Les transformations affines du plan et de l'espace

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

8 juin 2010

Dans tout ce chapitre, E, E', F et G désignent des $\mathbb{R}$-ev de dimension finie et $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$ $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ désignent leurs sous espaces affines associés.

1 Les applications affines

1.1 Définition et propriétés

On considère une application $f : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'$.

Définition 1 : **Application affine**

$f\ : \mathcal{E} \to \mathcal{E}'$ est une application affine si et seulement si $\left\{ \begin{array}{l} \exists A \in \mathcal{E} \\ \exists B \in \mathcal{E}' \end{array} \right.$ et $\exists \overrightarrow{f} \in \mathcal{L}(E, E')$ telle que

$$\forall M \in \mathcal{E}, \quad f(M) = B + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{AM}\right)$$

Dans ce cas, $B = f(A)$.

L'application linéaire $\overrightarrow{f}$ est appelée *application linéaire associée* à l'application affine f : elle est unique.

L'ensemble des applications affines est noté $Aff(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$, et $Aff(\mathcal{E})$ lorsque $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$.

Remarque 1.

1. Si f est une application affine, alors on a : $\quad \forall A \in \mathcal{E},\ f(M) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$.
2. Une application affine est donc définie par l'image d'un point et sa partie linéaire.
   Deux applications affines seront donc égales si elles ont même partie linéaire et si elles coïncident en un point.

`Exemple 1.`

1. Cas où $\overrightarrow{f} = 0$.
2. Cas où $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$.

Proposition 1 : **Formules importantes à retenir**

1. Si f est une application affine, alors :

   a. $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \qquad f(B) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB})$

   b. $\forall A \in \mathcal{E}, \quad \forall \overrightarrow{x} \in E, \quad f(A + \overrightarrow{x}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x})$

2. Si f est une application affine, l'application linéaire associée vérifie alors :

   a. $\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \qquad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{f(A)f(B)}$

   b. $\forall \overrightarrow{x} \in E, \quad \forall A \in \mathcal{E}\ , \quad \overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f(A)f(A + \overrightarrow{x})}$

Preuve 1 : Pas de difficulté ...

Pour montrer qu'une application $f \in \mathcal{F}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ est affine :
On pourra :
1. choisir un point A
2. prouver que l'application $\overrightarrow{f}$ définie sur E par $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f(A)f(A+\overrightarrow{x})}$ est linéaire.

Exercice : 1
Soit $f \in \mathcal{A}ff(E)$ laissant deux points distincts A et B invariants.
Montrer que f laisse toute la droite affine (AB) invariante.

Théorème 2 : **Expression matricielle d'une application affine.**
Soient deux espaces vectoriels réels E et E'. Soit $\begin{cases} \mathcal{R} = (\Omega,\, b) \text{ un repère cartésien de } E \\ \mathcal{R}' = (\Omega',\, b') \text{ un repère cartésien de } E' \end{cases}$.
Soit $f : E \mapsto E'$ une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{f}$.

Si $\begin{cases} X \text{ est la matrice des coordonnées d'un point } M \text{ dans le repère } \mathcal{R} \\ Y \text{ la matrice des coordonnées du point } f(M) \text{ dans le repère } \mathcal{R}' \\ L \text{ est la matrice de l'application linéaire } \overrightarrow{f} \text{ dans les deux bases } b \text{ et } b' \\ T \text{ est la matrice des coordonnées du point } f(\Omega) \text{ dans le repère } \mathcal{R}' \end{cases}$, alors :

$$\boxed{Y = T + LX}$$

Preuve 2 : Il suffit de remarquer que $f(M) = f(\Omega) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\Omega M})$ s'écrit aussi $\overrightarrow{\Omega' f(M)} = \overrightarrow{\Omega' f(\Omega)} + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{\Omega M})$ et d'exprimer matriciellement cette relation dans la base b'.

Remarque 2.
1. Le système correspondant à la relation matricielle est appelé *représentation analytique* de f.
2. Réciproquement : une application dont la représentation analytique est de la forme $Y = T + LX$ est affine, L étant la matrice de le partie linéaire.

`Exemple 2.` Dans $\mathbb{R}^3$ usuel.
1. Donner l'expression analytique de la translation de $\mathbb{R}^3$ de vecteur $\overrightarrow{u}(1,\, 2,\, 3)$.
2. Déterminer la partie linéaire de l'application affine d'expression analytique : $\begin{cases} x' = 2 + x \\ y' = 2x - z \\ z' = -1 + z \end{cases}$.

Théorème 3 : **Composition d'applications affines**
Si $\begin{cases} f : E \mapsto E' \\ g : E' \mapsto E'' \end{cases}$ sont deux applications affines, alors $g \circ f$ est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.

Preuve 3 : On vérifie très simplement que $g \circ f(M) = g \circ f(A) + \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$.

Théorème 4 : **Caractérisation des isomorphismes affines par leur partie linéaire**
Soit $f \in \mathcal{A}ff(E,E')$.
1. f est bijective $\iff$ $\overrightarrow{f}$ est un isomorphisme
2. Si f est bijective, alors f^{-1} est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{f^{-1}} = (\overrightarrow{f})^{-1}$.

Preuve 4 : Soit $A \in \mathcal{E}$ et $A' = f(A)$.
1. Procédons à une analyse en supposant que f^{-1} est affine de partie linéaire $\overrightarrow{g}$.
   Alors sa partie linéaire $\overrightarrow{g}$ est définie par $\overrightarrow{g}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f^{-1}(A')f^{-1}(A'+\overrightarrow{x})}$. On vérifie alors que :
   (a) $\overrightarrow{g}$ est l'inverse de $\overrightarrow{f}$ en s'assurant que $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g} = \mathrm{id}$.
   (b) f^{-1} est bien affine.
2. Même principe.

Définition 2 : **Isomorphisme affine, automorphisme affine**

1. Si une application affine $f \in Aff(E, E')$ est bijective, on dit que c'est un *isomorphisme affine*.
2. Si $E = E'$, on parlera d'*automorphisme affine*
3. l'ensemble des automorphismes affines est un groupe noté $(\mathrm{GA}(E), \circ)$.
   On appelle cet ensemble *groupe affine* de E et on a $f \in \mathrm{GA}(E) \Longleftrightarrow \overrightarrow{f} \in \geq (E)$.

1.2 Propriétés des applications affines

Nous allons ici nous intéresser à 3 ensembles de propriétés des applications affines :

1. La conservation du barycentre et ses implications
2. La nature de l'image et de l'image réciproque d'un sous-espace affine par une application affine
3. La nature de l'ensemble de points invariants d'une application affine

1.2.1 Conservation du barycentre

Proposition 5 : **Une application affine conserve les barycentres**
Soit $f : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'$ une application affine.
Soit $S = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ un système pondéré de points de E de poids non-nul.
Si G est le barycentre du système pondéré S, alors :

$$\text{le point } f(G) \text{ est le barycentre du système pondéré } S' = \begin{pmatrix} f(A_1) & \dots & f(A_n) \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

Preuve 5 : Pas de difficulté.

Exercice : 2
Prouver qu'une fonction $f : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'$ qui conserve les barycentres est affine.

Exercice : 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ une application affine telle que $f^n = \mathrm{id}$.
Montrer que f admet au moins un point fixe.

Corollaire 6 : Ainsi, les applications affines conservent le milieu et l'alignement.

Preuve 6 : Conséquence immédiate de la proposition précédente.

Corollaire 7 : **Image d'une partie convexe par une application affine**
L'image d'une partie convexe de $\mathcal{E}$ par $f \in \mathcal{A}(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$ est une partie convexe de $\mathcal{E}'$

Preuve 7 : On procède de façon naturelle ... en utilisant la conservation du barycentre.

1.2.2 Image et image réciproque d'un sous-espace affine

Théorème 8 : **Image d'un sous-espace affine par une application affine**
Soit $f : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'$ une application affine.
Si $\mathcal{F} = A + \overrightarrow{F}$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}$, alors :

$$f(\mathcal{F}) = f(A) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{F})$$

Preuve 8 : Sans difficulté en procédant par équivalences ...

Remarque 3. Ainsi, les applications affines conservent le parallélisme.

THÉORÈME 9 : **Image réciproque d'un sous-espace affine par une application affine**
Soit $f : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}'$ une application affine.
Si $\mathcal{F}'$ est un sous-espace affine de $\mathcal{E}'$ de direction $\overrightarrow{F}'$ et que $\boxed{f^{-1}(\mathcal{F}') \neq \emptyset}$, alors :

$$f^{-1}(\mathcal{F}') \text{ est un sous-espace affine de } \mathcal{E} \text{ de direction } \overrightarrow{f}^{-1}(\overrightarrow{F}')$$

Preuve 9 : Par équivalences, en pensant à rechercher les points M sous la forme $M = B + \overrightarrow{BM}$ où $B \in f^{-1}(\mathcal{F}')$.

1.2.3 Ensemble des points invariants

THÉORÈME 10 : **Points fixes (ou invariants) d'une application affine**
Soit une application affine $f : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$.

On note $\quad \mathrm{Fix}(f) = \{M \in E \mid f(M) = M\} \quad$ l'ensemble des points fixes de f.

Lorsque $\boxed{\mathrm{Fix}(f) \neq \emptyset}$, c'est un sous-espace affine de E de direction $\ker(\overrightarrow{f} - \mathrm{id})$.

Preuve 10 : Sans difficulté en procédant par équivalences et en considérant A tel que $f(A) = A$ ...

2 Les applications affines usuelles

Dans tout ce paragraphe, on considère des applications d'un espace affine $\mathcal{E}$ vers lui-même.
On montrera que toutes les applications suivantes sont affines. Elles vérifient donc toutes les propriétés communes aux applications affines (conservation du barycentre, du milieu, du parallèlisme, image d'un convexe, image et image réciproque d'un sea, nature de l'ensemble des points invariants ...)

2.1 Les translations

DÉFINITION 3 : **Les translations**
Si $\overrightarrow{u}$ est un vecteur de E.
La translation $t_{\overrightarrow{u}}$ de vecteur $\overrightarrow{u}$ est l'application qui à un point M de $\mathcal{E}$ fait correspondre le point

$$\boxed{M' = M + \overrightarrow{u}}$$

Remarque 4.
1. Une translation affine est définie par la donnée d'un vecteur $\overrightarrow{u}$.
2. Lorsque E est un espace euclidien, les translations conservent l'orthogonalité.

THÉORÈME 11 : **Groupe des translations**

1. Les translations sont les applications affines de partie linéaire $\boxed{\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E}$.
2. L'ensemble $(\mathcal{T},\circ)$ des translations est un sous-groupe du groupe affine.

Preuve 11 :
1. On montre qu'une translation est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$, puis qu'une telle application est bien une translation.
2. Pas de difficulté.

`Exemple 3.` Donner l'expression analytique de la translation de vecteur $\overrightarrow{u}(a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice : 4
Déterminer les endomorphismes affines de $\mathcal{E}$ qui commutent avec toutes les translations.

2.2 Les homothéties affines

DÉFINITION 4 : **Homothéties affines**
Soient $\Omega \in \mathcal{E}$ et $k \in \mathbb{R}\backslash\{0,\ 1\}$.

L'homothétie affine $\left\{\begin{array}{l}\text{de centre } \Omega \\ \text{de rapport } k\end{array}\right.$ est l'application $h\ :\ \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ définie par :

$$\forall M \in \mathcal{E},\quad \overrightarrow{\Omega h(M)} = k.\overrightarrow{\Omega M} \qquad \text{ou} \qquad h(M) = \Omega + k.\overrightarrow{\Omega M}$$

Remarque 5. Le seul point fixe d'une homothétie est son centre.

Homothétie affine

Remarque 6. Les symétries centrales sont des homothéties de rapport -1.

THÉORÈME 12 : **Caractérisation des homothéties**
Soit f une application affine de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

$$f \text{ est une homothétie affine} \iff \boxed{\overrightarrow{f} = k.\,\mathrm{id}_E} \text{ avec } k \in \mathbb{R} \setminus \{0{,}1\}$$

Preuve 12 :
$\Rightarrow$ Vu dans la définition !
$\Leftarrow$ On montre que f admet un unique point fixe Ω, puis que pour tout M : $f(M) = \Omega + k.\overrightarrow{\Omega M}$.

Remarque 7. Une homothétie affine est définie par la donnée :
1. soit de son centre Ω et d'un rapport k. $(\overrightarrow{\Omega f(M)} = k\overrightarrow{\Omega M})$
2. soit de l'image d'un point A et d'un rapport k. $(f(M) = f(A) + k.\overrightarrow{AM})$

Pour trouver l'expression analytique d'une homothétie affine h :

1. de centre Ω et de rapport k :
   On retiendra que l'image M' d'un point M est défini par la relation $\boxed{M' = \Omega + k.\overrightarrow{\Omega M}}$.
2. dont on connaît l'image A' d'un point A et de rapport k :
   On retiendra que l'image M' d'un point M est défini par la relation : $\boxed{M' = h(A) + k.\overrightarrow{AM}}$.

`Exemple 4.` Dans $\mathbb{R}^3$ usuel :

1. Déterminer l'expression analytique de l'homothétie :
   (a) de centre $\Omega(1,\ -2,\ 3)$ et de rapport $k = 2$.
   (b) dont l'image de $A(2,\ 0,\ 1)$ est $A'(1,\ -2,\ 3)$ et de rapport $k = -3$.
2. Reconnaître la transformation d'expression analytique $\left\{\begin{array}{l} x' = 1 + 2x \\ y' = -1 + 2y \\ z' = 3 + 2z \end{array}\right.$.

PROPOSITION 13 : **Groupe des homothéties-translations**
L'ensemble $(\mathcal{H},\circ)$ des homothéties-translations est un sous-groupe du groupe affine.

Preuve 13 : Pas de difficultés ...

PROPOSITION 14 : **Propriétés complémentaires des homothéties**
Une homothétie de rapport k :

1. multiplie les distances par $|k|$.
2. conserve l'orthogonalité (lorsque E est un espace euclidien).
3. multiplie les aires par k^2.
4. transforme une droite en une droite parallèle.

Preuve 14 : Pas de difficulté en remarquant que $\overrightarrow{h(A)h(B)} = k\overrightarrow{AB}$.

Remarque 8. Il est donc aisé de déterminer le rapport d'une homothétie transformant deux points A et B en A' et B'.

Exercice : 5

Soit h une homothétie de centre Ω et de rapport $\alpha \neq 0,1$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.
Déterminer la nature et les éléments caractéristiques des applications $t \circ h$ et $h \circ t$.

Exercice : 6

Etudier la composée de deux homothéties.

2.3 Les projections affines

DÉFINITION 5 : **Projection affine**
Soit un sea $\mathcal{F}$ de direction $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ un sev supplémentaire : $E = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$.

La *projection affine* sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$ est l'application qui à tout point M de $\mathcal{E}$, associe l'unique point M' de $\mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{G}$.

Projection affine

Remarque 9. $\mathcal{F}$ est l'ensemble des vecteurs invariants de p.

Pour trouver l'expression analytique d'une projection affine p :
On retiendra que $p(M)$ est l'unique point M' de $\mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{G}$.

`Exemple 5.` Déterminer l'expression analytique de la projection affine $\left\{\begin{array}{l} \text{sur } \mathcal{P} \ : \ x + 3y - 2z = 7 \\ \text{parallèlement à : } \overrightarrow{D} = \text{Vect}(-1,\,1,\,3) \end{array}\right.$.
Que pouvez-vous en déduire?...

Proposition 15 : Une projection affine est une application affine

Soit un sea $\mathcal{F}$ de direction $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire : $E = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$.

Soit p la projection affine $\begin{cases} \text{sur } \mathcal{F} \\ //^t \text{ à } \overrightarrow{G} \end{cases}$.

1. p est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{p}$ la projection vectorielle $\begin{cases} \text{sur } \overrightarrow{F} \\ //^t \text{ à } \overrightarrow{G} \end{cases}$.
2. On a alors $\overrightarrow{G} = \ker \overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{F} = \ker(\overrightarrow{p} - Id)$.

Preuve 15 : Soit $\Omega \in \mathcal{F}$.
On montre que $p(M) = p(\Omega) + \overrightarrow{p}(\overrightarrow{\Omega M})$ où $\overrightarrow{p}$ est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$.

Remarque 10. Attention, une application affine dont la partie linéaire est une projection vectorielle n'est pas nécessairement une projection affine. En effet, si t est une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$ non nul alors $\overrightarrow{t \circ p} = \overrightarrow{p}$ et pourtant, $t \circ p$ n'est pas une projection affine puisqu'elle n'admet pas de point invariant.

Composée d'une translation et d'une projection affine

Proposition 16 : Caractérisation 1 des projections affines
Un endomorphisme affine p est une projection affine si et seulement si :

1. p admet des points fixes (soit $Fix(p)$ cet ensemble).
2. $\overrightarrow{p}$ est une projection vectorielle

Dans ce cas, p est la projection affine sur $Fix(p)$ parallèlement à $\ker \overrightarrow{p}$.

Preuve 16 :
- $\Rightarrow$ Immédiat.
- $\Leftarrow$ Soit f l'application affine telle que $f(\Omega) = \Omega$ et $\overrightarrow{f}$ la projection vectorielle sur $\overrightarrow{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$.
  On note $\mathcal{F} = \Omega + \overrightarrow{F}$. Pour tout $M \in \mathcal{E}$, il s'agit alors de prouver que : $\begin{cases} f(M) \in \mathcal{F} \\ \overrightarrow{f(M)M} \in \overrightarrow{G} \end{cases}$.

`Exemple 6.` On munit un espace affine $\mathcal{E}$ de dimension 3 d'un repère $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Déterminer la nature de l'application : $f : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ d'expression analytique : $\begin{cases} x' = 1/2(x - z + 1) \\ y' = 1/2(x + 2y + z - 1) \\ z' = 1/2(-x + z + 1) \end{cases}$

Proposition 17 : Caractérisation 2 des projections affines
Un endomorphisme affine p est une projection affine si et seulement si $p \circ p = p$.

Preuve 17 :
- $\Rightarrow$ Pas de difficulté.
- $\Leftarrow$ Soit $p \in Aff(E)$ telle que $p \circ p = p$. On montre que $\begin{cases} p \text{ admet des points invariants} \\ \overrightarrow{p} \text{ est une projection vectorielle} \end{cases}$.

Remarque 11. Avant d'utiliser cette caractérisation, pensez à vérifier que p est un endomorphisme affine.

Remarque 12. Lorsque E est un espace euclidien et que $E = \overrightarrow{F} \overset{\perp}{\oplus} \overrightarrow{G}$, on dit que p est une projection affine orthogonale.

2.4 Les symétrie affines

DÉFINITION 6 : **Symétrie affine**
Soit un sous-espace affine $\mathcal{F}$ de direction $\overrightarrow{F}$ et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{G}$ tel que $E = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$.
Si M est un point de l'espace, et $p(M)$ son projeté sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$, on définit $s(M)$ l'image de M par la symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\overrightarrow{G}$ par :

$$\boxed{s(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}}$$

Symétrie affine

Remarque 13. $\mathcal{F}$ est l'ensemble des points fixes de s.

PROPOSITION 18 : Si s est une symétrie affine, alors $s(M)$ est l'unique point M' de E tel que :

$$\begin{cases} \overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{G} \\ \text{le milieu de } [MM'] \text{ est dans } \mathcal{F} \end{cases}$$

Preuve 18 :
1. On commence par montrer sans difficulté que $s(M)$ vérifient les deux conditions.
2. On montre que ces deux conditions définissent un unique point M'.

Remarque 14. On utilisera cette proposition pour déterminer l'expression analytique d'une symétrie affine.

`Exemple 7.` Dans $\mathbb{R}^2$, écrire l'expression analytique de la symétrie $\begin{cases} \text{par rapport à la droite } \Delta \ : \ y + 2x = 1 \\ \text{de direction la droite } \overrightarrow{D} \ : \ 3x + y = 0 \end{cases}$.

PROPOSITION 19 : **Une symétrie affine est une application affine**

Soit un sea $\mathcal{F}$ de direction $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire : $E = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$.
Soit s la symétrie affine par rapport à $\mathcal{F}$ de direction $\overrightarrow{G}$.

1. s est une application affine de partie linéaire $\overrightarrow{s}$ la symétrie vectorielle $\begin{cases} \text{par rapport à } \overrightarrow{F} \\ \text{de direction } \overrightarrow{G} \end{cases}$.
2. $\overrightarrow{F} = \ker(\overrightarrow{s} - Id_E)$ et $\overrightarrow{G} = \ker(\overrightarrow{s} + \mathrm{id}_E)$.

Preuve 19 : Il suffit d'utiliser les résultats connus sur les projections affines.

PROPOSITION 20 : **Caractérisation 1 des symétries affines**
Un endomorphisme affine s est une symétrie affine si et seulement si :
1. s admet des points fixes (soit $\mathrm{Fix}(s)$ cet ensemble).
2. $\overrightarrow{s}$ est une symétrie vectorielle

Dans ce cas, s est la symétrie affine par rapport à $\mathrm{Fix}(s)$ de direction $\ker(\overrightarrow{s} + \mathrm{id}_E)$.

Preuve 20 :
$\Rightarrow$ Pas de difficulté.
$\Leftarrow$ Soit Ω un point fixe. On calcule $f(M) = f(\Omega) + \vec{s}(\overrightarrow{\Omega M}) = \dots = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$.

`Exemple 8.` Soit $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R}$.
Reconnaître l'application $f : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$ de représentation analytique $\begin{cases} x' = 5x + 2y - 2z + 2 \\ y' = -4x - y + 2z - 2 \\ z' = 8x + 4y - 3z + 4 \end{cases}$.

PROPOSITION 21 : **Caractérisation 2 des symétries affines**
Un endomorphisme affine s est une symétrie affine si et seulement si $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$.

Preuve 21 :
$\Rightarrow$ Pas de difficulté
$\Leftarrow$ (a) Soit $M \in \mathcal{E}$.
On montre que le point I, milieu de $[Ms(M)]$ est un point invariant (conservation du barycentre).
(b) On montre que la partie linéaire vérifie $\vec{s} \circ \vec{s} = \vec{s}$.

Remarque 15. Avant d'utiliser cette caractérisation, pensez à vérifier que s est un endomorphisme affine.

Exercice : 7
Reconnaître la transformation du plan d'expression analytique $\begin{cases} x' = x + 1 \\ y' = -y + 3 \end{cases}$.

Cas où la transformation f de partie linéaire $\vec{s}$ n'admet pas de point fixe.

Dans ce cas, on peut étudier la composée de f avec une translation de vecteur $\vec{u}(a, b)$.

1. On détermine les coordonnées de façon que $f \circ t_{\vec{u}}$ admet des points fixes.
2. $f \circ t_{\vec{u}}$ est alors une symétrie affine dont on détermine les caractéristiques.
3. On en déduit alors que f est la composée d'une symétrie et d'une translation.
4. On peut choisir un vecteur $\vec{u}$ qui appartient à $\vec{F}$. La transformation f est alors appelée un glissement.

Remarque 16. Lorsque E est un espace euclidien et que $E = \vec{F} \overset{\perp}{\oplus} \vec{G}$, on dit que s est une symétrie affine orthogonale. Dans ce cas, $\vec{s}$ est un endomorphisme orthogonal de E et s conserve l'orthogonalité.

2.5 Les affinités

DÉFINITION 7 : **Affinité**
Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de direction $\vec{F}$ et un sous-espace vectoriel $\vec{G}$ tel que $E = \vec{F} \oplus \vec{G}$.
Soit p la projection affine sur $\mathcal{F}$ parallèlement à $\vec{G}$ et un réel λ.
On appele *affinité* de rapport λ par rapport à $\mathcal{F}$ parallèlement à $\vec{G}$, l'application

$$a : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \mapsto & p(M) + \lambda\overrightarrow{p(M)M} \end{array}$$

Remarque 17. C'est à dire : $\overrightarrow{p(M)a(M)} = \lambda\overrightarrow{p(M)M}$.

Remarque 18. L'identité est une affinité de rapport 1, une projection est une affinité de rapport 0 et une symétrie une affinité de rapport -1.

Affinité

Exercice : 8

1. Démontrer qu'une affinité a est une application affine dont vous déterminerez la partie linéaire
2. Montrer que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des points fixes de a.

Pour trouver l'expression analytique d'une affinité a, $\left\{\begin{array}{l}\text{de base } \mathcal{F}_1\\ \text{de direction } \overrightarrow{F}_2\\ \text{de rapport } k\end{array}\right.$:

On retiendra que $a(M)$ est l'unique point M' tel que $\boxed{M' = p(M) + k.\overrightarrow{p(M)M}}$, où p est la projection affine sur $\mathcal{F}_1$ parallèlement à $\overrightarrow{F}_2$.

On commencera donc par rechercher les coordonnées de $p(M)$.

`Exemple 9.`

L'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ est l'image du cercle $\mathcal{C}(O,\, a)$ par l'affinité $\left\{\begin{array}{l}\text{de rapport } \dfrac{b}{a}\\ \text{d'axe } Ox\\ \text{de direction } Oy\end{array}\right.$.

Exercice : 9

Dans $\mathbb{R}^2$ muni du repère canonique, on considère $\left\{\begin{array}{l}\text{la droite } \mathcal{D}_1 \text{ passant par } A_1(2,1) \text{ dirigée par } \overrightarrow{u} = (1,1)\\ \text{la droite } \mathcal{D}_2 \text{ passant par } A_2(1,1) \text{ dirigée par } \overrightarrow{v} = (1,-1)\end{array}\right.$.

Déterminer les expressions analytiques :

1. de la projection affine sur $\mathcal{D}_1$ parallèlement à $\mathcal{D}_2$
2. de l'affinité de rapport 3 sur $\mathcal{D}_1$ parallèlement à $\mathcal{D}_2$.

Exercice : 10

Démontrer que faire subir à la parabole $y = x^2$ une affinité de base (Oy) et de direction (Ox) revient à lui faire subir une homothétie.

3 Les isométries

A partir de maintenant, on supposera E muni d'une structure euclidienne.

3.1 Définitions, caractérisation et propriétés

Définition 8 : **Isométrie affine**

Soit $f : \mathcal{E} \mapsto \mathcal{E}$.

On dit que f est une *isométrie affine* si et seulement si elle conserve les distances :

$$\forall (A,\, B) \in \mathcal{E}^2, \quad d\big(f(A), f(B)\big) = d(A,B)$$

On notera $I(\mathcal{E})$ l'ensemble des isométries affines de $\mathcal{E}$.

Remarque 19. La composée de deux isométries est une isométrie.

PROPOSITION 22 : Les isométries affines de $\mathcal{E}$ sont des applications affines.

Preuve 22 : Démonstration non exigible... mais faisable !!

Exemple 10.

1. Les translations affines sont des isométries
2. Une symétrie affine est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale

THÉORÈME FONDAMENTAL 23 : **Caractérisation des isométries**
Une application affine f est une isométrie si et seulement si sa partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est orthogonale.

Preuve 23 : Simple en procédant par équivalences.

Remarque 20. Les isométries sont donc des applications affines bijectives.

DÉFINITION 9 : **Déplacement**

1. Une isométrie affine f est un *déplacement* lorsque $\overrightarrow{f} \in SO(E)$.
   On note $I^+(E)$ l'ensemble des déplacements de E.
2. Une isométrie affine f est un *antidéplacement* lorsque $\overrightarrow{f} \in O^-(E)$.
   On note $I^-(E)$ l'ensemble des antidéplacements de E.

Remarque 21. Que dire de la composée de deux déplacements ? de deux antidéplacements ? D'un déplacement et d'un antidéplacement ?

PROPOSITION 24 : **Propriétés des isométries affines :**
Les isométries affines conservent :

1. Les barycentres
2. L'alignement
3. Le parallélisme
4. L'orthogonalité
5. Les distances
6. Les aires

Les déplacements conservent l'orientation des bases alors que les antidéplacements inversent cette orientation.

Preuve 24 :

1. La conservation de l'orthogonalité est quasi-immédiate !
2. La conservation des distances et de l'orthogonalité implique la conservation des aires.
3. Pour la conservation de l'orientation, il suffit d'exprimer : $\det(\overrightarrow{f(A_1)f(B_1)}, \dots, \overrightarrow{f(A_n)f(B_n)})$ ...

3.2 Les déplacements du plan affine

THÉORÈME 25 : **Classification des déplacements du plan**
Soit $f : \mathcal{E}_2 \mapsto \mathcal{E}_2$ un déplacement du plan E_2, alors :

1. Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$ alors f est une translation
2. Si $\overrightarrow{f} \neq \mathrm{id}_E$, alors $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle $\overrightarrow{r}_\theta$ et f possède un unique point fixe Ω.
   On a alors :
   $$\forall M \in \mathbb{R}^2, \quad f(M) = \Omega + \overrightarrow{r}_\theta(\overrightarrow{\Omega M})$$
   On dit que f est la *rotation affine* de centre Ω et d'angle θ.

Preuve 25 : Pas de difficulté compte-tenu de nos connaissances sur le groupe orthogonal de E_2.
Pour l'existence de Ω dans le cas des rotations, on pourra se placer dans un rond.

Rotation affine

`Exemple 11.` On munit le plan d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Déterminer la nature de l'application $f : \mathcal{P} \mapsto \mathcal{P}$ d'expression analytique : $\begin{cases} x' = 1/5(3x - 4y + 20) \\ y' = 1/5(4x + 3y - 10) \end{cases}$

Exercice : 11
Montrer que toute isométrie du plan qui échange deux points distincts est involutive.

3.3 Les déplacements de l'espace affine

Théorème 26 : **Classification des déplacements de l'espace**

Soit $f : \mathcal{E}_3 \mapsto \mathcal{E}_3$ un déplacement de l'espace E_3.

1. Si $\overrightarrow{f} = \mathrm{id}_E$ alors f est une translation.
2. Si $\overrightarrow{f} \neq \mathrm{id}_E$, alors $\overrightarrow{f}$ est une rotation vectorielle d'axe $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{d})$ et d'angle θ.
   (a) Si f admet un point fixe Ω, alors :
   f est une *rotation affine d'axe* $\Omega + \mathrm{Vect}(\overrightarrow{d})$ *et d'angle* θ.
   (b) Si f n'admet pas de point fixe, alors :
   f est la composée d'une rotation d'angle θ et d'axe $\mathcal{D}$ orienté par $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{d})$ et d'une translation de vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{d})$. On dit que f est un *vissage* d'axe $\mathcal{D}$, d'angle θ et de vecteur $\overrightarrow{u}$.

Rotation **Vissage**

Preuve 26 : Cas où $\overrightarrow{f} \neq \mathrm{id}_E$: dans ce cas, $\overrightarrow{f}$ est une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{d})$ et d'angle θ.

1. Si f admet un point fixe alors l'étude de f ne pose pas de difficulté.
2. Supposons que f n'admette pas de point fixe.
   Soit $A \in E$ et notons alors $A' = f(A)$.
   L'application $g = t_{\overrightarrow{A'A}} \circ f$ est une application affine telle que $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{f}$ et qui admet A pour point fixe.
   Donc g est une rotation et $f = t_{\overrightarrow{AA'}} \circ g$ et on décompose alors $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ avec $\begin{cases} u \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{d}) \\ v \in (\overrightarrow{d})^{\perp} \end{cases}$.
   Il s'agit alors de prouver que $h = t_{\overrightarrow{v}} \circ g$ est une rotation d'axe $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{d})$, c'est à dire, que h admet un point fixe.
   (a) On considère A appartenant à l'axe de la rotation g.
   (b) On remarque que $h(M) = M \iff \ldots \iff (\mathrm{id}_{E_3} - \overrightarrow{h})(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{v}$
   On pourra alors résoudre cette équation dans une bond adaptée, ou montrer que la restriction de $\mathrm{id}_{E_3} - \overrightarrow{h}$ à $d^{\perp}$ est un automorphisme.

Détermination des éléments caractéristiques d'un vissage :

1. L'angle θ et la direction $\overrightarrow{d}$ de l'axe sont déterminés par l'étude de $\overrightarrow{f}$
2. L'axe est l'ensemble des points M vérifiant : $\overrightarrow{Mf(M)} \in \mathrm{Vect}(\overrightarrow{d})$
3. On trouve le vecteur $\overrightarrow{u}$ en prenant un point Ω de l'axe et en calculant $\overrightarrow{\Omega f(\Omega)}$.

Exercice : 12

Reconnaître les applications affines d'expressions analytiques suivantes dans un repère orthonormé direct.

1. $\begin{cases} x' = y - 3 \\ y' = z + 2 \\ z' = x + 1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x' = y - 3 \\ y' = z + 2 \\ z' = x + 2 \end{cases}$

Remarque 22. Une symétrie orthogonale par rapport à une droite est en fait une rotation d'axe cette droite et d'angle $\theta = \pi$.

Exercice : 13

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x - y + 2z - 1 = 0$ et $\mathcal{D}$ définie par $\begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ y - z - 1 = 0 \end{cases}$.
Déterminer le symétrique orthogonal de $\mathcal{P}$ par rapport à la droite $\mathcal{D}$.

3.4 Les réflexions affines

Définition 10 : **Réflexion**
On appelle *réflexion* une symétrie affine orthogonale par rapport à un hyperplan affine (droite dans le plan, plan dans l'espace). C'est une isométrie affine.

Remarque 23. Les réflexions du plan ou de l'espace affine sont des antidéplacements.

Réflexion du plan :	**Réflexion de l'espace :**

Exercice : 14

Déterminer l'expression analytique de la réflexion par rapport au plan $\mathcal{P} : x + y - z = 1$.

Proposition 27 : **Composée de deux réflexions d'hyperplans parallèles**
Soient $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ deux hyperplans affines parallèles de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ et s_i la réflexion par rapport à $\mathcal{H}_i$.
Alors $s_2 o s_1$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est l'unique vecteur de Vect $\overrightarrow{n}$ tel que $\mathcal{H}_2 = t_{\overrightarrow{v}}(\mathcal{H}_1)$.

Preuve 27 : On s'en dispensera ...

Composée de deux réflexions par rapport à deux hyperplans parallèles :

Remarque 24. Ainsi, toute translation peut s'écrire comme composée de 2 réflexions de bases parallèles.

Proposition 28 :
Etant donnés deux points A, B distincts du plan ou de l'espace, il existe une réflexion et une seule échangeant A et B.

1. Dans le plan, c'est la réflexion par rapport à la médiatrice de $[AB]$.
2. Dans l'espace, c'est la réflexion par rapport au plan médiateur de $[AB]$.

Preuve 28 : On s'en dispensera ...

Exercice : 15

Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du repère canonique.
Ecrire l'expression analytique de la réflexion échangeant les points $A(1, 2, 0)$ et $B(1, 1, 1)$.

3.4.1 Les réflexions du plan

Théorème 29 : Tout déplacement du plan affine s'écrit comme la composée de deux réflexions.

Preuve 29 :

1. On peut commencer par étudier le résultat de la composée de deux réflexions.
2. On en déduit facilement que tout déplacement s'écrit comme la composée de deux réflexions.

Composée de deux réflexions : Cas 1

Composée de deux réflexions : Cas 2

Exercice : 16

Etudier à quelle condition une réflexion et une translation du plan affine commutent.

Exercice : 17

Soit f la transformation de $\mathbb{R}^2$ usuelle d'expression analytique $\begin{cases} x' = -y+1 \\ y' = -x+2 \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe une translation $t_{\overrightarrow{u}}$ telle que $t_{\overrightarrow{u}} \circ f$ soit une réflexion par rapport à une droite dirigée par $\overrightarrow{u}$.
2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

Remarque 25. Cet exemple prouve que les réflexions ne sont pas les seuls antidéplacements en dimension 2. En particulier, on trouve aussi les réflexions glissées.

3.4.2 Les réflexions de l'espace

Proposition 30 : **Composée de deux réflexions par rapport à des plans non parallèles**
Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans affines non parallèles de l'espace E_3 et s_i la réflexion par rapport à $\mathcal{P}_i$.

Alors $s_2 \circ s_1$ est la rotation : $\begin{cases} \text{d'axe } \mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 \\ \text{d'angle } 2\theta \end{cases}$ où θ mesure l'angle $(\widehat{\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2})$ avec $\begin{cases} \overrightarrow{n}_1 \in P_1^\perp \\ \overrightarrow{n}_2 \in P_2^\perp \end{cases}$.

Preuve 30 : On s'en dispensera ...

Composées de deux réflexions par rapport à des plans non parallèles

Exercice : 18

Déterminer les déplacements et les réflexions de $\mathcal{E}$ de dimension 3 laissant globalement invariante une sphère donnée.

Complément Hors-Programme : Les anti-déplacements de l'espace

Soit $f \in \mathcal{I}^-(\mathcal{E})$.

1. 1 cas : $\overrightarrow{f}$ est une réflexion vectorielle.
   Alors f est soit une réflexion (cas où il existe des points invariants), soit une réflexion glissée.
2. 2ième cas : $\overrightarrow{f}$ est la composée d'une rotation d'axe $\overrightarrow{d}$, d'angle θ et d'une réflexion par rapport à $\overrightarrow{d}^\perp$.
   (a) On montre alors facilement que f admet un point invariant A.
   (b) En écrivant alors que $f(M) = A + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{AM})$ on conclut facilement que f est la composée de la rotation d'axe $A + \text{Vect}(\overrightarrow{d})$, d'angle θ et de la réflexion par rapport à $A + \overrightarrow{d}^\perp$

`Exemple 12.` Reconnaître la transformation affine suivante : $\begin{cases} x' = 1/3(2x-2y+z+1) \\ y' = 1/3(2x+y-2z+3) \\ z' = 1/3(-x-2y-2z+4) \end{cases}$.

4 Les similitudes directes du plan

4.1 Traduction complexe de notions et propriétés géométriques du plan

On identifie le plan euclidien orienté à $\mathbb{C}$ en munissant ce plan d'un repère orthonormé et en associant :

1. à chaque point $M(x, y)$ son affixe $z = x + iy$.
2. à chaque vecteur $\overrightarrow{u}(x, y)$ son affixe $z = x + iy$.

Proposition 31 :

Si $\begin{cases} \overrightarrow{u} \text{ a pour affixe } z \\ \overrightarrow{u}' \text{ a pour affixe } z' \end{cases}$, alors $\begin{cases} \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}' \rangle = \text{Re}(z\overline{z'}) \\ (\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{u}'}) = \arg(z'/z) = \arg(z') - \arg(z) \\ \|\overrightarrow{u}\| = |z| \end{cases}$.

Preuve 31 : Vu en début d'année.

Proposition 32 : Si $\begin{cases} A \text{ a pour affixe } a \\ B \text{ a pour affixe } b \\ C \text{ a pour affixe } c \end{cases}$, alors $\boxed{A, B, C \text{ alignés} \iff \dfrac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}}$

Preuve 32 : Vu en début d'année.

4.2 Les Similitudes Directes

Définition 11 : Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$.
On appelle *Similitude* du plan de rapport k, une application de $Aff(\mathcal{E}_2)$ qui multiplie les distances par k.

Remarque 26.

1. Ainsi, toutes les isométries du plan ainsi que les homothéties sont des similitudes.
2. Une similitude du plan est une application bijective et sa partie linéaire appartient à $GL(E_2)$.

Proposition 33 : **Caractérisation des similitudes**
Les similitudes du plan de rapport $k > 0$ sont les applications obtenues en composant une homothétie de rapport k et une isométrie du plan.

Preuve 33 : La composée de f et d'une homothétie de rapport $1/k$ est une isométrie du plan ...

Remarque 27. Ainsi, les similitudes de rapport k conservent l'orthogonalité et multiplient les aires par k^2.

Définition 12 : **Similitudes directes et indirectes**
Soit f une similitude du plan de partie linéaire $\overrightarrow{f}$.

1. Si $\det(\overrightarrow{f}) > 0$ alors la similitude est dite "directe"
2. Si $\det(\overrightarrow{f}) < 0$ alors la similitude est dite "indirecte"

Remarque 28.

1. Les similitudes directes sont les composées d'une homothétie de rapport $k > 0$ et d'un déplacement (translation ou rotation).
2. Les similitudes indirectes sont les composées d'une homothétie de rapport $k > 0$ et d'un antidéplacement (réflexion ou réflexion glissée).

Proposition 34 : Liste des similitudes directes

Similitude directe		Forme complexe		
Translations	$t_{\vec{u}}$	$z' = z + b$	avec	b l'affixe du vecteur de la translation
Rotations	r	$z' = e^{i\alpha}z + b$	avec	α l'angle de la rotation
Homothéties	h	$z' = k.z + b$	avec	$k \neq 0$ le rapport de l'homothétie
Composées	$r \circ h$	$z' = k.e^{i\alpha}z + b$	avec	$\left\{\begin{array}{l}\alpha \text{ l'angle de la rotation}\\ k \text{ le rapport de l'homothétie}\end{array}\right.$

Avec $k \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{C}$ et $\alpha \in [0\ ;\ 2\pi[$.

Preuve 34 :

1. La liste des similitudes directes s'obtient en composant les déplacements du plan avec une homothétie de rapport $k > 0$. Les homothéties de rapport $k < 0$ sont aussi des similitudes comme composées d'une homothétie de rapport $-k$ et d'une rotation d'angle π.
2. On obtient les expressions complexes en traduisant les relations définissant la position de M' (l'image de M) à partir de M.

Proposition 35 : Expression complexe d'une similitude directe
Les *similitudes directes* sont les transformations du plan de forme complexe :

$$z' = az + b \quad \text{avec} \left\{\begin{array}{l} a \in \mathbb{C}^* \\ b \in \mathbb{C} \end{array}\right.$$

Preuve 35 :

1. Nous savons que les similitudes directes ont une expression complexe de la forme $z' = az+b$ avec $\left\{\begin{array}{l} a \in \mathbb{C}^* \\ b \in \mathbb{C} \end{array}\right.$
2. Réciproquement :
   Soit une transformation du plan d'expression complexe $z' = az + b$, avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ ...

Remarque 29. Les similitudes directes conservent les angles orientés.

Proposition 36 : Description finale des similitudes directes

1. Toute similitude directe autre qu'une translation possède un unique point fixe Ω.
2. La similitude s'écrit alors comme la composée $\left\{\begin{array}{l}\text{d'une rotation d'angle } \theta \\ \text{d'une homothétie de rapport } k\end{array}\right.$ de centre commun Ω.
   (a) Ω est appelé le centre de la similitude
   (b) k est appelé le rapport de la similitude
   (c) θ est appelé l'angle de la similitude
3. Dans ce cas, son expression complexe est de la forme $z' = k.e^{i\theta}z + b$.
   On trouve b en remarquant que Ω est l'unique point invariant.

Preuve 36 : Nous avons prouvé cela dans la démonstration précédente ...

Les similitudes directes du plan

PROPOSITION 37 : **Composition de deux similitudes directes du plan**
La composée de deux similitudes de rapports $\left\{\begin{array}{l} k \\ k \end{array}\right.$ et d'angle $\left\{\begin{array}{l} \theta \\ \theta' \end{array}\right.$ est une similitude $\left\{\begin{array}{l} \text{de rapport } kk' \\ \text{d'angle } \theta+\theta' \end{array}\right.$.

Preuve 37 : Facile avec les expressions analytiques complexes.

PROPOSITION 38 :
Il existe une unique similitude directe qui transforme un segment $[A, B]$ en un segment $[A', B']$.

Preuve 38 : Facile en recherchant cette similitude directe sous sa forme complexe.

Remarque 30. Ainsi, il existe une unique similitude du plan de centre A qui transforme un point B en un point C.

`Exemple 13.` Trouver la similitude directe qui transforme $\left\{\begin{array}{l} A(1,\ 1) \text{ en } B(3,\ 4) \\ B \text{ en } C(4,\ -1) \end{array}\right.$.

Méthode pour trouver la similitude directe qui transforme $[A, B]$ **en** $[A', B']$:

1. Le rapport de la similitude est $k = A'B'/AB$
2. L'angle de la similitude est l'angle $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$
3. La forme complexe est alors $z' = ke^{i\theta}z + b$.
   On en déduit alors facilement b puis le centre de la similitude.

Remarque 31. On peut aussi rechercher $a, b \in \mathbb{C}$ tels que $\left\{\begin{array}{l} z_{A'} = az_A + b \\ z_{B'} = az_B + b \end{array}\right.$ et en déduire les éléments caractéristiques de la similitude.

Exercice : 19

Soit ABC un triangle non aplati du plan $\mathcal{P}$.
On désigne par S_1, S_2 et S_3 les similitudes directes du plan $\mathcal{P}$ de centres respectifs A, B et C telles que $S_1(B) = C$, $S_2(C) = A$ et $S_3(A) = B$.
Décrire les composées $S_1 \circ S_2 \circ S_3$ et $S_3 \circ S_2 \circ S_1$.