Analyse vectorielle

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

29 juin 2010

1 Définitions

DÉFINITION 1 : **Champ scalaire et champ de vecteurs de l'espace (ou du plan)**

1. On appelle $\left\{ \begin{array}{l} \textit{potentiel scalaire} \\ \textit{champ scalaire} \end{array} \right.$ de l'espace, toute application $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$)

2. On appelle *champ de vecteurs* de l'espace, toute application $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ (ou de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$)

Champ scalaire et champ de vecteurs

`Exemple 1.`

1. Champs scalaires : champ de pression, de température, de potentiel électrique, de potentiel gravitationnel ...
2. Champs de vecteurs : champ électrique, champ magnétique, champ des vitesses dans un fluide ...

DÉFINITION 2 : **Gradient et laplacien d'un potentiel scalaire**

1. Soit f un potentiel scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$).
   On appelle *Gradient* de f, le champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{grad}} f$ défini sur U par :

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad \overrightarrow{\text{grad}} f(x, y, z) \; = \; (\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z))$$

2. Soit f un potentiel scalaire de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ (ou $\mathbb{R}^2$).
   On appelle *Laplacien* de f, le champ scalaire Δf défini sur U par :

$$\forall (x, y, z) \in U, \quad \Delta f(x, y, z) \; = \; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, z) + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, z)$$

Définition 3 : **Divergence et rotationnel d'un champ de vecteurs**

Soit $\overrightarrow{F}$ un champ de vecteurs de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ de fonctions coordonnées $\begin{cases} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{cases}$.

1. On appelle *divergence* de $\overrightarrow{F}$, le champ scalaire défini sur U par :

$$\forall (x,\, y) \in U, \quad \mathrm{div}\overrightarrow{F}(x,\, y,\, z) \;=\; \frac{\partial f_1}{\partial x}(x,\, y,\, z) + \frac{\partial f_2}{\partial y}(x,\, y,\, z) + \frac{\partial f_3}{\partial z}(x,\, y,\, z)$$

2. On appelle *rotationnel* de $\overrightarrow{F}$, le champ de vecteurs défini sur U par :

$$\forall (x,\, y) \in U, \quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F}(x,\, y,\, z) \;=\; \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z},\, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x},\, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right)$$

Divergence	**Rotationnel**

Remarque 1. Toutes ces notions se définissent aussi bien dans le plan que dans l'espace, à l'exception du rotationnel qui n'a de sens que dans l'espace. Elles mesurent chacune des propriétés locales des champs étudiés (vu dans le cours de physique de Spé).

`Exemple 2.` Pour mieux comprendre le sens de la divergence et du rotationnel d'un champ de vecteurs, calculer :

1. Le rotationnel de $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{u}_\theta$ en coordonnées cylindriques et de $\overrightarrow{F} = a.\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j} + c\overrightarrow{k}$ en coordonnées cartésiennes.
2. La divergence de $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{u}_r$ en coordonnées polaires et de $\overrightarrow{F} = a.\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ en coordonnées cartésiennes.

On donne les formules suivantes :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{F} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial f_z}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u}_r + \left(\frac{\partial f_r}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial r}\right)\overrightarrow{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r f_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial f_r}{\partial \theta}\right)\overrightarrow{u}_z \quad \text{et} \quad \mathrm{div}\overrightarrow{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 f_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\sin\theta f_\theta)}{\partial \theta}$$

Remarque 2. On utilise souvent l'opérateur *nabla* $\overrightarrow{\nabla}\left(\frac{\partial}{\partial x},\, \frac{\partial}{\partial y},\, \frac{\partial}{\partial x}\right)$ pour exprimer les définitions précédentes.

1. $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f \;=\; \overrightarrow{\nabla} f$
2. $\Delta f \;=\; \overrightarrow{\nabla}.(\overrightarrow{\nabla} f)$
3. $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F} \;=\; \overrightarrow{\nabla} \wedge \overrightarrow{F}$
4. $\mathrm{div}\overrightarrow{F} \;=\; \overrightarrow{\nabla}.\overrightarrow{F}$

Il convient très bien en coordonnées cartésiennes, mais n'est pas adapté pour les autres systèmes de coordonnées.

Exercice : 1

Calcul du Laplacien en coordonnées polaires.

On considère V un potentiel scalaire défini en coordonnées cartésiennes par $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
En coordonnées polaires, V est alors défini par la fonction $g \;:\; \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $g(\rho,\, \theta) = f(x,\, y)$.
Calculer ΔV en fonction de ρ, θ et des dérivées partielles de g.

Exercice : 2

Calcul du gradient en coordonnées cylindiques.

Soit V un potentiel scalaire de classe $\mathcal{C}^1$ de l'espace.
Exprimer $\overrightarrow{\text{grad}}\, V(M)$ en fonction de $\dfrac{\partial V}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial V}{\partial \varphi}$, $\dfrac{\partial V}{\partial z}$ et des vecteurs du repère cylindique associés au point M.

2 Formules d'analyse vectorielle

On considère dans cette section :

1. f et g des champs scalaires de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.
2. $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ des champs vectoriels de classe $\mathcal{C}^1$ ou $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$.
3. $\lambda \in \mathbb{R}$.

Proposition 1 : **$\overrightarrow{\text{grad}}$, Δ, div et $\overrightarrow{\text{rot}}$ sont des opérateurs linéaires**

- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f+\lambda g) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f + \lambda.\overrightarrow{\text{grad}}\, g$
- $\Delta(f+\lambda g) = \Delta f + \lambda.\Delta g$
- $\text{div}(\overrightarrow{F} + \lambda\overrightarrow{G}) = \text{div}\overrightarrow{F} + \lambda.\text{div}\overrightarrow{G}$
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{F} + \lambda\overrightarrow{G}) = \overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F} + \lambda.\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{G}$

Preuve 1 : Simples calculs ...

Proposition 2 : **$\overrightarrow{\text{grad}}$, Δ, div et $\overrightarrow{\text{rot}}$ d'un "produit"**

- $\overrightarrow{\text{grad}}\,(fg) = f.\overrightarrow{\text{grad}}\, g + g.\overrightarrow{\text{grad}}\, f$
- $\Delta(fg) = f.\Delta g + 2\overrightarrow{\text{grad}}\, f.\overrightarrow{\text{grad}}\, g + g.\Delta f$
- $\text{div}(f.\overrightarrow{F}) = f.\text{div}\overrightarrow{F} + \overrightarrow{\text{grad}}\, f.\overrightarrow{F}$
- $\overrightarrow{\text{rot}}(f\overrightarrow{F}) = f.\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F} + \overrightarrow{\text{grad}} f \wedge \overrightarrow{F}$

Preuve 2 : Simples calculs ...

Proposition 3 : **Formules complémentaires**

- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\, f) = \overrightarrow{0}$
- $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{F}) = 0$
- $\overrightarrow{\text{rot}}(f.\overrightarrow{\text{grad}}\, g) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \wedge \overrightarrow{\text{grad}}\, g$

Preuve 3 : Simples calculs ...

3 Intégrale curviligne le long d'une courbe orientée

Dans cette partie, nous nous placerons essentiellement dans le plan.

Rappel : Notion de différentielle d'une fonction en un point.
Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, et $M_0(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$.
La différentielle de f est l'application définie par :

$$\mathrm{d}f_{(x_0,\, y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \mathrm{d}x\ : (h_1, h_2) \mapsto h_1 \\ \mathrm{d}y\ : (h_1, h_2) \mapsto h_2 \end{cases}$$

Réciproquement :

Définition 4 : **Forme différentielle**
Soit P et Q deux fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définies sur un ouvert $\mathcal{U}$.
Alors l'application ω de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \omega(x, y) = P(x, y).\,\mathrm{d}x + Q(x, y).\,\mathrm{d}y$$

est appelé *forme différentielle* sur $\mathcal{U}$.

`Exemple 3.` Déterminer l'image de $(1, \pi)$ par la forme différentielle : $\omega\ : (x, y) \mapsto 3x^2\ \mathrm{d}x - x.\cos y\ \mathrm{d}y$.

Remarque 3.

1. $\forall (x, y) \in \mathcal{U}, \quad \omega(x, y)$ est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

2. Il n'existe pas toujours d'application $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle que $\omega = \mathrm{d}f$.
   Si une telle fonction f existe, on dit que ω est une *forme différentielle exacte.*
   f est alors appelée une *primitive* de ω sur $\mathcal{U}$.

3. On définit aussi une forme différentielle sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$ par : $\omega(x, y, z) = P(x, y, z)\ \mathrm{d}x + Q(x, y, z)\ \mathrm{d}y + R(x, y, z)\ \mathrm{d}z$

`Exemple 4.` Les formes différentielles suivantes sont-elles exactes ?

1. $\omega_1\ : (x, y) \mapsto x\ \mathrm{d}y + y\ \mathrm{d}x$ sur $\mathbb{R}^2$
2. $\omega_2\ : (x, y) \mapsto \dfrac{y\ \mathrm{d}y - x\ \mathrm{d}x}{x^2 + y^2}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Remarque 4.
La donnée d'une forme différentielle $\omega(x, y) = P(x, y)\ \mathrm{d}x + Q(x, y)\ \mathrm{d}y$ sur $\mathbb{R}^2$ équivaut à la donnée d'un champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y) \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}$.

Définition 5 : **Intégrale d'une forme différentielle le long d'une courbe orientée**

Soit $\omega = P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y$ une forme différentielle sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$ (P et Q étant des fonctions de $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$).
Soit Γ une courbe de représentation paramétrique $\overrightarrow{F} \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^1$ définie de $[a; b]$ dans $\mathcal{U}$.

L'*intégrale (curviligne) de* ω *le long de* Γ orientée par la représentation paramétrique $\overrightarrow{F}$ est définie par :

$$\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y = \int_a^b P(x(t), y(t)).x'(t) + Q(x(t), y(t)).y'(t)\ \mathrm{d}t$$

Remarque 5.

1. Bien entendu cette définition s'étend aux formes différentielles sur $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^3$. A formuler !
2. On démontre facilement que cette notion est indépendante du paramétrage admissible direct choisi.
3. Contrairement à une courbe paramétrée, une courbe Γ, donné par son équation cartésienne, n'a a priori aucune orientation. L'énoncé devra donc préciser le sens de celle-ci.

`Exemple 5.` Dans les exemples suivants, lorsque les courbes sont données par leur équation cartésienne, elles seront orientées dans le sens trigonométrique.

1. Calculer l'intégrale curviligne de $\omega(x, y) = xy\ \mathrm{d}x + (x + y)\ \mathrm{d}y$ le long de $\Gamma\ :\ y = x^2$ pour $x \in [-2, 2]$
2. Calculer l'intégrale curviligne de $\omega(x, y) = x\ \mathrm{d}y - y\ \mathrm{d}x$ le long de $\Gamma\ :\ x^2 + \dfrac{y^2}{4} - 2x - y = 0$
3. Calculer l'intégrale curviligne de $\omega(x, y) = -xy^2\ \mathrm{d}x + x^2 y\ \mathrm{d}y$ le long de $C\ :\ \rho = a(1 + \cos\theta)$ (demi-cardioïde).

Proposition 4 : **Relation de Chasles**
Soit ω une forme différentielle définie sur un ouvert $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^2$ et Γ_1 et Γ_2 deux courbes du plan telles que l'extrémité de Γ_1 coincide avec l'origine de Γ_2. Alors :

$$\int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_1} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \int_{\Gamma_2} \omega$$

Preuve 4 : Admise ...

Définition 6 : Travail d'un champ de vecteurs sur une courbe

Soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j}$ du plan et $\omega = P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y$ la forme diff. associée.
Soit Γ une courbe du plan.

$$W_\Gamma \overrightarrow{V} = \int_\Gamma P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y \quad \text{est aussi appelée} \left\{ \begin{array}{l} \textit{circulation} \\ \textit{travail} \end{array} \right. \text{du champ de vecteurs } \overrightarrow{V} \text{ sur } \Gamma$$

`Exemple 6.` Soient les points $O(0,\,0)$, $A(a,\,0)$, $B(a,\,b)$ et $C(0,\,b)$.
Calculer la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,\,y) = y^2\overrightarrow{i} + x^2\overrightarrow{j}$ le long du rectangle $OABC$

Remarque 6. On peut de même définir le travail d'un champ de vecteurs sur une courbe Γ de l'espace.

Exercice : 3

Calculer la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x,\,y,\,z) = \dfrac{y+z}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \dfrac{x+z}{x^2+y^2}\overrightarrow{j} + \dfrac{1}{x^2+y^2}\overrightarrow{k}$

1. le long de la portion d'hélice de reprétentation paramétrique $\left\{ \begin{array}{l} x = r\cos t \\ y = r\sin t \\ z = ht \end{array} \right.$ avec $t \in [0; 2\pi]$ et $\left\{ \begin{array}{l} r > 0 \\ h > 0 \end{array} \right.$.
2. le long du segment orienté $[A{,}B]$ avec $A(2r,\,0,\,\pi h)$ et $B(r,\,0,\,2\pi h)$ avec $r > 0$ et $h > 0$.

Théorème Fondamental 5 : Formule de Green-Riemann
Soit Γ une courbe de $\mathbb{R}^2$, fermée et orientée dans le sens trigonométrique.
Γ limite alors une partie fermée bornée du plan notée Δ.
Soient P et Q des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Δ.
On a alors :

$$\int_\Gamma P\ \mathrm{d}x + Q\ \mathrm{d}y = \int\int_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Preuve 5 : Hors programme ...

`Exemple 7.` Soient les points $O(0,\,0)$, $A(a,\,0)$, $B(a,\,b)$ et $C(0,\,b)$.
En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'intégrale curviligne de $\omega = y^2\ \mathrm{d}x + x^2\ \mathrm{d}y$ sur rectangle $OABC$.

Exercice : 4

Calculer la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}\ :\ (x,\,y) \mapsto -10x^2y^3\overrightarrow{i} + (3x^5 + 15xy^4)\overrightarrow{j}$ le long de la courbe γ d'équation cartésienne $x^2 + y^2 - x = 0$, en utilisant la formule de Green-Riemann.

Application au calcul de l'aire de Δ

La formule de Green-Riemann nous donne trois formules possibles :

1. $P = 0$ et $Q = x$. nous donne $\displaystyle\int\int_\Delta \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_\Gamma x\ \mathrm{d}y$
2. $P = -y$ et $Q = 0$. nous donne $\displaystyle\int\int_\Delta \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = -\int_\Gamma y\ \mathrm{d}x$
3. $P = \dfrac{-y}{2}$ et $Q = \dfrac{x}{2}$. nous donne $\displaystyle\int\int_\Delta \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_\Gamma -y\ \mathrm{d}x + x\ \mathrm{d}y$

Remarque 7. En d'autres termes, si $\left\{ \begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array} \right.$ est une représentation paramétrique de Γ, la frontière de Δ :

$$\boxed{\mathrm{AIRE}(\Delta) = \int_\Gamma x(t)y'(t)\ \mathrm{d}t = -\int_\Gamma y(t)x'(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}.\int_\Gamma -y(t)x'(t) + x(t)y'(t)\ \mathrm{d}t}$$

`Exemple 8.` Déterminer l'aire du domaine délimité par :

1. une astroïde
2. une arche de cycloïde

Exercice : 5

Calculer l'aire du domaine du plan défini par : $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1$ et $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}\leq 1$ où $0<b<a$.

4 Champs de vecteurs dérivant d'un potentiel scalaire

DÉFINITION 7 : **Champs de vecteurs dérivant d'un potentiel scalaire**
Soit $\overrightarrow{F}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$ un champ de vecteurs de class $\mathcal{C}^1$ défini sur un ouvert U.
On dit que $\overrightarrow{F}$ *dérive d'un potentiel scalaire* si et seulement si il existe un champ scalaire f défini sur U de classe $\mathcal{C}^1$ tel que :

$$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$$

f est alors appelé un *potentiel scalaire* de $\overrightarrow{F}$.

Remarque 8.
1. Un champ de vecteurs $\overrightarrow{F}=P\overrightarrow{i}+Q\overrightarrow{j}$ dérive d'un potentiel scalaire f sur $\mathcal{U}$ ssi $\omega=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ est une forme différentielle exacte sur $\mathcal{U}$ avec $\omega=\mathrm{d}f$.
2. Si $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire f alors il dérive de tout potentiel scalaire $f+\lambda$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

DÉFINITION 8 : **Partie étoilée par rapport à un point**
On dit qu'une partie U de $\mathbb{R}^3$ est étoilée, s'il existe un point $A\in\mathbb{R}^3$ tel que $\forall M\in U$, $[AM]\subset U$.

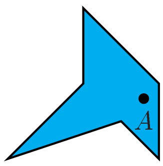

FIG. 1 – *Partie étoilée par rapport à A*

Remarque 9. Une partie convexe est étoilée par rapport à chacun de ses points.

THÉORÈME 6 : **CNS pour que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire**

Soit $\overrightarrow{F}:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}^3$ un champ de vecteurs de class $\mathcal{C}^1$ défini sur un ouvert U.

1. CN : Si $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire, alors : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}$
2. CS : Si $\begin{cases}\overrightarrow{\mathrm{rot}}\overrightarrow{F}=\overrightarrow{0}\\ U \text{ est un ouvert étoilé}\end{cases}$ alors $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potentiel scalaire.

Preuve 6 : Admis ...

Remarque 10. Bien entendu, cette CNS n'est valable que pour des champs scalaires de l'espace.

`Exemple 9.` Montrer que le champ vectoriel $\overrightarrow{F}(x,y,z)=(x^2-yz,\,y^2-zx,\,z^2-xy)$ dérive d'un potentiel scalaire.

Exercice : 6

Soit $\overrightarrow{\omega}$ un vecteur de l'espace et $\overrightarrow{F}$ le champ de vecteurs de l'espace défini par $\overrightarrow{F}(M)=\overrightarrow{\omega}\wedge\overrightarrow{OM}$.
1. Calculer div $\overrightarrow{F}(M)$ et $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{F}(M)$.
2. Le champ de vecteurs F dérive-t-il d'un potentiel scalaire ?

Théorème Fondamental 7 : **Travail d'un champ de vecteurs dérivant d'un potentiel scalaire**

Soit $\begin{cases} \text{un champ de vecteurs } \overrightarrow{V} = P\overrightarrow{i} + Q\overrightarrow{j} \text{ dérivant du potentiel scalaire } f \\ \omega \text{ la forme différentielle exacte associée à } \overrightarrow{V} \end{cases}$.

On s'intéresse au travail du champ $\overrightarrow{V}$ le long d'une courbe Γ paramétrée par $\overrightarrow{F}(t)$ avec $t \in [a,b]$.
En notant $M(a)$ et $M(b)$ les points de Γ de paramètres a et b, on a :

$$\boxed{W_\Gamma \overrightarrow{V} = \int_\Gamma \omega = f(M(b)) - f(M(a))}$$

Preuve 7 : Il suffit d'effectuer le calcul en utilisant le fait que $\omega = \mathrm{d}f$.

Remarque 11. Ainsi, comme nous le verrons dans un exercice qui suit, le travail du poids d'un objet (qui dérive du potentiel gravitationnel) ne dépend que des points de départ et d'arrivée de l'objet.

Remarque 12. Le travail du champ de vecteurs dérivant d'un potentiel scalaire f (cad : associé à une forme différentielle exacte ω) ne dépend alors que des extrémités de Γ. En particulier, si la courbe est fermée, le travail du champ $\overrightarrow{V}$ est nul : $W_\Gamma \overrightarrow{V} = \int_\Gamma \omega = 0$.

Exercice : 7

On considère une attraction inversement proportionnelle au carré de la distance à un point O.
Le champ de vecteurs $\overrightarrow{F}$ défini sur $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, vérifie donc : $\overrightarrow{F}(M) = \dfrac{-k}{OM^3}\overrightarrow{OM}$

1. Montrer que $\overrightarrow{F}$ dérive d'un potientiel scalaire.
2. Déterminer le travail de la force $\overrightarrow{F}$ le long d'un chemin allant de A à B qui ne passe pas par le point O.

Exercice : 8

Déterminer la circulation du champ de vecteurs $\overrightarrow{V}(x, y) = (3(x^2+y^2) - y^3)\overrightarrow{i} + 3xy(2-y)\overrightarrow{j}$ le long :

1. du demi-cercle de représentation paramétrique $x(t) = \cos t$ et $y(t) = \sin t$ pour $t \in [0; \pi]$.
   (a) En tentant d'effectuer un calcul direct.
   (b) En utilisant la formule de Green-Riemann.
   (c) En recherchant un potentiel scalaire éventuel d'où dérive $\overrightarrow{V}$.
2. du cercle de centre 0 et de rayon 1?

Exercice : 9

1. Le champ de vecteurs $\overrightarrow{W}(x, y, z) = (x-y)\overrightarrow{i} + (y^2 - z - x)\overrightarrow{j} + (z^2 - y)\overrightarrow{k}$ dérive-t-il d'un potentiel scalaire?
2. Calculer la circulation de ce champ le long du cercle de centre 0, de rayon 1 et d'axe 0_z parcouru une fois dans le sens direct.

Exercice : 10

Soit $\overrightarrow{V} : (x, y, z) \mapsto -2\dfrac{x}{z}\overrightarrow{i} + 2\dfrac{y}{z}\overrightarrow{j} + \dfrac{x^2-y^2}{z^2}\overrightarrow{k}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{V}$ dérive d'un potentiel scalaire.
2. Calculer la circulation du champ de vecteur $\overrightarrow{V}$ le long du segment orienté $[A,B]$ avec $A(-r, 0, \pi h)$ et $B(r, 0, 2\pi h)$.