in]-1,1[$, $\arctan\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

5 Les fonctions hyperboliques et leurs réciproques

5.1 Les fonction hyperboliques

On définit les fonctions hyperboliques ch, sh et th sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
Remarquer la correspondance avec les expressions complexes des fonctions circulaires ...

$\operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$	$\cos x = \dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$	$\sin x = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
$\operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$	$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

Exercice : 9
Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $\operatorname{ch} x + \cos a = 2 \operatorname{sh} x + \sin a$.

Proposition 26 : Les fonctions hyperboliques sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \qquad\qquad \cos' x = -\sin x$$

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \qquad \text{à comparer à} \qquad \sin' x = \cos x$$

$$\operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \qquad\qquad \tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Preuve 26 : Pas de difficulté.

Proposition 27 : **Limites**
On a les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{th} x}{x} = 1$

Preuve 27 : Conséquence de la dérivabilité des fonctions sh et th en 0.

Formules à connaître :

$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$	$\cos x + i \sin x = e^{ix}$
$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$	$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$
$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$	$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

Remarque 19.
1. les formules précédentes se démontrent par un simple calcul ...
2. Comme en trigonométrie circulaire, il existe des formules de trigonométrie hyperbolique.

   On pourra retrouver ces fomules en remplaçant : $\begin{cases} \text{sin par } i\operatorname{sh} \\ \text{cos par ch} \\ \text{tan par } i\operatorname{th} \end{cases}$ dans les formules de trigonométrie circulaire.

   Retrouver ainsi les formules permettant d'exprimer $\operatorname{ch} 2x$ et $\operatorname{sh} 2x$ en fonction de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.

Proposition 28 : **Branches infinies**.
La courbe d'équation $y = \dfrac{e^x}{2}$ est asymptote aux deux courbes d'équation $y = \operatorname{sh} x$ et $y = \operatorname{ch} x$ qui se positionnent de part et d'autre de cette asymptote.

Preuve 28 : On vérifie facilement que $\operatorname{sh} x - \dfrac{e^x}{2} \mapsto 0$ et $\operatorname{ch} x - \dfrac{e^x}{2} \mapsto 0$.

Une étude classique du sens de variation des fonctions hyperboliques permet d'obtenir les graphes suivants.

Remarque 20. La courbe de la fonction ch est appelée une *chaînette*. Il s'agit de la courbe obtenue en tenant une chaîne entre deux doigts. (Voir Mme Nioles pour la démonstration)

Proposition 29 : Retenir que $\forall x \in \mathbb{R}$,

- $\boxed{1 \leq \operatorname{ch} x}$
- $\boxed{\operatorname{sh} x < \operatorname{ch} x}$
- $\boxed{-1 < \operatorname{th} x < 1}$

Preuve 29 : Conséquences des études de fonctions.

Exercice : 10
Etudier la fonction définie par $f(x) = 2\arctan\big(\operatorname{th}(x)\big) - \arctan\big(\operatorname{sh}(2x)\big)$.

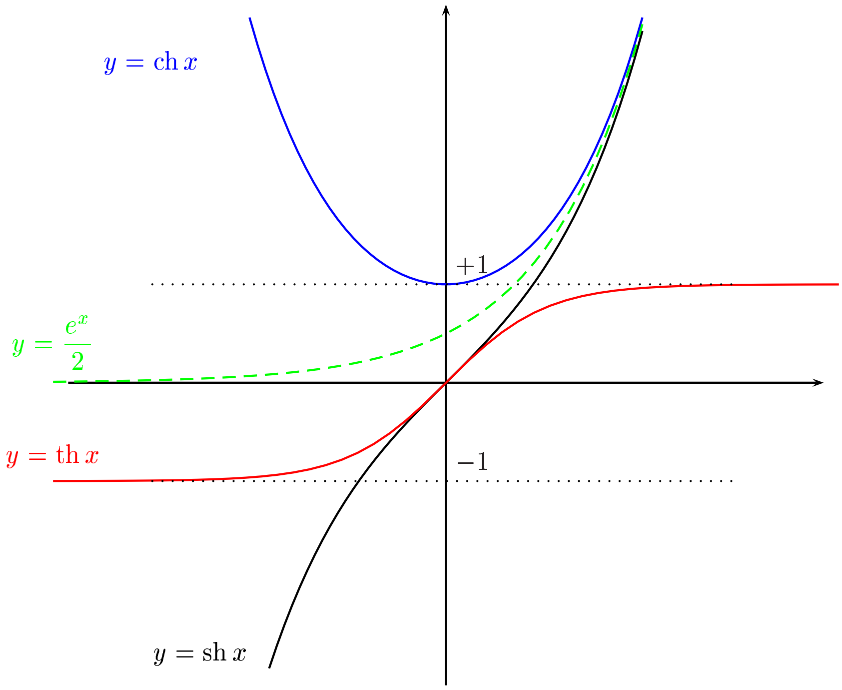


FIG. 2 – *Fonctions* sh, ch *et* th

Exercice : 11

Montrer que $\forall x \neq 0 \qquad \operatorname{th} x = \dfrac{2}{\operatorname{th} 2x} - \dfrac{1}{\operatorname{th} x}$ puis calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$.

5.2 La fonction argsh

La fonction sh est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est notée $\boxed{\operatorname{argsh} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}}$.

Graphes des fonctions sh et argsh :

PROPOSITION 30 : La fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\operatorname{argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}$$

Preuve 30 : Application du théorème de dérivation de la réciproque d'une fonction.

PROPOSITION 31 : Limite

On a la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{argsh} x}{x} = 1.$

Preuve 31 : Conséquence de la dérivabilité de la fonction argsh en 0.

THÉORÈME 32 : Expression logarithmique de argsh

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

Graphes des fonctions ch et argch :

Proposition 33 : La fonction argch est dérivable sur $]1;\ +\infty[$ et $\forall x \in]1;\ +\infty[$:

$$\boxed{\operatorname{argch}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

Preuve 33 : Application du théorème de dérivation de la réciproque d'une fonction.

Théorème 34 : Expression logarithmique de argch
Pour tout $x \in [1;+\infty[$, on a :

$$\boxed{\operatorname{argch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})}$$

Preuve 34 : Voir les méthodes proposées pour justifier l'expression logarithmique de argsh.

`Exemple 15.` Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ et $t = \tan\frac{x}{2}$. Démontrer que l'on a alors la formule suivante : $\operatorname{argch}(\frac{1}{\cos x}) = \ln\frac{1+t}{1-t}$.

5.4 La fonction argth

La fonction th est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$.
Elle admet donc une bijection réciproque notée $\boxed{\operatorname{argth}\ :\ ]-1;1[\mapsto \mathbb{R}}$.

Graphes des fonctions th et argth :

Proposition 35 : La fonction argth est dérivable sur $]-1,1[$ et $\forall x \in]-1,1[$:

$$\boxed{\operatorname{argth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}}$$

Preuve 35 : Application du théorème de dérivation de la réciproque d'une fonction.

Remarque 21. On peut retenir les expressions des dérivées des fonctions circulaires et hyperboliques réciproques en :
1. les reliant à leur ensemble de définition.
2. s'assurant de la cohérence avec leur sens de variation.

Proposition 36 : **Limite**
On a la limite suivante : $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{argth} x}{x} = 1$.

Preuve 36 : Conséquence de la dérivabilité de la fonction argth en 0.

Théorème 37 : **Expression logarithmique de** argth
Pour tout $x \in]-1;1[$, on a :

$$\boxed{\operatorname{argth} x = \frac{1}{2}.\ln \frac{1+x}{1-x}}$$

Preuve 37 : Il suffit de résoudre l'équation $y = \operatorname{th} x$.

`Exemple 16.` Simplifier l'expression $\operatorname{ch}(\operatorname{argth} x)$.

Remarque 22. On a :
1. $\operatorname{ch}(\operatorname{argch} x) = x$ pour tout x de l'ensemble de définition et $\operatorname{argch}(\operatorname{ch} x) = x$ pour tout $x \in [0, +\infty[$ (Attention !!)
2. $\operatorname{sh}(\operatorname{argsh} x) = x$ et $\operatorname{argsh}(\operatorname{sh} x) = x$ pour tout x de l'ensemble de définition des expressions
3. $\operatorname{th}(\operatorname{argth} x) = x$ et $\operatorname{argth}(\operatorname{th} x) = x$ pour tout x de l'ensemble de définition des expressions

6 La fonction $t \mapsto e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$

Remarque préliminaire :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Alors il existe deux fonctions $f_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f = f_1 + i.f_2$.
f_1 est la *partie réelle* de f et f_2 est la *partie imaginaire* de f.

Définition 10 : **Dérivabilité d'une fonction complexe**
Soit f une fonction de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$. Notons f_1 et f_2 sa partie réelle et sa partie imaginaire.
On dira que f est dérivable sur I si et seulement si f_1 et f_2 sont dérivables sur I.
Et dans ce cas :

$$\boxed{f' = f_1' + i.f_2'}$$

`Exemple 17.` $(*)$ Déterminer la dérivée de la fonction complexe f définie par $f(t) = \frac{1}{t-\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Remarque 23. On rappelle que $e^{a+ib} = e^a.e^{ib} = e^a.(\cos b + i \sin b)$.

Théorème 38 : **Dérivation de $t \mapsto e^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{C}$**

1. Soit $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ et $\boxed{f(t) = e^{\alpha t}}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(t) = \alpha e^{\alpha t}}$.
2. Soit $\varphi : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I, et $\boxed{g(t) = e^{\varphi(t)}}$,
   alors g est dérivable sur I et $\forall t \in I$, $\boxed{g'(t) = e^{\varphi(t)}\varphi'(t)}$.

Preuve 38 : Il suffit d'appliquer la définition précédente.

Exercice : 13
$(*)$ Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
1. Calculer une primitive des fonctions $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$ sur $\mathbb{R}$ en remarquant qu'il s'agit des parties réelles et imaginaires de $x \mapsto e^{a+ibx}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive de $x \mapsto e^{2x} \cos x$ sur $\mathbb{R}$.