Les espaces affines

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

21 mai 2010

Dans ce chapitre, on considère $\boxed{E \text{ un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel}}$.

1 Sous espaces affines

1.1 Définitions et premières propriétés

DÉFINITION 1 : **Sous-espace affine**
On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de E est un *sous-espace affine* (sea) de E si il existe un vecteur A de E et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de E tel que

$$\mathcal{F} = \{A + \overrightarrow{f} \mid \overrightarrow{f} \in \overrightarrow{F}\}$$

On note alors $\boxed{\mathcal{F} = A + \overrightarrow{F}}$ et on dit que :

1. $\overrightarrow{F}$ est la *direction* du sous-espace affine $\mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de E *passant par A et de direction* $\overrightarrow{F}$.
3. $\dim \overrightarrow{F}$ est la *dimension* du sous-espace affine $\mathcal{F}$.
4. toute base de $\overrightarrow{F}$ est un *ensemble de vecteurs directeurs* de $\mathcal{F}$.

Remarque 1.

1. Le "vecteur" A sera alors appelé un point, ainsi que tous les autres "vecteurs" de la forme $A + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$.
2. $\mathcal{F}$ est alors considéré comme un ensemble de points.
3. On notera $\overrightarrow{u} = B - A = \overrightarrow{AB}$ le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $B = A + \overrightarrow{u}$.

PROPOSITION 1 : Soit $A \in \mathcal{E}$.

L'application : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ M & \mapsto & \overrightarrow{u} \end{array}$ telle que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM}$ est une bijection.

Preuve 1 : En effet : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM} \Longleftrightarrow M = A + \overrightarrow{u}$

Points et vecteurs :

Remarque 2. Même si en théorie, il est possible d'additionner des points entre eux (puisqu'il s'agit en fait de vecteurs) ou de les multiplier par des scalaires, on évitera de le faire pour des raisons de difficultés d'interprétation.

Définition 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\overrightarrow{F}$ un sev de E.
Soit $\mathcal{F}$ un sea de E de direction $\overrightarrow{F}$.

1. Si $\dim \overrightarrow{F} = 0$ alors $\mathcal{F}$ est réduit à un point.
2. Si $\dim \overrightarrow{F} = 1$ alors $\mathcal{F}$ est une droite affine.
3. Si $\dim \overrightarrow{F} = 2$ alors $\mathcal{F}$ est un plan affine.
4. Si $\dim \overrightarrow{F} = n-1$ alors $\mathcal{F}$ est un hyperplan affine.

`Exemple 1.`

1. L'ev E peut être considéré comme le sea d'origine $\vec{0}$: $\mathcal{E} = \overrightarrow{0} + E$.
   On notera donc E ou $\mathcal{E}$ selon que E est considéré comme un ensemble de vecteurs ou un ensemble de points.
2. Les sev $\vec{F}$ de E sont des sea $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ passant par $\vec{0}$: $\mathcal{F} = \overrightarrow{0} + F$
   On les représentera donc toujours passant par l'origine.
3. $\mathcal{D} = (1, 2) + \text{Vect}((1, 1))$ est une droite affine de $\mathbb{R}^2$.
4. $\mathcal{P} = (1, 2, -1) + \text{Vect}((0, 1, 0), (1, 0, 1))$ est un plan affine de $\mathbb{R}^3$.
5. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ est une droite affine de $\mathcal{C}^0(I,\mathbb{R})$.
6. L'ensemble des solutions de $AX = B$ avec $\begin{cases} A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R}) \\ B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}) \end{cases}$ est soit $\emptyset$, soit un sea de $\mathbb{R}^p$ de dimension $p - \text{rg}\, S$.
7. L'ensemble des suites réelles vérifiant une relation du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, est un plan affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

`Exemple 2.` Justifier que l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ vérifiant une relation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, est un plan affine.

Définition 3 : On dira que trois points A, B et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés.

Proposition 2 : Soit $(A, B, C) \in E^3$.

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff A = B$
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Preuve 2 : Immédiat !

Exercice : 1

Soient I, J et K trois points du plan affine $\mathcal{E}$.

Montrer que : I, J et K sont alignés $\iff \forall M \in \mathcal{E},\ \det(\overrightarrow{MI}, \overrightarrow{MJ}) + \det(\overrightarrow{MJ}, \overrightarrow{MK}) + \det(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MI}) = 0$

Proposition 3 : On ne change pas le sea $\mathcal{F}$ en prenant un autre point de $\mathcal{F}$ comme origine.

$$\text{Si } \begin{cases} \mathcal{F} = A + \overrightarrow{F} \\ B \in \mathcal{F} \end{cases} \quad \text{alors} \quad \mathcal{F} = B + \overrightarrow{F}$$

Preuve 3 : Démonstration classique par double inclusion.

Proposition 4 : **Caractérisation de la direction d'un sea**
Si $\mathcal{F}$ est un sea de direction $\overrightarrow{F}$ passant par un point A, alors :

1. $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{MN} \text{ avec } (M, N) \in \mathcal{F}^2\}$
2. $\overrightarrow{F} = \{\overrightarrow{AM} \text{ avec } M \in \mathcal{F}\}$

Preuve 4 : Démonstrations classiques par double inclusion.

Caractérisation de la direction d'un sea

1.2 Sous-espaces affines parallèles

DÉFINITION 4 :
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sea de E de directions respectives $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$.

1. On dit que $\mathcal{G}$ *est parallèle à* $\mathcal{F}$ lorsque $\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{F}$.
2. On dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ *sont parallèles* lorsque $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{G}$.

$\mathcal{G}$ *est parallèle à* $\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ *sont parallèles*

Remarque 3. Dans $\mathbb{R}^3$, une droite peut être parallèle à un plan, mais il est incorrect de dire qu'un plan est parallèle à une droite.

PROPOSITION 5 : Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sea non vides.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles, alors :
1. Soit $\mathcal{F} = \mathcal{G}$
2. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont disjoints

Si $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$, alors :
1. Soit $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$
2. Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont disjoints

Preuve 5 :
1. Cas : $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont parallèles.
   S'ils ne sont pas disjoints, on montre facilement qu'ils sont égaux.
2. Cas : $\mathcal{F}$ est parallèle à $\mathcal{G}$.
   S'ils ne sont pas disjoints, on montre facilement que $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$.

Remarque 4. Tant que l'espace vectoriel E n'est pas muni d'une structure euclidienne, on ne peut pas parler d'orthogonalité de sous-espaces affines.

Exercice : 2
Démontrer que deux droites parallèles de l'espace sont coplanaires.

1.3 Sous-espaces affines orthogonaux

Si E est muni d'une structure euclidienne, on peut définir l'orthogonalité et la perpendicularité de deux sous espaces affines.

DÉFINITION 5 :
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sea de E de directions respectives $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$.
On dit que $\mathcal{G}$ *est orthogonal à* $\mathcal{F}$ lorsque $\overrightarrow{G}$ est orthogonal à $\overrightarrow{F}$ (cad $\overrightarrow{G} \subset \overrightarrow{F}^{\perp}$).

Dans ce cas, $\mathcal{F}$ est aussi orthogonal à $\mathcal{G}$ et donc "$\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont orthogonaux"

$\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ *sont orthogonaux*

`Exemple 3.` Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, on considère :
la droite $\mathcal{D} \left\{ \begin{array}{l} \text{passant par } A(2,\ 3,\ -1) \\ \text{dirigée par } \overrightarrow{u}(1,\ 2,\ 3) \end{array} \right.$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + 2y + 3z - 1 = 0$.

Justifier que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{P}$ sont deux sous espaces affines orthogonaux.

Remarque 5. Pourriez-vous définir la notion de perpendicularité entre deux sous-espaces affines ?

1.4 Intersection de deux sous-espaces affines

THÉORÈME 6 : **Intersection de sous-espaces affines**
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$.
Si $\boxed{\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset}$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$.

Preuve 6 : Soit $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Prouvons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = C + \vec{F} \cap \vec{G}$.
On procède alors très simplement par double inclusion.

Intersection de deux sea

`Exemple 4.` Que pouvez-vous dire de l'intersection de deux plans affines de $\mathbb{R}^3$?

COROLLAIRE 7 : **Intersection de deux sous-espaces affines de directions supplémentaires**
Soient deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de directions $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ telles que $E = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$.
Alors leur intersection est un singleton :

$$\exists \Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \text{ tel que } \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{\Omega\}$$

Dans ce cas, on dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sea supplémentaires.

Preuve 7 :

1. On commence par prouver que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
   Soit $\left\{ \begin{array}{l} A \in \mathcal{F} \\ B \in \mathcal{G} \end{array} \right.$. L'idée consiste à décomposer $\vec{AB}$ en utilisant $E = \vec{F} \oplus \vec{G}$.
2. Comme les directions sont supplémentaires, alors $\vec{F} \cap \vec{G} = \{0\}$.

Intersection de deux sea supplémentaires du plan

2 Repères cartésiens

Définition 6 : **Repère cartésien**
Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction $\vec{F}$.
On appellera *repère cartésien* de $\mathcal{F}$ un couple (Ω, b) où $\left\{ \begin{array}{l} \Omega \text{ est un point de } \mathcal{F} \\ b \text{ une base de } \vec{F} \end{array} \right.$.
Ce repère sera noté $\mathcal{R}(\Omega, b)$ ou (Ω, b) et Ω sera appelé *l'origine* du repère.

Remarque 6. Si $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$, on appelle *repère canonique* le repère formé de $O = (0, \dots, 0)$ et de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Définition 7 : **Coordonnées d'un point**
Si $A \in \mathcal{F}$, on appellera *coordonnées* de A dans le repère $\mathcal{R}(\Omega, b)$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ dans la base b.

Remarque 7. **Notations :**
Plaçons-nous dans le repère $\mathcal{R}(\Omega, b)$.

Si les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega A}$ dans b sont $(x_1, \dots, x_n)$, alors on notera :
$$\boxed{A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}} \quad \text{ou} \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}$$

On utilisera également cette notation pour noter les composantes d'un vecteur dans la base b.

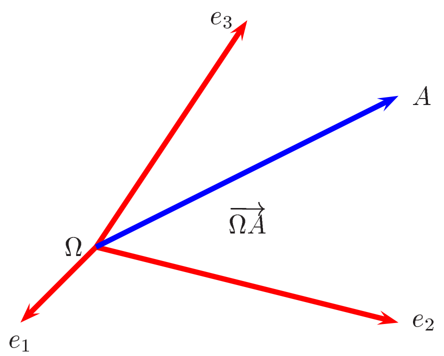

Fig. 1 – *Coordonnées de A dans $\mathcal{R}(\Omega, e_1, e_2, e_3)$*

Exercice : 3

Soit $\mathcal{F} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) + 1\}$.

1. Déterminer un repère de $\mathcal{F}$.
2. Préciser dans ce repère, les coordonnées d'une suite (w_n) de $\mathcal{F}$ en fonction de w_0 et w_1.

THÉORÈME 8 : **Formule de changement de repère**
Considérons deux repères cartésiens $\mathcal{R} = (O,b)$ et $\mathcal{R}' = (\Omega,b')$.
Soit M un point quelconque de l'espace.
En notant

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}},\quad M\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'},\quad \Omega\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},\quad \Omega = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = P_{b \mapsto b'}$$

on a la formule de changement de repère :

$$\boxed{X = \Omega + PX'}$$

Preuve 8 : Tout simplement parce que $\vec{OM} = \vec{O\Omega} + \vec{\Omega M}$ et que les coordonnées de $\vec{\Omega M}$ dans b sont PX'.

Remarque 8. Les formules de changement de repère dans un espace de dimension 2 sont donc de la forme :

$$\begin{cases} x = \alpha + ax' + by' \\ y = \beta + cx' + dy' \end{cases} \quad \text{ou après inversion} \quad \begin{cases} x' = \alpha + ax + by \\ y' = \beta + cx + dy \end{cases}$$

3 Barycentres

DÉFINITION 8 : **Système de points pondérés**
On considère $(A_j)_{1\leq j\leq n}$ un système de points de E, et n réels $(\alpha_j)_{1\leq i\leq n}$.

1. Le système $S = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ est appelé *système de points pondérés*.
2. On appelle *poids* de S, le réel $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

DÉFINITION 9 : **Barycentre**
Soit le système de points pondérés : $S = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ tel que $\boxed{\alpha \neq 0}$.

Il existe alors un unique point $G \in E$, appelé *barycentre* du système S, tel que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overrightarrow{GA_j} = 0$.

Pour tout point $\Omega \in E$ on a : $\boxed{G = \Omega + \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overrightarrow{\Omega A_j}}$ noté : $G = \text{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$.

Remarque 9. Si $\alpha = 0$, l'expression $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overrightarrow{MA_j}$ ne dépend pas de M.

Remarque 10. **Construction du barycentre de 2 points**

Méthode 1 ($\alpha\beta > 0$)	Méthode 2 ($\alpha\beta > 0$)	Méthode 2 ($\alpha\beta < 0$)

Remarque 11.

1. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Si $G = \text{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$, alors $G = \text{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ k.\alpha_1 & \dots & k.\alpha_n \end{pmatrix}$.
   En prenant $k = 1/\alpha$, on peut imposer la condition suivante : $\alpha_1 + \dots + \alpha_n = 1$.
2. On appelle *isobarycentre* des points $(A_1, \dots, A_n)$, le barycentre du système pondéré $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_n \\ 1/n & \dots & 1/n \end{pmatrix}$
3. Le barycentre d'un système de points ne dépend pas de l'ordre des points.

Proposition 9 : **Coordonnées du barycentre**
Soit E un espace affine munis d'un repère $\mathcal{R}(O, e_1, \dots, e_n)$.
Si $G = \text{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix}$, et si x_{ij} représente la ième coordonnées du point A_j, alors :

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \boxed{x_{Gi} = \frac{1}{\alpha}\sum_{j=1}^{p} \alpha_j.x_{ij}}$$

Preuve 9 : Cela vient directement du fait que $\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{\alpha}\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \overrightarrow{OA_j}$

Théorème 10 : **Associativité des barycentres**

Soit $\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p & A_{p+1} & \dots & A_n \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p & \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}$ un système pondéré de points de barycentre G. $(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \neq 0)$

On suppose que : $\beta_1 = \alpha_1 + \dots + \alpha_p \neq 0$ et $\beta_2 = \alpha_{p+1} + \dots + \alpha_n \neq 0$. $(*)$

$$\text{Si } \begin{cases} G_1 = \text{Bar}\begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_p \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_p \end{pmatrix} \\ G_2 = \text{Bar}\begin{pmatrix} A_{p+1} & \dots & A_n \\ \alpha_{p+1} & \dots & \alpha_n \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \text{alors } G \text{ est le barycentre de } \begin{pmatrix} G_1 & G_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Preuve 10 : Il suffit de faire le calcul ...

Remarque 12.
Plus généralement, on peut associer les points $\begin{pmatrix} A_i \\ \alpha_i \end{pmatrix}$ comme on le souhaite à condition que $(*)$ soit vérifiée.

`Exemple 5.` Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une méthode pour construire l'isobarycentre de n points.

Exercice : 4
Montrer qu'une partie de l'espace affine $\mathcal{E}$ est un sea si et seulement si il est stable par barycentration.

4 Parties convexes d'un espace affine

Définition 10 : **Segment**
Soit A et B deux points d'un espace affine $\mathcal{E}$.
On appelle *segment* d'extrémités A et B (noté $[AB]$), la partie de $\mathcal{E}$ définie par :

$$[AB] = \{\text{barycentre de } \begin{pmatrix} A & B \\ t & 1-t \end{pmatrix} \mid t \in [0, 1]\}$$

Remarque 13.
1. $[AA] = A$
2. $[AB]$ est inclus dans la droite affine (AB).
3. $[AB] = [CD]$ si et seulement si $\begin{cases} A = C \\ B = D \end{cases}$ ou $\begin{cases} A = D \\ B = C \end{cases}$.
4. L'isobarycentre de deux points A et B est appelé le *milieu* du segment $[AB]$.

Définition 11 : **Partie convexe**
Une partie $\mathcal{C}$ de $\mathcal{E}$ est dite *convexe* si et seulement si :

$$\forall A, B \in \mathcal{C}, \quad [AB] \subset \mathcal{C}$$

Proposition 11 : L'intersection d'une famille de parties convexes de $\mathcal{E}$ est une partie convexe de $\mathcal{E}$.

Preuve 11 : Pas de difficulté.

`Exemple 6.` Les sea sont des parties convexes de $\mathcal{E}$.

Théorème 12 : **Fonctions convexes et parties convexes**
Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ avec I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{F} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \mid \begin{cases} x \in I \\ y \geq f(x) \end{cases}\}$.

$$f \text{ est une fonction convexe } \Longleftrightarrow \mathcal{F} \text{ est une partie convexe de } \mathbb{R}^2$$

Preuve 12 : L'idée de la démonstration est simple, mais la traduction formelle est un peu ennuyeuse ...
$\Rightarrow$ On considère $M, N \in \mathcal{F}$ et l'on prolonge le segment $[MN]$ en un segment $[M'N']$ avec $M', N' \in \mathcal{C}_f$.
$\Leftarrow$ Pas de difficulté.

Fonctions convexes et parties convexes

Exercice : 5
Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, 2 parties convexes d'un espace affine $\mathcal{E}$.
Prouver que $\{\text{milieux de } [M_1M_2] \mid M_1 \in \mathcal{C}_1 \text{ et } M_2 \in \mathcal{C}_2\}$ est convexe.