Les Nombres Complexes

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

19 septembre 2010

Les nombres complexes sont d'une grande utilité tant en mathématiques qu'en sciences physiques. Ils permettent en particulier l'étude de circuits électroniques en régime sinusoïdal et ils jouèrent un rôle déterminant dans la théorie de diffusion de la chaleur, de l'électricité et de la lumière développée par Maxwel.

1 Définitions

1.1 Le corps des complexes

Définition 1 : **Corps des Nombres Complexes**
On appelle "i" un nombre tel que $i^2 = -1$.

$$\text{L'ensemble } \mathbb{C} = \{a + i.b \mid (a,\, b) \in \mathbb{R}^2\} \text{ muni de } \begin{cases} \text{l'addition usuelle} \\ \text{la multiplication usuelle} \end{cases} \text{ est appelé :}$$

le $\boxed{\textbf{Corps des nombres complexes}}$

$i\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble des **imaginaires purs**.

Remarque 1.

- Le "nombre" i a été découvert au XVI^{ieme} siècle par Cardan lors d'une étude sur la résolution des équations du 3^{ieme} et 4^{ieme} degré.
- Nous verrons une définition précise de la structure de Corps dans le cours sur les structures algébriques.

Définition 2 : **Partie réelle, imaginaire**
Soit $z = a + ib$, un nombre complexe.

- $a = \mathrm{Re}(z)$ est la *partie réelle* de z
- $b = \mathrm{Im}(z)$ est la *partie imaginaire* de z.

Remarque 2.

1. L'expression $z = a + ib$ est appelée la *forme algébrique* du complexe z.
2. Deux complexes seront égaux si et seulement si ils ont les mêmes parties réelles et les mêmes parties imaginaires.
3. On peut enfin remarquer que pour tout complexes z et z' : $\begin{cases} \mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z') \end{cases}$

Remarque 3. Dans quel cas peut-on affirmer que $\mathrm{Re}(z.z') = \mathrm{Re}(z).\,\mathrm{Re}(z')$?

Définition 3 : **Conjugué d'un complexe**
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le *conjugué* de z est le nombre complexe : $\boxed{\bar{z} = a - ib}$

Remarque 4. Remarquons que si $z = a + ib$ alors $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$.
On peut alors définir la division d'un complexe z par un complexe non nul z' de la façon suivante : $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{\bar{z'}}{z'\bar{z'}}$

Théorème 1 : $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2$, on a les propriétés suivantes :

1. $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
2. $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
3. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $\quad (z' \neq 0)$
4. $\overline{\overline{z}} = z$

Preuve 1 : Il suffit de faire les calculs à l'aide de la forme algébrique.

Remarque 5. On dit que la propriété B est *une caractérisation* de la propriété A si l'on a : $A \iff B$.
Les caractérisations sont très intéressantes en pratique car elles donnent d'autres approches possibles (et souvent plus simples) pour démontrer une propriété donnée.

Les propriétés suivantes permettent de caractériser les réels et les imaginaires purs :

Proposition 2 :
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $\boxed{\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2}}$ et $\boxed{\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}}$

Par conséquent : $\begin{cases} z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z \\ z \in i\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z \end{cases}$

Preuve 2 : Immédiat.

Remarque 6. Ainsi, pour prouver que :
1. z est un réel, on pourra calculer $\bar{z} - z$ et montrer que cette quantité est nulle.
2. z est un imaginaire pur, on pourra calculer $\bar{z} + z$ et montrer que cette quantité est nulle.

1.2 Le plan complexe

Définition 4 : **Affixe, image**
Ici, le plan $\mathcal{P}$ (affine ou vectoriel) est supposé muni d'un repère orthonormé direct $R(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Les applications $\left\{\begin{array}{lcccc} f_1 & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & & a + ib & \mapsto & M(a, b) \\ \\ f_2 & : & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ & & a + ib & \mapsto & \vec{u}(a, b) \end{array}\right.$ sont des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{P}$.

1. Si $M(a, b)$ est un point de $\mathcal{P}$ alors le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé *affixe* de M.
2. Si $\vec{u}(a, b)$ un vecteur de $\mathcal{P}$ alors le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé *affixe* de $\vec{u}$.
3. Si $z = a + ib$ un élément de $\mathbb{C}$ alors le point $M(a, b)$ de $\mathcal{P}$ est appelé le *point image* de z.
4. Si $z = a + ib$ un élément de $\mathbb{C}$ alors le vecteur $\vec{u}(a, b)$ de $\mathcal{P}$ est appelé le *vecteur image* de z.

Remarque 7.
1. Du fait de l'existence des bijections précédentes, il pourra parfois nous arriver de confondre un point M (ou un vecteur $\vec{u}$) et son affixe z.
2. On appellera *plan complexe* le plan affine (resp : vectoriel) muni d'un repère orthonormé direct (resp : d'une base orthonormée directe) où les points (resp : vecteurs) sont repérés par leurs affixes.

Affixe d'un point du plan.	Affixe d'un vecteur du plan.

Remarque 8. M et $\overrightarrow{OM}$ ont les mêmes coordonnées : ils ont donc la même affixe.

Remarque 9. $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array}$ représente la symétrie orthogonale par rapport à Ox. Et la symétrie $\perp$ / O_y ?

$f : z \mapsto \bar{z}$	

PROPOSITION 3 : Soient $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ deux vecteurs du plan complexe d'affixes respectives z_1 et z_2.

Remarquons que : $\boxed{\overrightarrow{u}_1.\overrightarrow{u}_2 = \mathrm{Re}(\bar{z}_1 z_2)}$ et que $\boxed{\mathrm{Det}(\overrightarrow{u}_1,\, \overrightarrow{u}_2) = \mathrm{Im}(\bar{z}_1 z_2)}$

On a alors les équivalences suivantes :

1. $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ sont colinéaires $\iff$ $\bar{z}_1 z_2 \in \mathbb{R}$
2. $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ sont orthogonaux $\iff$ $\bar{z}_1 z_2 \in i\mathbb{R}$

Preuve 3 : Pas de difficulté avec la forme algébrique.

PROPOSITION 4 : Soient $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ deux vecteurs d'affixes respectives z_1 et z_2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors le vecteur somme $\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$ a pour affixe $z_1 + z_2$ et le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}_1$ a pour affixe λz_1.

Preuve 4 : Il suffit de faire les calculs.

Remarque 10. Soit $u \in \mathbb{C}$. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+u \end{array}$ représente la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe u.

Exercice : 1
(∗∗) Montrer que toute droite du plan affine a une équation complexe de la forme : $\alpha z - \overline{\alpha z} = \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in i\mathbb{R}$.

Exercice : 2
(∗ ∗ ∗) Soient A et B deux points distincts du plan d'affixe $a, b \in \mathbb{C}$.
Déterminer l'expression analytique complexe de la symétrie orthogonale par rapport à (AB).

PROPOSITION 5 : **Affixe du barycentre**
Dans le plan on note G le barycentre du système de n points $(A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n)$ avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$.
On a alors :

$$z_G = \frac{\alpha_1.z_1 + \cdots + \alpha_n.z_n}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}$$

Preuve 5 : Immédiat compte-tenu de la proposition précédente.

1.3 Module d'un complexe

Définition 5 : **Module d'un nombre complexe**
C'est le réel défini par

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}} \qquad (= \sqrt{z\bar{z}})$$

Si M est le point d'affixe z, alors $|z|$ représente la distance $\|\overrightarrow{OM}\|$.
Si A est le point d'affixe a, $|z-a|$ représente alors la distance $\|\overrightarrow{AM}\|$.

Remarque 11. Un complexe z et son conjugué ont le même module : $|z| = |\bar{z}|$

Dessin

Interprétation géométrique du module d'un complexe :

Remarque 12. Si $z \in \mathbb{R}$, le module se confond avec la valeur absolue.

Proposition 6 : **Propriétés du module**
Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ (avec éventuellement $z' \neq 0$) et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons les propositions suivantes :

1. $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ (si $z \neq 0$)
3. $|z.z'| = |z|.|z'|$
4. $|\lambda.z| = |\lambda|.|z|$
5. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
6. $\left|z+z'\right|^2 = |z|^2 + 2\operatorname{Re}\big(z.\bar{z'}\big) + |z'|^2$

Preuve 6 : Il suffit de faire les calculs en pensant à utiliser la relation $|z|^2 = z.\bar{z}$

Exercice : 3

(∗∗) Soient z_1 et z_2, deux complexes de module 1. Démontrer que $\dfrac{(z_1+z_2)^2}{z_1 z_2} \in \mathbb{R}$.

Exercice : 4

(∗) Prouvez que pour tout $x, y \in \mathbb{C}^*$, on a : $\left|\dfrac{x}{|x|^2} - \dfrac{y}{|y|^2}\right| = \dfrac{|x-y|}{|x||y|}$

Proposition 7 : **Inégalité entre module et parties réelle-imaginaire**
Soit $z = a+ib \in \mathbb{C}$.
On a les inégalités suivantes : $\big|\operatorname{Re}(z)\big| \leq |z|$ et $\big|\operatorname{Im}(z)\big| \leq |z|$

Preuve 7 : Pas de difficulté en exprimant $z = a+ib$ et en élevant les relations au carré.
Attention cependant à vérifier les équivalences.

Dans quels cas a-t-on des égalités ?

Théorème Fondamental 8 : **Inégalités triangulaires**
Pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$\Big||z| - |z'|\Big| \leq |z+z'| \leq |z| + |z'|$$

Preuve 8 :

1. On commence par démontrer la deuxième inégalité en l'élevant au carré (vérifier l'équivalence!) et en utilisant la proposition précédente.
2. On procède de même pour la première.

Remarque 13. Que peut-on en déduire sur les longueurs des côtés d'un triangle?

$\lvert z+z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$	$\big\lvert \lvert z\rvert - \lvert z'\rvert \big\rvert \leq \lvert z+z'\rvert$

Remarque 14. On a $|z+z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $\overrightarrow{u}(z)$ et $\overrightarrow{u}'(z')$ sont colinéaires et de même sens.

Exercice : 5

($*$) Prouver que pour tout x, y, $z \in \mathbb{C}$, on a : $|x||y-z| \leq |y||z-x| + |z||x-y|$.
En déduire l'inégalité de Ptolémée :

$$\forall x,\, y,\, z,\, t \in \mathbb{C}, \quad \text{on a : } \quad |x-y||z-t| \leq |x-z||y-t| + |x-t||y-z|$$

Corollaire 9 :
Pour n complexes $z_1, \dots, z_n$ quelconques, on a :

$$|z_1 + \dots + z_n| \ \leq\ |z_1| + \dots + |z_n|$$

Preuve 9 : Cette inégalité se déduit de l'inégalité triangulaire par récurrence.

Exercice : 6

($**$) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Prouver que les solutions complexes de l'équations $pz^p = z^{p-1} + \dots + z^2 + z + 1$ sont toutes de module inférieur à 1.

Théorème 10 : **Groupe** $(\mathbb{U},\times)$
Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\boxed{\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}}$

Cet ensemble :

1) Possède l'élément 1 (élément neutre pour la multiplication).
2) Est stable par multiplication (si z et z' sont de module 1 alors $z.z'$ est de module 1).
3) Est stable par inversion (si z est de module 1, alors $\dfrac{1}{z}$ existe et est de module 1).

Comme d'autre part, $\times$ est associative, $\mathbb{U}$ muni de la multiplication a une $\boxed{\text{structure de groupe}}$.

Preuve 10 : Les 3 propriétés citées sont facilement vérifiables.
Nous verrons plus en détail la structure de groupe dans le chapitre sur les structures algébriques.

2 Exponentielle imaginaire et applications en trigonométrie

2.1 L'exponentielle imaginaire

DÉFINITION 6 : **Exponentielle imaginaire**
Soit θ un réel quelconque. On note

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i.\sin\theta}$$

Remarque 15. On note $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$ ou plutôt $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

PROPOSITION 11 : **Calculs avec l'exponentielle imaginaire**
Soient θ et θ' des réels quelconques.

1. $|e^{i\theta}| = 1$
2. $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
3. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
4. $-1 = e^{i\pi}$
5. $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta}e^{i\theta'}$

Preuve 11 : Ces résultats se démontrent sans difficulté à l'aide des formules trigonométriques.

PROPOSITION 12 : Soit θ un réel.

$$e^{i\theta} = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Conséquence : $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Longleftrightarrow \theta = \theta'[2\pi]$.

Preuve 12 : Pas de difficulté.

LEMME 13 : Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a alors l'équivalence suivante :

$$a^2 + b^2 = 1 \quad\Longleftrightarrow\quad \exists!\theta \in]-\pi, \pi] \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}$$

Preuve 13 : La réciproque est immédiate.
Pour le sens direct, on commence par montrer que $a \in [-1, 1]$.

Remarque 16. Ce lemme est très régulièrement utilisé. Il est important de le connaître parfaitement.

THÉORÈME 14 : **Morphisme canonique** de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{U}, \times)$

$$e : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathbb{U},\times) \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array} \qquad \text{est un morphisme de groupes surjectif.}$$

Preuve 14 : e est un morphisme de groupes car :

1. $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{U}, \times)$ ont une structure de groupes (voir cours sur les structures algébriques)
2. $e(\theta + \theta') = e(\theta) \times e(\theta')$

La surjectivité est une conséquence du lemme précédent.

Remarque 17.

1. Comme les antécédents de 1 (élément neutre pour la multiplication) sont les éléments de $2\pi\mathbb{Z}$ ($e(\theta) = 1 \Longleftrightarrow \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$), alors on dit que son noyau ($\ker e$) est $2\pi\mathbb{Z}$.
2. Comme $\{e(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{U}$, on dit que l'image de e ($\operatorname{Im} e$) est $\mathbb{U}$.

2.2 Formules et applications

THÉORÈME 15 : **Formules de Moivre**

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \forall\theta \in \mathbb{R}, \quad \boxed{e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n} \quad \text{c'est à dire} \quad \boxed{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (cos\theta + i\sin\theta)^n}$$

Preuve 15 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on démontre facilement par récurrence que $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$ puis que $e^{-in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{-n}$.

Remarque 18. Le mathématicien français Abraham De Moivre (XVII ème siècle) est l'auteur de cette formule souvent attribuée injustement à Stirling.

APPLICATION : Pour exprimer $\cos n\theta$ ou $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

1. On remarque que $\cos n\theta = \mathrm{Re}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n]$ et que $\sin n\theta = \mathrm{Im}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n]$
2. Puis on utilise la formule du binôme pour développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$
3. On en extrait alors la partie réelle et la partie imaginaire pour obtenir $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$.

Remarque 19. La fonction "expand()" de Maple permet d'effectuer le développement de la formule du binôme.

`Exemple 1.` $(*)$ Soit $P(\theta) = \sin 6\theta \cos 4\theta$. Exprimer $P(\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice : 7

Polynômes de Tchebytchev.
Il est possible d'exprimer $\cos n\theta$ uniquement à l'aide de $\cos\theta$ sous la forme $T_n(\cos\theta)$.
$T_n(x)$ est un polynôme appelé le nième polynôme de Tchebychev.
Pour cela, il suffit de transformer les termes en $\sin\theta$ en utilisant la formule $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.
Déterminer les 5 premiers polynômes de Tchebytchev.

Théorème 16 : **Formules d'Euler**
Soit θ un réel quelconque. Alors :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}} \quad et \quad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Preuve 16 : Immédiat !

Remarque 20. Leonhard Euler (1707-1783), de nationalité suisse, est l'un des plus talentueux mathématiciens. Il a découvert un nombre incroyable de formules.

`Exemple 2.` $(*)$ Soit $z \in \mathbb{U}$. Peut-on trouver un réel a tel que $z = \dfrac{1+ia}{1-ia}$?

Remarque 21. Ces formules permettent de linéariser (transformer des produits en sommes) des expressions trigonométriques. Cette transformation est particulièrement utile lors du calcul d'intégrales.

APPLICATION : Pour *linéariser* un produit de sinus et de cosinus :
1. On remplace les $\cos(a.\theta)$ et les $\sin(b.\theta)$ à l'aide des formules d'Euler.
2. On développe l'expression obtenue à l'aide de la formule du binôme.
3. On regroupe les termes conjugués entre eux.
4. On réutilise les formules d'Euler pour retrouver des cosinus et des sinus.

Remarque 22. La fonction "combine()" de Maple permet de linéariser une expression trigonométrique.

`Exemple 3.` $(*)$
1. Linéariser l'expression suivante : $P(x) = \sin 2x \cos^2 x$
2. Linéariser l'expression suivante : $P(x) = \cos x \cos^2 2x \cos^3 3x$.
   Réponse : $\dfrac{1}{32}(\cos 14x + \cos 12x + 2\cos 10x + 5\cos 8x + 4\cos 6x + 7\cos 4x + 9\cos 2x + 3)$

Exercice : 8

$(***)$ Linéariser $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Remarque : Ceci est une question régulièrement rencontrée dans les problèmes !

TECHNIQUE très UTILE : Factorisation par l'angle moitié.

Cette technique est TRES utilisée (ex : recherche de la forme trigonométrique d'un complexe).
Remarquons que :

$$\left\{\begin{array}{l} e^{ix}+e^{iy}=e^{\frac{i(x+y)}{2}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}}+e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right)=2e^{i\frac{x+y}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ e^{ix}-e^{iy}=e^{\frac{i(x+y)}{2}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}}-e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right)=2ie^{i\frac{x+y}{2}}\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{array}\right. \quad \forall x,\, y\in\mathbb{R}$$

Remarque 23. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on obtient :

1. $e^{ix}+1=e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}+e^{-\frac{ix}{2}}\right)=2e^{\frac{ix}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
2. $e^{ix}-1=e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right)=2ie^{\frac{ix}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

TECHNIQUE : Pour retrouver les formules trigonométriques :

L'exponentielle imaginaire et les formules précédentes permettent de retrouver facilement les formules usuelles de trigonométrie. Retrouver ainsi les formules suivantes :

1. $\sin p+\sin q=\dots$
2. $\cos a\sin b=\dots$
3. $\cos(a+b)=\dots$

`Exemple 4.` Sauriez-vous retrouver la formule de factorisation de $\sin p+\cos q$?

Les formules suivantes sont à connaître impérativement car elles permettent de retrouver la plupart des autres formules trigonométriques.

1. $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$
2. $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$
3. $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a.\tan b}$
4. $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2.\cos^2 a-1=1-2.\sin^2 a$
5. $\sin 2a=2\sin a.\cos a$
6. $\tan 2a=\dfrac{2.\tan a}{1-\tan^2 a}$

On obtient en posant $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$:

1. $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
2. $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$
3. $\tan\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$

`Exemple 5.` Calculer la somme $S_n=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots+\cos n\theta$

METHODE : Pour calculer des sommes trigonométriques :

En remarquant que $\left\{\begin{array}{l}\cos\theta=\mathrm{Re}(e^{i\theta})\\ \sin\theta=\mathrm{Im}(e^{i\theta})\end{array}\right.$ on peut parfois se ramener à une expression de la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a^k$.

Si $a\neq 1$ on peut alors utiliser la formule bien connue: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}a^k=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Pour simplifier le résultat obtenu et revenir à une expression réelle, on utilise la formule de factorisation par l'angle moitié et on extrait la partie réelle ou imaginaire.

Exercice : 9

(∗∗) Simplifier les expressions suivantes où a, b et θ sont des réels quelconques :

1. $S_1(\theta)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sin^3(k\theta)$
2. $S_2(a,\,b)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(a+kb)$

2.3 Argument d'un nombre complexe

Définition 7 : **Argument d'un nombre complexe**
Soit un nombre complexe z non-nul. Alors :

$$\text{Il existe un réel } \theta \text{ tel que} \quad : \quad z = |z|.e^{i\theta}$$

On dit que θ est un *argument* de z.

1. Les arguments de z sont tous égaux modulo 2π. Un argument quelconque sera noté $\arg(z)$.
2. Il existe un unique argument de z compris dans $[0, 2\pi[$. Cet argument sera noté $\mathrm{Arg}(z)$.
3. L'expression $z = |z|.e^{i\theta}$ obtenue est appelée *la forme trigonométrique* de z.

Preuve : On considère le complexe $Z = \dfrac{z}{|z|}$ et on applique la surjectivité du morphisme e.

Remarque 24. Réciproquement : que dire si $z = \lambda e^{i\theta}$?
Réponse : $z = \lambda.e^{i\theta}$ est la forme trigonométrique d'un complexe, uniquement lorsque $\lambda > 0$.
Dans le cas où $\lambda < 0$, on pourra penser à écrire : $\lambda = -\lambda e^{i\pi}$ (dans ce cas, $-\lambda > 0$).

`Exemple 6.` $(*)$ Déterminer le module et un argument du nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

`Exemple 7.` $(*)$ Mettre le complexe suivant sous forme trigonométrique : $z = 2\cos^2 a + i \sin 2a$ où $a \in [0; 2\pi]$.

Exercice : 10
$(*)$ Mettre sous forme trigonométrique le complexe suivant : $Z = \left(\dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}\right)^n$

Proposition 17 : **Caractérisation de l'égalité de deux complexes**
Soient z et z' deux complexes non nuls.
On a :
$$z = z' \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z')[2\pi] \end{cases}$$

Preuve 17 : Pas de difficulté.

Proposition 18 : Soient $\begin{cases} (z, z') \in \mathbb{C}^{*2} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$. On a alors : $\begin{cases} 1)\ \arg(z \times z') = \arg z + \arg z' \ [2\pi] \\ 2.\ \arg(z^n) = n.\arg(z) \ [2\pi] \\ 3)\ \arg(z^{-1}) = -\arg(z) \ [2\pi] \\ 4)\ \arg(z/z') = \arg z - \arg z' \ [2\pi] \end{cases}$

Preuve 18 : Pas de difficulté en utilisant la forme trigonométrique des complexes.

Remarque 25. Ces formules ressemblent de très près aux formules connues pour le logarithme népérien.

Proposition 19 : Interprétation géométrique
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan d'affixe $u, v \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $\arg(u) = (\vec{i}, \vec{u})\ [2\pi]$.
2. $\arg(\frac{u}{v}) = (\vec{v}, \vec{u})\ [2\pi]$.

Soient A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d. Alors :

1. $\arg(b-a) = (\vec{i}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$.
2. $\arg(\frac{b-a}{d-c}) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$.

Preuve 19 : On démontre que $\arg(u) = (\vec{i}, \vec{u})\ [2\pi]$ en remarquant que $u = |u|\cos(\arg(u)) + i|u|\sin(\arg(u))$.
Les autres résultats s'en déduisent facilement.

$\arg(z)$	$\arg(z-a)$	$\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$

`Exemple 8.` Déterminer une caractérisation complexe du cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R.

Proposition 20 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

1. $z \in \mathbb{R}^* \iff \arg(z) = 0\ [\pi]$.
2. $z \in \mathbb{R}^{+*} \iff \arg(z) = 0\ [2\pi]$.
3. $z \in \mathbb{R}^{-*} \iff \arg(z) = \pi\ [2\pi]$.
4. $z \in i\mathbb{R}^* \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
5. $z \in i\mathbb{R}^{+*} \iff \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
6. $z \in i\mathbb{R}^{-*} \iff \arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Preuve 20 : Pas de difficulté en utilisant l'interprétation géométrique de l'argument.

Caractérisation par l'argument

`Exemple 9.` $(*)$ Soient a et b deux complexes distincts.
A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point $f(M)$ d'affize $Z = \dfrac{z-a}{z-b}$.
Déterminer les ensembles suivants :

1. $f^{-1}(O_x)$
2. $f^{-1}(O_y)$
3. $f^{-1}(Cercle(O,1))$

Exercice : 11
$(**)$ Déterminer l'ensemble des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $\left(\dfrac{z}{z-1}\right)^6 \in \mathbb{R}$

Dans le plan complexe, on pourra éventuellement penser à utiliser les caractérisations suivantes :

1. Soient $\vec{u}(z)$ et $\vec{u}'(z')$ deux vecteurs non nuls du plan : $\begin{cases} \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ sont colinéaires} \iff \dfrac{z}{z'} \in \mathbb{R}^* \\ \vec{u} \text{ et } \vec{u}' \text{ sont orthogonaux} \iff \dfrac{z}{z'} \in i\mathbb{R}^* \end{cases}$
2. Soient $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan. A, B et C sont alignés $\iff \dfrac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}^*$

2.4 L'exponentielle complexe

Définition 8 : **Exponentielle complexe**
Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on définit l'exponentielle d'un complexe par la formule suivante :

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} \quad \text{(Attention aux différents sens de } e\text{)}$$

(Son module vaut e^a et son argument b).

Remarque 26. Soient $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. On a $e^z = e^{z'} \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')[2\pi] \end{cases}$.

Exercice : 12

$(*)$ On considère l'application $\exp : \begin{array}{ccc} (\mathbb{C},+) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,\times) \\ z & \mapsto & e^z \end{array}$.

1. Montrer que exp est un morphisme de groupes en prouvant que pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$: $\exp(z+z') = \exp(z).\exp(z')$.
2. Déterminer son noyau et son image.

Exercice : 13

$(**)$ Soit la fonction f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = e^z$.
Déterminer l'image des droites d'équations $x = a$ et $y = b$ par f.

Exercice : 14

$(*)$ Résoudre l'équation complexe $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.

3 Expression complexe des similitudes

.

Définition 9 :
Les similitudes, sont les transformations du plan qui multiplient les longueurs par un réel $k > 0$.
On démontre que les similitudes conservent les angles géométriques.

1. Si une similitude conserve les angles orientés, on dira qu'il s'agit d'une *similitude directe*.
2. Celles qui ne conservent pas les angles orientés (les autres !) sont appelées des *similitudes indirectes*.

Proposition 21 : ADMISE !! (pour l'instant ...)
Les similitudes directes sont : les translations, les homothéties, les rotations et toutes les composées que l'on peut obtenir en composant les transformations précédentes.

Proposition 22 :
Soit f une transformation du plan qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z'.
Soient $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 0$.

1. Toute similitude directe a une expression analytique complexe de la forme $\boxed{z'=az+b}$ avec $a \neq 0$.
2. Réciproquement, la transformation du plan définie par $z' = az + b$ avec $a \neq 0$ est une similitude directe.
   On obtient ses éléments caractéristiques de la façon suivante :
   (a) Si $a = 1$ alors f est une translation et b est l'affixe du vecteur de cette translation.
   (b) Sinon :
      i. On cherche le centre en recherchant l'unique point fixe.
      ii. le rapport est donné par $|a|$.
      iii. L'angle est donné par $\mathrm{Arg}(a)$.

Preuve 22 :

1. Soit f une similitude directe et $M'(z')$ l'image d'un point $M(z)$ par f.
   Montrons qu'il existe $a, b \in \mathbb{C}^2$ tels que $z' = az + b$.
   (a) On commence par traiter les cas des translations, des rotations et des homothéties.
   On montre ainsi que ces 3 transformations ont bien une expression analytique de le forme $z' = az+b$.
   (b) On montre alors qu'en les composant, on obtient encore une transformation de la forme $z' = az + b$.
2. Soit f la transformation du plan définie par $z' = az + b$.
   (a) Lorsque $a = 1$ on obtient une translation.
   (b) Sinon, on montre que f admet un unique point fixe $\Omega(\omega)$.
   On traduit alors le fait que $M' = f(M)$ en faisant intervenir ω.
   (c) On en déduit que f est alors la composée d'une homothétie et d'une rotation (de même centre !).
   C'est donc bien une similitude directe.

Corollaire 23 : Une similitude directe est soit une translation, soit la composée d'une rotation et d'une homothétie de **même centre** Ω appelé le *centre de la similitude.*

Preuve 23 : Immédiat !

Remarque 27. En résumé !! Soit la transformation $f \ : z \mapsto z'$ du plan définie par la relation : $z' = az + b$.

Si $a = 1$,	f	est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.
Si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$,	f	est une homothétie de rapport a et de centre l'unique point invariant.
Si $a = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0\ [2\pi]$,	f	est une rotation d'angle θ et de centre l'unique point invariant.
Si $a = k.e^{i\theta}$ avec $k \notin \{0; 1\}$,	f	est la composée d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie de rapport k de même centre (correspondant à l'unique point invariant).

`Exemple 10.` ($*$) Reconnaître la transformation du plan dont l'expression complexe est $z' = 2jz + 3i - 2$.

Proposition 24 : **Caractérisation de l'image d'un vecteur par une rotation**
Soient $\overrightarrow{u}$ d'affixe $u \in \mathbb{C}^*$, $\overrightarrow{v}$ d'affixe $v \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On a alors la caractérisation suivante :

$$\overrightarrow{v} \text{ est l'image de } \overrightarrow{u} \text{ par la rotation vectorielle d'angle } \theta \quad \Longleftrightarrow \quad v = e^{i\theta}u$$

Preuve 24 : Pas de difficulté !

`Exemple 11.` ($*$) Soit $ABCD$ un carré dont les sommets A et B sont à coordonnées entières.
Démontrer qu'il en est alors de même pour C et D.

Exercice : 15

($*$) On suppose connu le fait que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
Montrer qu'un triangle équilatéral ne peut avoir ses 3 sommets à coordonnées entières.

Exercice : 16

($**$) Soient u, v et w trois complexes de module 1 tels que $u + v + w = 0$.
Montrer que $u = jv = j^2w$ ou que $u = jw = j^2v$.

4 Résolution d'équations complexes

4.1 Extraction de racines carrées par résolution algébrique

Définition 10 : **Racines carrés d'un complexe**
On appelle racine carrée du nombre complexe $z = x + iy$ $\boxed{\text{tous}}$ les complexes $Z = X + iY$ vérifiant $Z^2 = z$.

Remarque 28. Ainsi dans $\mathbb{C}$, 4 admet 2 et -2 pour racines carrées.

Proposition 25 :
Rechercher les racines $Z = X + iY$ de $z = x + iy$ revient à résoudre le système : $\begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ XY \text{ du signe de y} \end{cases}$

Preuve 25 : On montre facilement que Z est une racine carrée de $z \iff \begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases}$.
On montre alors le résultat attendu en traitant indépendamment le sens direct et le sens indirect.

Remarque 29. Le système $\begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2+y^2} \\ XY \text{ du signe de y} \end{cases}$ est plus facile à résoudre que le système $\begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases}$

COROLLAIRE 26 :
Tout nombre complexe non nul admet donc 2 racines carrées distinctes opposées.

Preuve 26 : Déduction quasi-immédiate du théorème précédent.

Remarque 30. Comme il est impossible de distinguer a priori les 2 racines d'un complexe z (on sait seulement qu'elles sont opposées l'une à l'autre), la notation $\sqrt{z}$ n'a aucun sens et sera donc INTERDITE !!

`Exemple 12.` (∗) Rechercher les racines carrées des complexes : $z_1 = 7 - 24i$ et $z_2 = 4 - 3i$.

4.2 Extraction des racines carrées par résolution trigonométrique

Soit z un complexe non nul.

1. On écrit $z = r.e^{i\theta}$ avec $r > 0$.
2. On cherche Z sous la forme $Z = \rho e^{i\alpha}$ vérifiant $Z^2 = z$.
3. On trouve alors deux racines distinctes : $Z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $Z_2 = -Z_1$

`Exemple 13.` (∗) Trouver une racine carrée de $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$

Exercice : 17

(∗) En utilisant la résolution trigonométrique et algébrique de $z^2 = a$ (où a est un complexe bien choisi), déterminer les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

4.3 Equations du second degré.

Méthode de résolution de : $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$

1. On introduit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.
2. (a) si $\Delta = 0$, on trouve une unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$,

   (b) si $\Delta \neq 0$, on trouve deux solutions $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a} \\ z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a} \end{cases}$ où δ est une racine carrée complexe de Δ.

Preuve : Il suffit d'utiliser la décomposition canonique de $az^2 + bz + c$.

Remarque 31. Pour une équation de la forme $az^2 + 2b'z + c = 0$ on formera plutôt le *discriminant réduit* $\Delta' = b'^2 - ac$, et si δ' est une racine carrée de Δ', les deux solutions s'écrivent $z_1 = \dfrac{-b'-\delta'}{a}$, $z_2 = \dfrac{-b'+\delta'}{a}$.

Remarque 32. Maple peut résoudre des équations complexes grâce à la fonction "solve()".

`Exemple 14.` (∗) Résoudre l'équation complexe suivante : $z^2 - (5-4i)z + 3(1-3i) = 0$.

Exercice : 18

(∗)

1. Résoudre l'équation complexe : $z^2 - 2z(\cos u + i\sin u) + 2i\sin u(\cos u + i\sin u) = 0$ où $u \in]-\pi, \pi[$
2. Factoriser dans $\mathbb{C}$ l'expression polynômiale : $P(z) = z^3 + (1+3i)z^2 + (3i-2)z - 2$

Remarque 33. Lorsque les coefficients (a, b, c) sont réels, alors $\Delta \in \mathbb{R}$ et :

1. Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $\quad x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
2. Si $\Delta = 0$, il y a une racine double : $x = -\dfrac{b}{2a}$
3. $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$, il y a deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, $\quad z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Exercice : 19

Une équation de degré 2 complexe peut-elle avoir $\Delta \geq 0$ et des racines non réelles?

PROPOSITION 27 : **Equivalence entre "equation de degré 2" et "système"**
Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$.

Les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont les solutions du système $\begin{cases} z + z' = -\dfrac{b}{a} \\ z.z' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Preuve 27 : On appelle z_1 et z_2 les racines.
$\Rightarrow$ Il suffit d'utiliser les expressions formelles des racines
$\Leftarrow$ Il suffit de remarquer que z_1 et z_2 sont solution de $(z - z_1)(z - z_2) = 0$

Remarque 34. Ainsi, si $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1.z_2 = p \end{cases}$ alors z_1 et z_2 sont les solutions de $z^2 - sz + p = 0$.

Exercice : 20

$(**)$ Montrer (sans calculer les racines), que si A et B sont les images des solutions de l'équation $z^2-(2m+1)z+mi = 0$, (m étant un réel) alors les bissectrices des droites (OA) et (OB) ont des directions fixes (indépendantes de m).

4.4 Racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité

Soit un entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$.
Une racine n$^{\text{ième}}$ de l'unité est une solution de l'équation : $\quad z^n = 1$

PROPOSITION 28 : L'ensemble des racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité est :

$$U_n = \{1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1}\} \quad \text{où} \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

Preuve 28 : On les cherche sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ et l'on trouve exactement les n racines n$^{\text{ième}}$ distinctes :

$$U_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}};\ k \in [\![0,n-1]\!]\}$$

Remarque 35. Si on appelle A le point d'affine 1, on obtient les différents point d'affixes respectives $\omega, \ \ldots, \omega^{n-1}$ par rotation de A autour de O d'angles $\dfrac{2\pi}{n}, \ldots, \dfrac{2(n-1)\pi}{n}$.

Représentation graphique des racines 6$^{\text{ième}}$ de l'unité :

Remarque 36. Les racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité sont 2 à 2 conjuguées.

THÉORÈME 29 : **Groupe des racines de l'unité**
L'ensemble des racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité $(U_n, \times)$ est un groupe fini de cardinal n.

Preuve 29 : Il s'agit de prouver que cet ensemble est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$. Pour cela, on montre que :

1. Cet ensemble est bien inclus dans $\mathbb{C}^*$.
2. Cet ensemble contient 1, l'élément neutre de $(\mathbb{C}^*, \times)$.
3. Cet ensemble est stable par la multiplication.
4. Cet ensemble est stable par symétrisation.

THÉORÈME 30 : **La somme des racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité est nulle**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$$

Preuve 30 : Il suffit de faire le calcul ...

`Exemple 15.` $(*)$ Soit un entier relatif $p \in \mathbb{Z}$. Calculer la somme : $W_p = \sum_{u \in U_n} u^p$.

DÉFINITION 11 : On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on a les relations :

$$U_3 = \{1, j, j^2\}, \quad \text{avec} \quad 1 + j + j^2 = 0 \quad \text{et} \quad j^2 = \frac{1}{j} = \bar{j}$$

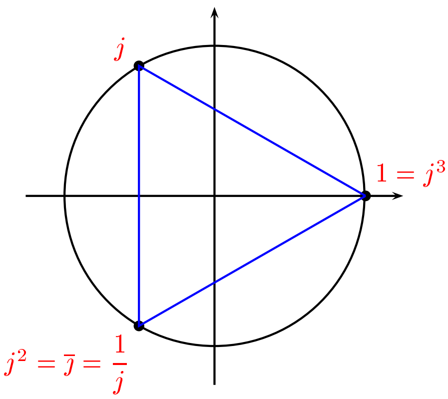

FIG. 1 – *racines cubiques de l'unité*

Exercice : 21

$(**)$ Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respectives a, b et c. Déterminer une CNS pour que ABC soit équilatéral.

Remarque 37.

Les racines carrées de l'unité sont :	1 et -1
Les racines cubiques de l'unité sont :	1, j et $\bar{j}$
Les racines quatrièmes de l'unité sont :	1, i, -1 et -i

Exercice : 22

$(**)$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^5 - (z+1)^5 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire les solutions de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
3. Calculer le produit de toutes les racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité.

4.5 Racines nièmes d'un nombre complexe

METHODE 1 : Recherche de la racine $\text{n}^{\text{ième}}$ d'un complexe

Soit un nombre complexe non nul $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$.
Chercher les racines $\text{n}^{\text{ième}}$ de z, c'est résoudre l'équation $Z^n = z$.
On cherchera les solutions Z sous la forme $Z = \rho e^{i\alpha}$.
On trouve alors n solutions distinctes.
En notant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, les solutions sont :

$$\mathcal{S} = \{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}\omega^k \ ; \ k \in \{0,n-1\}\}$$

Remarque 38. Lorsque $n > 2$, il est inutile d'envisager la recherche de racines nièmes en utilisant une méthode algébrique !!

Remarque 39. Si n est impair ($n = 2p+1$), alors les racines $\text{n}^{\text{ième}}$ de z sont aussi : $\mathcal{S} = \{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}\omega^k \ ; \ k \in [-p, p]\}$

METHODE 2 : Recherche de la racine $\text{n}^{\text{ième}}$ d'un complexe

Si z_0 est une racine nième de z, alors les racines $\text{n}^{\text{ième}}$ de z sont : $z_0, z_0\omega, z_0\omega^2, \ldots, z_0\omega^{n-1}$
où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Remarque 40. Les images des racines $\text{n}^{\text{ième}}$ d'un complexe forment un polygône régulier à n côtés, centré en O.

PROPOSITION 31 : La somme des racines $\text{n}^{\text{ième}}$ d'un complexe est nulle.

Preuve 31 : On calcule $z_0 + z_0\omega + z_0\omega^2 + \cdots + z_0\omega^{n-1} = \ldots$

`Exemple 16.` $(*)$ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8$.

`Exemple 17.` $(*)$ Déterminer les racines $4^{\text{ième}}$ de $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Exercice : 23

$(*)$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.
2. Calculer $(2+i)^6$.
   En déduire les racines sixièmes de $117 - 44i$, de $117 + 44i$ et de $44 + 117i$.
3. Sachant que $(2-i)^8 = -527 + 336i$, construire à l'aide d'une règle et d'un compas les images des huit racines huitièmes de $-527 + 336i$.