Les Coniques

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

15 novembre 2010

Dans ce chapitre, on se place dans le plan affine euclidien orienté $\mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 1 : **Coniques**
Soit F un point du plan et $\mathcal{D}$ une droite affine ne contenant pas D. Soit $e > 0$.
On appelle *conique* de *directrice* $\mathcal{D}$, de *foyer* F (situé à une distance δ de $\mathcal{D}$) et d'*excentricité* e, la courbe $\mathcal{C}$ formée des points M du plan vérifiant :

$$\frac{MF}{d(M, \mathcal{D})} = e$$

1. Si $0 < e < 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une *ellipse*
2. Si $e = 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une *parabole*
3. Si $e > 1$, on dit que $\mathcal{C}$ est une *hyperbole*

Remarque 1. $p = \delta.e$ est appelé le *paramètre* de la conique.

Définition d'une conique :

Exercice : 1

Soit D une droite du plan P et M un point non situé sur D.
Quel est l'ensemble des foyers des paraboles de directrice D passant par M ?

1 Equations cartésiennes réduites

On peut obtenir une équation cartésienne simple de la conique, en se placant dans un repère orthonormé $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ bien choisi. Pour déterminer ce repère, on commencera par rechercher l'équation cartésienne de $\mathcal{E}$ dans le repère $\mathcal{R}(F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ dans lequel la directrice admet une équation de la forme $x = \delta$ avec $\delta > 0$.

1.1 Parabole : $e = 1$

Soit $\mathcal{P}$ la parabole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$.
On appelle $p = e\delta = \delta$ le *paramètre* de la parabole.

Etude :

On constate que l'équation la plus simple est obtenue lorsque :
1. l'on choisit O à mi-distance entre le foyer F et la directrice $\mathcal{D}$
2. l'on inverse le sens de $\overrightarrow{i}$.

Théorème 1 : Dans le repère définit précédemment :
1. Le foyer F a pour coordonnées $F(\frac{p}{2}, 0)$
2. La directrice $\mathcal{D}$ a pour équation $x = -\frac{p}{2}$
3. La parabole $\mathcal{P}$ a pour équation : $\boxed{y^2 = 2px}$ et pour équations paramétriques : $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^2}{2p} \\ y(t) = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

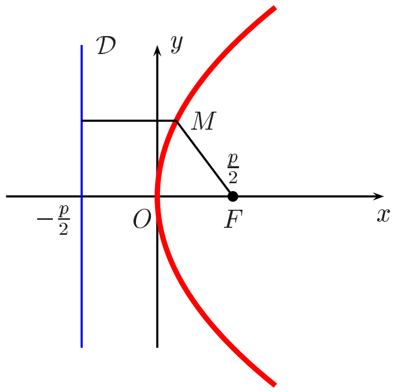

Fig. 1 – *Parabole* $y^2 = 2px$

`Exemple 1.` Placer la directrice et le foyer de la parabole d'équation $y = x^2$.

Proposition 2 : **Tangente (règle de dédoublement des termes)**
La tangente en $M_0(x_0, y_0)$ à la parabole d'équation $y^2 = 2px$ a pour équation $y.y_0 = p(x + x_0)$.

Preuve 2 : On détermine l'équation de la tangente à l'aide des équations paramétriques.

Exercice : 2

Montrer que les rayons lumineux arrivant sur l'intérieur d'une parabole parallèlement à l'axe focal convergent tous au niveau du foyer.

1.2 Ellipse : $0 < e < 1$

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'exentricité e.

Etude :

On constate que l'équation la plus simple est obtenue lorsque l'on choisit le centre du repère O à une distance $c = \dfrac{\delta e^2}{1 - e^2}$ et à gauche du foyer F.

Théorème 3 : **Equation réduite d'une ellipse :**

1. Dans le repère défini précédemment, l'ellipse $\mathcal{E}$ admet une équation cartésienne de la forme

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \quad \text{avec} \quad 0<b<a$$

2. Réciproquement, la courbe d'équation cartésienne $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (avec $0<b<a$) est une ellipse :

   (a) Foyer $\begin{cases} F(c,\,0) \\ c=\sqrt{a^2-b^2} \end{cases}$ (b) Directrice $\mathcal{D}\ : x=\frac{a^2}{c}$ (c) Excentricité $e=\frac{c}{a}$

Preuve 3 :

1. La condition nécessaire est démontrée lors de l'étude visant à simplifier l'équation cartésienne.
2. Pour la réciproque, il suffit de montrer que pour tout a et b tels que $0<b<a$, on peut définir, une valeur e, un point F et une droite $\mathcal{D}$ tels que l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ soit équivalente à la condition de définition d'une ellipse.

Remarque 2. Dans le repère défini précédemment, $\mathcal{E}$ admet pour équations paramétriques : $\begin{cases} x(t)=a\cos t \\ y(t)=b\sin t \end{cases}$, $t\in[0,2\pi[$.

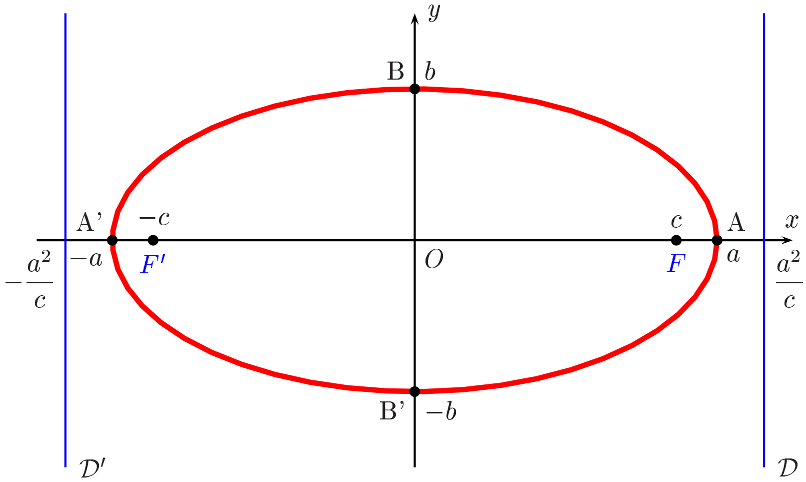

Fig. 2 – *Ellipse :* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Proposition 4 : **Eléments caractéristiques d'une ellipse**

Soit $\mathcal{E}$ l'ellipse d'équation $\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$ dans le repère orthonormal $\mathcal{R}(O,\,\vec{i},\,\vec{j})$ avec $0<b<a$.

1. O_x et O_y sont deux axes de symétries de $\mathcal{E}$. Le point O est centre de symétrie appelé *centre* de l'ellipse.
2. On pose $\boxed{c=\sqrt{a^2-b^2}}$.

   $\mathcal{E}$ admet donc deux foyers $\boxed{F(c,\,0) \text{ et } F'(-c,\,0)}$ de directrices associées $\boxed{\mathcal{D}\ : x=\frac{a^2}{c} \text{ et } \mathcal{D}'\ : x=-\frac{a^2}{c}}$.
3. Les intersections de $\mathcal{E}$ avec les axes sont appelés les *sommets* de l'ellipse.
   Les sommets ont pour coordonnées : $\boxed{A(a,\,0),\ A'(-a,0),\ B(0,\,b) \text{ et } B'(0,\,-b)}$.
4. $O_x=(FF')$ est appelé *l'axe focal* ou encore *le grand axe* de l'ellipse.
5. $\mathcal{E}$ admet pour excentricité $\boxed{e=\frac{c}{a}}$ et pour paramètre $\boxed{p=\frac{b^2}{a}}$.

Preuve 4 : A quelque chose près, il s'agit d'un résumé des résultats obtenus dans le théorème précédent.

`Exemple 2.` Déterminer les éléments caractéristiques de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{5^2} + \dfrac{y^2}{3^2} = 1$.

Remarque 3. Dans le cas où $\mathcal{E}$ admet une d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $0 < a < b$ on se ramène au cas précédent par rotation du repère d'un angle de $\dfrac{\pi}{2}$. $\mathcal{E}$ est alors une ellipse mais orientée cette fois selon O_y.

Remarque 4. Un cercle $\left\{\begin{array}{l}\text{de centre } \Omega \\ \text{de rayon } R\end{array}\right.$ est un cas limite d'ellipse avec $\left\{\begin{array}{l} a = b = R \\ c = 0\ (F = F' = \Omega) \\ e = 0 \end{array}\right.$ et la directrice est à l'infinie.

Exercice : 3

Soit $\mathcal{A}$, l'affinité orthogonale d'axe O_x et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$.
Déterminer la nature de l'image d'un cercle par cette affinité.

Proposition 5 : **Equation de la tangente en $M_0(x_0, y_0)$**

La tangente en $M_0(x_0, y_0)$ à l'ellipse $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ admet pour équation cartésienne $\boxed{\dfrac{x_0}{a^2}x + \dfrac{y_0}{b^2}y = 1}$

Preuve 5 : On utilise la représentation paramétrique.

Remarque 5. Cette équation se retient grâce à la règle de dédoublement des termes.

Proposition 6 : **Equation bifocale d'une ellipse**
Soient F et F' deux points du plan tels que $FF' < 2a$. On a alors :

$$\mathcal{E} = \{M \mid FM + F'M = 2a\} \quad \text{est} \quad \text{l'ellipse de foyer } \left\{\begin{array}{l} F \\ F' \end{array}\right. \quad \text{telle que } AA' = 2a$$

Preuve 6 : On caractérise l'ensemble des points M vérifiant $FM+F'M = 2a$ à l'aide d'une équation cartésienne dans le repère de centre le milieu de $[FF']$ et d'axe $O_x = (F'F)$.
On pourra mener les calculs de la façon suivante :

1. Montrer que $FM + F'M = 2a \Longleftrightarrow (MF^2 + MF'^2 - 4a^2)^2 = 4MF^2MF'^2$
2. Calculer $MF^2 + MF'^2$ et $MF^2MF'^2$.
3. Finir le calcul ...

Exercice : 4

La tangente en un point quelconque M d'une ellipse $\mathcal{E}$ est perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Remarque 6. Cela explique pourquoi, dans une station de métro parisienne où le plafond a une section elliptique, deux poinçonneurs situés de part et d'autre du quai au niveau des foyers pouvaient se parler sans élever la voix.

Exercice : 5

Déterminez la nature de la projection orthogonale d'un cercle $\mathcal{C}$ de l'espace sur un plan $\mathcal{P}$.

Méthode :
Commençons par bien choisir le repère dans lequel on se place.
Notons Π le plan contenant le cercle, O le centre du cercle et R sont rayon.
On considère alors le repère orthonormal $\mathcal{R}(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ où :

1. Ω est le projeté orthogonal de O sur $\mathcal{P} \cap \Pi$
2. $\overrightarrow{i}$ dirige la droite $\mathcal{P} \cap \Pi$
3. $\overrightarrow{j}$ tel que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ soit une base orthonormale de $\mathcal{P}$

On définit alors $\overrightarrow{u}$ de façon que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{u})$ forme une base orthonormale du plan Π. Notons θ l'angle $(\widehat{\overrightarrow{j}, \overrightarrow{u}})$.
Si O est le centre du cercle, $\mathcal{C}$ admet alors pour représentation paramétrique $\overrightarrow{OM} = R\cos t.\overrightarrow{i} + R\sin t.\overrightarrow{u}$. En notant O' et M' les projetés orthogonaux respectifs de O et M sur $\mathcal{P}$, on obtient :

$$\overrightarrow{O'M'} = R\cos t.\overrightarrow{i} + R\sin t\cos\theta.\overrightarrow{j}$$

Dans $\mathcal{R}'(O', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le projeté de $\mathcal{C}$ admet donc pour représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = R.\cos t \\ y = R.\cos\theta\sin t \end{array}\right.$.
Il ne reste plus qu'à interpréter ce résultat !

1.3 Hyperbole : $e > 1$

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole de foyer F, de directrice $\mathcal{D}$ et d'exentricité e.

<u>Etude</u> :

On constate que l'équation la plus simple est obtenue lorsque l'on choisit le centre du repère O à droite et à une distance $c = \dfrac{\delta.e^2}{e^2-1}$ du foyer F.

Théorème 7 : **Equation réduite d'une hyperbole :**

1. Dans le repère orthonormal précédemment défini, $\mathcal{H}$ admet une équation cartésienne de la forme

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{l} 0 < b \\ 0 < a \end{array}\right.$$

2. Réciproquement, la courbe d'équation cartésienne $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (avec $\left\{\begin{array}{l} 0 < b \\ 0 < a \end{array}\right.$) est une hyperbole de :

   (a) Foyer : $\left\{\begin{array}{l} F(-c, 0) \\ c = \sqrt{a^2+b^2} \end{array}\right.$ (b) Directrice : $\mathcal{D} : x = -\dfrac{a^2}{c}$ (c) Excentricité : $e = \dfrac{c}{a}$

Preuve 7 : Même principe que pour l'ellipse.

Remarque 7. Dans le repère défini précédemment :

1. l'une des branches de $\mathcal{H}$ admet pour équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = a\,\mathrm{ch}\,t \\ y(t) = b\,\mathrm{sh}\,t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.
2. l'autre branche de $\mathcal{H}$ admet pour équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = -a\,\mathrm{ch}\,t \\ y(t) = b\,\mathrm{sh}\,t \end{array}\right.$, $t \in \mathbb{R}$.

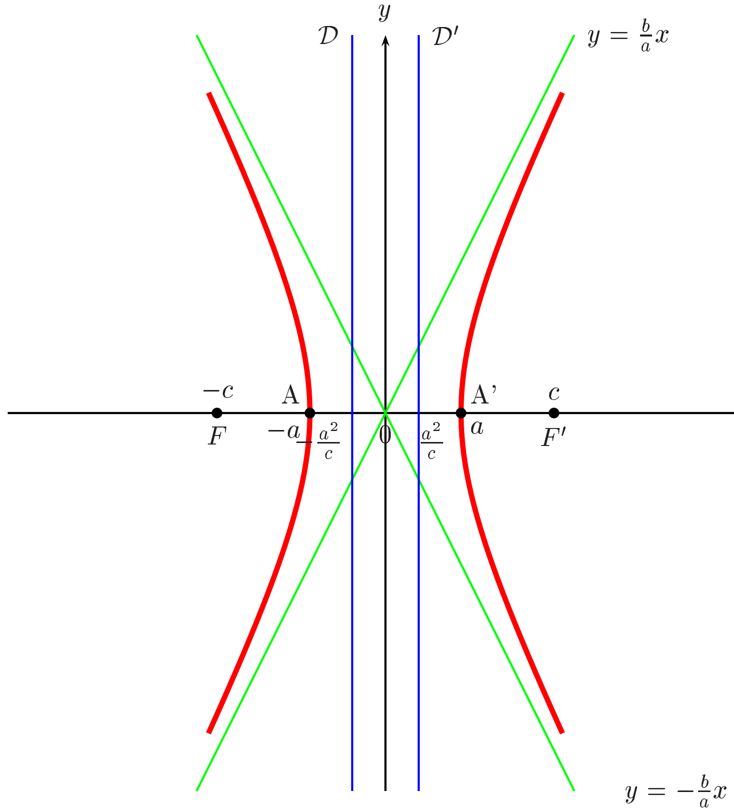

FIG. 3 – *Hyperbole* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

PROPOSITION 8 : **Eléments caractéristiques d'une hyperbole**

Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole d'équation $\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$ dans le repère orthonormal $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\left\{ \begin{array}{l} 0 < a \\ 0 < b \end{array} \right.$.

1. O_x et O_y sont deux axes de symétries de $\mathcal{H}$.
   Le point O est centre de symétrie de $\mathcal{H}$ et est appelé le *centre* de l'hyperbole.

2. On pose $\boxed{c = \sqrt{a^2 + b^2}}$.

   $\mathcal{H}$ admet donc deux foyers $\boxed{F(-c, 0) \text{ et } F'(c, 0)}$ de directrices associées $\boxed{\mathcal{D} \ : x = -\frac{a^2}{c} \text{ et } \mathcal{D}' \ : x = \frac{a^2}{c}}$.

3. $O_x = (FF')$ est appelé *l'axe focal* de l'hyperbole.
   Les intersections de $\mathcal{H}$ avec l'axe focal sont appelés les *sommets* de l'hyperbole.
   Ces sommets ont pour coordonnées $\boxed{A(-a, 0) \text{ et } A'(a, 0)}$.
   On a $\mathcal{H} \cap O_y = \emptyset$.

4. L'hyperbole admet 2 asymptotes d'équations : $\boxed{\Delta \ : y = \frac{b}{a}x \quad \Delta' \ : y = -\frac{b}{a}x}$

5. L'excentricité de l'hyperbole est $\boxed{e = \frac{c}{a}}$ et le paramètre est $\boxed{p = \frac{b^2}{a}}$

Preuve 8 : A quelque chose près, il s'agit d'un résumé des résultats obtenus dans le théorème précédent.

Remarque 8. **Moyen mnémotechnique**
On retrouve facilement les équations des asymptotes "en disant" que 1 devient négligeable devant les autres termes.

`Exemple 3.` Déterminer les éléments caractéristiques de l'hyperbole d'équation $\frac{y^2}{5^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1$.

Exercice : 6
On connaît un foyer F et les deux sommets A et A' d'une hyperbole.
Construire les asymptotes de cette hyperbole.

Théorème 9 : **Equation cartésienne d'une hyperbole dans le repère défini par ses asymptotes**
$\mathcal{H}$ est une hyperbole ssi il existe un repère (non orthonormé en général) dans lequel $\mathcal{H}$ admet une équation de la forme $XY = 1$.
Les axes de ce repère correspondent aux asymptotes de l'hyperbole.

Preuve 9 :
CN : On montre qu'on passe de l'équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ à l'équation $XY = 1$ par changement de repère.
CS : Soit $\mathcal{C}$: $xy = 1$ dans $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
On se place alors dans $\mathcal{R}'(O, \overrightarrow{I}, \overrightarrow{J})$ tel que $\overrightarrow{I}$ et $\overrightarrow{J}$ soient normés et dirigent les asymptotes.

Théorème 10 : **Hyperbole équilatère**
On dit que l'hyperbole est *équilatère* lorsque les asymptotes sont orthogonales.

Une hyperbole est équilatère si et seulement si $\boxed{e = \sqrt{2}}$ et si et seulement si $\boxed{a = b}$ dans son équation réduite..

Dans ce cas, ses asymptotes ont pour équation : $\boxed{\Delta\ : y = x \quad \Delta'\ : y = -x}$

Preuve 10 : Un petit raisonnement facile par équivalences.

Proposition 11 : **Equation de la tangente en un point** $M_0(x_0,\, y_0)$

La tangente en M_0 à l'hyperbole $\mathcal{H}$: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ admet pour équation cartésienne $\boxed{\dfrac{x_0}{a^2}x - \dfrac{y_0}{b^2}y = 1}$

Preuve 11 : Avec les équations paramétriques.

Proposition 12 : **Equation bifocale d'une hyperbole**
Soient F et F' deux points du plan tels que $FF' > 2a$ avec $a > 0$. On a alors :

$$\mathcal{H} = \{M \mid |FM - F'M| = 2a\} \quad \text{est} \quad \text{l'hyperbole de foyer} \left\{\begin{array}{l} F \\ F' \end{array}\right. \text{ telle que } AA' = 2a$$

Preuve 12 : On caractérise l'ensemble des points M vérifiant $|FM - F'M| = 2a$ à l'aide d'une équation cartésienne dans le repère de centre le milieu de $[FF']$ et d'axe $O_x = (FF')$.
Attention, les calculs doivent être menés avec perspicacité ...

Remarque 9. Chacune des deux relations $\left\{\begin{array}{l} FM - F'M = 2a \\ F'M - FM = 2a \end{array}\right.$ caractérise une branche différente de l'hyperbole.

Exercice : 7

La tangente en un point quelconque M d'une hyperbole $\mathcal{H}$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{FMF'}$.

Exercice : 8
Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les cercles de centres respectifs Ω_1 et Ω_2 et de rayons respectifs R_1 et R_2 strictement positifs.
1. Déterminer la nature du lieu $\mathcal{H}$ des centres des cercles tangents extérieurement à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
2. Si $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux cercles d'équation respectives $(x-2)^2+y^2 = 4$ et $x^2+(y-1)^2 = 1$, déterminer une équation cartésienne de $\mathcal{H}$.

2 Equation polaire d'une conique de foyer O

On se place dans le repère orthonormé $\boxed{\mathcal{R} = (F, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})}$ dans lequel la directrice $\mathcal{D}$ admet pour équation : $\mathcal{D} : x = \delta > 0$

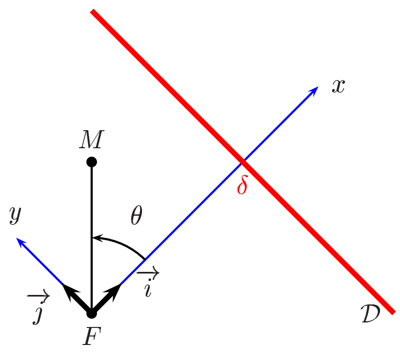

Fig. 4 – *Repère pour l'équation polaire d'une conique*

Théorème 13 : **Equation polaire d'une conique**
Dans le répère précédent, la conique $\mathcal{C}$ admet pour équation polaire :

$$\boxed{\rho = \frac{p}{1+e\cos\theta}} \quad \text{où} \quad \boxed{p = e\delta} \quad \text{est le } \textit{paramètre} \text{ de la conique.}$$

Preuve 13 : Il suffit de traduire la définition de la conique à l'aide de ρ et θ.
On montre alors que les deux équations possibles représentent le même ensemble de points.

`Exemple 4.` Donner la nature, l'excentricité et les sommets des coniques d'équations polaires :

1. $\rho = \dfrac{2}{1+2\cos\theta}$
2. $\rho = \dfrac{1}{2+\cos\theta}$
3. $\rho = \dfrac{1}{1+\sin\theta}$

`Exemple 5.` Sauriez-vous retrouver les éléments caractéristiques d'une conique d'équation polaire $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$?

Exercice : 9

Tracer la conique d'équation polaire $\rho = \dfrac{3}{1+2\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$.

Théorème 14 : **Tangente en un point d'une conique**
Pour $\theta \neq 0[\pi]$, l'angle V que fait la tangente à la conique au point de coordonnées polaires (ρ, θ) avec $\vec{u}(\theta)$ vérifie :

$$\tan V = \frac{1+e\cos\theta}{e\sin\theta}$$

Preuve 14 : Application de la formule vue dans la partie concernant les équations polaires de courbe.

Exercice : 10

Soit Γ la conique d'équation polaire $\rho = \dfrac{p}{1+e\cos\theta}$ dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Quelle est l'équation polaire de la tangente à Γ au point de paramètre θ_0 ?
2. Déterminer l'équation polaire de la directrice qui définit la conique.
3. En déduire que la portion de tangente entre le point de contact et la directrice est vue du foyer sous un angle droit.

3 Coniques définies par une équation cartésienne

`Exemple 6.` Etude de quelques courbes d'équation cartésienne de la forme : $ax^2 + by^2 + cx + dy + f = 0$.
Donner la nature des courbes d'équations cartésiennes suivantes :

1. $5x^2 + y^2 - 10x + 4y + 4 = 0$
2. $x^2 - 4y^2 + 4x + 8y - 4 = 0$
3. $2x^2 + y^2 + 4x + 6y + 12 = 0$
4. $y^2 + 3x + 6y + 1 = 0$
5. $x^2 + 6x + 1 = 0$

Maple
```
> with(plots):
> implicitplot(x^2+3*x*y-2*y^2-5*x+y-3,x=-5..5,y=-5..5);
```

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère maintenant l'ensemble Γ des points dont les coordonnées vérifient une relation plus générale de la forme :

$$\boxed{ax^2 + \boxed{2bxy} + cy^2 + dx + ey + f = 0} \quad \text{où} \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

`Exemple 7.` L'objectif est d'étudier la courbe $\mathcal{C}$ d'équation : $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$

1. Changer le centre du repère de façon à obtenir une équation sans terme de degré 1.
2. Effectuer une rotation du repère afin d'obtenir une équation sans terme en xy.
3. Tracer la courbe $\mathcal{C}$.

3.1 Etude théorique

3.1.1 Préliminaire

Définition 2 : **Partie quadratique de l'équation :** $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$

1. La *partie quadratique* d'une équation polynômiale de la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ est la fonction :
$$f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$$
2. On appelle *matrice de la partie quadratique* la matrice $Q = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.
3. Le déterminant de la partie quadratique est alors : $\det Q = \begin{vmatrix} a & b \\ b & c \end{vmatrix}$.
4. La trace de la partie quadratique est alors la somme des coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}(Q) = a + c$.

Lemme 15 : **Elimination du terme xy par rotation des vecteurs de base.**
Soit $\mathcal{C}$ une courbe d'équation cartésienne : $a.x^2 + 2b.xy + c.y^2 + F = 0$ avec $F \in \mathbb{R}$.

1. Si $a \neq c$:

   Dans le repère obtenu par rotation d'un angle φ tel que $\boxed{\tan 2\varphi = \dfrac{2b}{a-c} \quad \text{et} \quad \varphi \in]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}[}$

   la courbe $\mathcal{C}$ admet une équation de la forme $\boxed{AX^2 + CY^2 + F = 0}$ avec $\begin{cases} AC = ac - b^2 \\ A + C = a + c \\ A - C \text{ du signe de } a - c \end{cases}$

2. Si $a = c$:

   Dans le repère obtenu par rotation d'un angle $\boxed{\varphi = \dfrac{\pi}{4}}$, $\mathcal{C}$ admet une équation de la forme :

$$\boxed{AX^2 + CY^2 + F = 0}$$

   On obtient alors A et C par un calcul direct.

Preuve 15 :
1. On cherche l'expression de $a.x^2 + 2b.xy + c.y^2$ dans le nouveau repère, puis on détermine φ de façon à annuler le terme en XY.
2. Pour déterminer alors AC et $A - C$, il faut effectuer les calculs en étant patient et très vigilant ...

Remarque 10.
$\begin{cases} AC = ac - b^2 \\ A + C = a + c \end{cases}$ signifient que $\begin{cases} \text{le déterminant} \\ \text{la trace} \end{cases}$ de la partie quadratique sont invariants par rot° du repère.

1. Ces deux relations impliquent que A et C sont les solutions de $X^2 - (A + C)X + AC = 0$
2. Le signe de $A - C$ permet de déterminer quelle racine est A et quelle racine est C.

`Exemple 8.` Nature et éléments caractéristiques de la courbe d'équation cartésienne : $3x^2 + 4xy - y^2 = 2$?

3.1.2 Etude de Γ d'équation cartésienne $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ avec $b \neq 0$.

Point de départ : Elimination des termes de degré 1 en x et y par changement de centre

Il s'agit de rechercher l'existence d'un point $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ tel que l'équation de Γ dans le repère $\mathcal{R}(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ n'admette pas de terme de degré 1 en x et y.

PROPOSITION 16 : **Elimination des termes de degré 1 :**
Les points Ω tels que l'équation de Γ soit de la forme $aX^2 + 2bXY + cY^2 + F = 0$ dans le repère $\mathcal{R}(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ sont les solutions du système d'équations :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \end{cases} \quad \text{où} \quad f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$$

Les points Ω obtenus sont alors centres de symétrie de Γ.

Preuve 16 : On recherche l'équation de Γ dans le repère $\mathcal{R}(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ et on regarde à quelles conditions cette équation n'admet pas de termes de degré 1.

3 cas apparaissent selon la nullité de $\det Q = ac - b^2$ et l'existence de centres de symétrie :

1. $\det Q \neq 0$.

   Dans ce cas, le point Ω existe et est unique.

   Dans le repère $\mathcal{R}(\Omega, \vec{i}, \vec{i})$ Γ a pour nouvelle équation $aX^2 + 2bXY + cY^2 + F = 0$ avec $\boxed{F = f(x_\Omega, y_\Omega)}$.

   On peut effectuer une rotation du repère d'angle φ dans lequel $\mathcal{C}$ admet une équation de la forme $\boxed{AX^2 + CY^2 + F = 0}$.

   - Si $a = c$, on prendra $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ et on posera les formules de changement de repères
   - Si $a \neq c$, on prendra $\varphi \in]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}]$ tel que $\boxed{\tan 2\varphi = \dfrac{2b}{a - c}}$.

     On trouve A et C en remarquant que : $\begin{cases} AC = ac - b^2 \\ A + C = a + c \\ A - C \text{ du signe de } a - c \end{cases}$.

   Dans ce cas :

   (a) Si $\det < 0$ alors Γ est soit la réunion de 2 droites sécantes, soit une hyperbole.
   On dira que Γ est de *type* "hyperbole".

   (b) Si $\det Q > 0$ alors Γ est soit vide, soit un point, soit un cercle, soit une ellipse.
   On dira que Γ est de *type* "ellipse".

Exercice : 11

Le plan étant munis d'un rond, étudier la courbe d'équation cartésienne : $x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + 6y + 1 = 0$.

2. **$\det Q = 0$ et il existe une infinité de points de symétrie Ω.**

   Dans ce cas, on choisit un centre qui convient et on obtient une équation de la forme $aX^2 + 2bXY + cY^2 + F = 0$.
   Comme $\det Q = 0$, on peut factoriser la forme quadratique.
   Comme $a \neq 0$ (à justifier !), on obtient $a(X + \frac{b}{a}Y)^2 + F = 0$.

   Remarque : On peut alors effectuer un changement de repère (ici non normé !) tel que : $\begin{cases} X' = X + \frac{b}{a}Y \\ Y' = -\frac{b}{a}X + Y \end{cases}$

   Γ admet alors une équation cartésienne de la forme : $X'^2 = F/a$.

   Ainsi, Γ est soit l'ensemble vide, soit une droite, soit deux droites parallèles.

Exercice : 12

Le plan étant munis d'un rond, étudier la courbe d'équation cartésienne : $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$.

3. **$\det Q = 0$ et Ω n'existe pas.**

   Dans ce cas, on factorise directement la forme quadratique et on obtient : $a(x + \frac{b}{a}y)^2 + dx + ey + f = 0$.
   On peut alors effectuer le même changement de repère que précédemment.
   Γ admet alors une équation cartésienne de la forme : $aX^2 + hX + iY + j = 0$.

   (a) Si $i \neq 0$:
   Alors, l'équation cartésienne devient : $Y = -\frac{1}{i}(aX^2 + hX + j)$.
   Γ est alors une parabole.

   (b) Si $i = 0$:
   On vérifie facilement que Γ est soit $\emptyset$, soit une droite, soit deux droites parallèles.

Exercice : 13

Le plan étant munis d'un rond, étudier la courbe d'équation cartésienne : $x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y + 1 = 0$.

Remarque 11. $\det Q = ac - b^2$ nous permet donc d'effectuer une classification des courbes du second degré.

Théorème 17 : Soit Γ une courbe d'équation : $ax^2 + 2.bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ (avec $b \neq 0$).

1. Si $ac - b^2 = 0$ alors Γ est soit vide, soit une droite, soit la réunion de 2 droites parallèles, soit une parabole.
2. Si $ac - b^2 < 0$ alors Γ est soit la réunion de 2 droites sécantes, soit une hyperbole.
3. Si $ac - b^2 > 0$ alors Γ est soit vide, soit un point, soit un cercle, soit une ellipse.

Preuve 17 : Ces résultats découlent directement de l'étude précédente.

$\det Q = 0$ $(AC = 0)$	$\det Q < 0$ $(AC < 0)$	$\det Q > 0$ $(AC > 0)$

Classification des courbes selon le signe de $\det Q = ac - b^2$

Remarque 12. Dans le cas où $\det Q \neq 0$, il est possible de déterminer la nature et l'excentricité de Γ sans avoir besoin de calculer l'angle φ. Le calcul de cet angle est cependant nécessaire lorsqu'on demande de tracer Γ et/ou ses éléments caractéristiques.

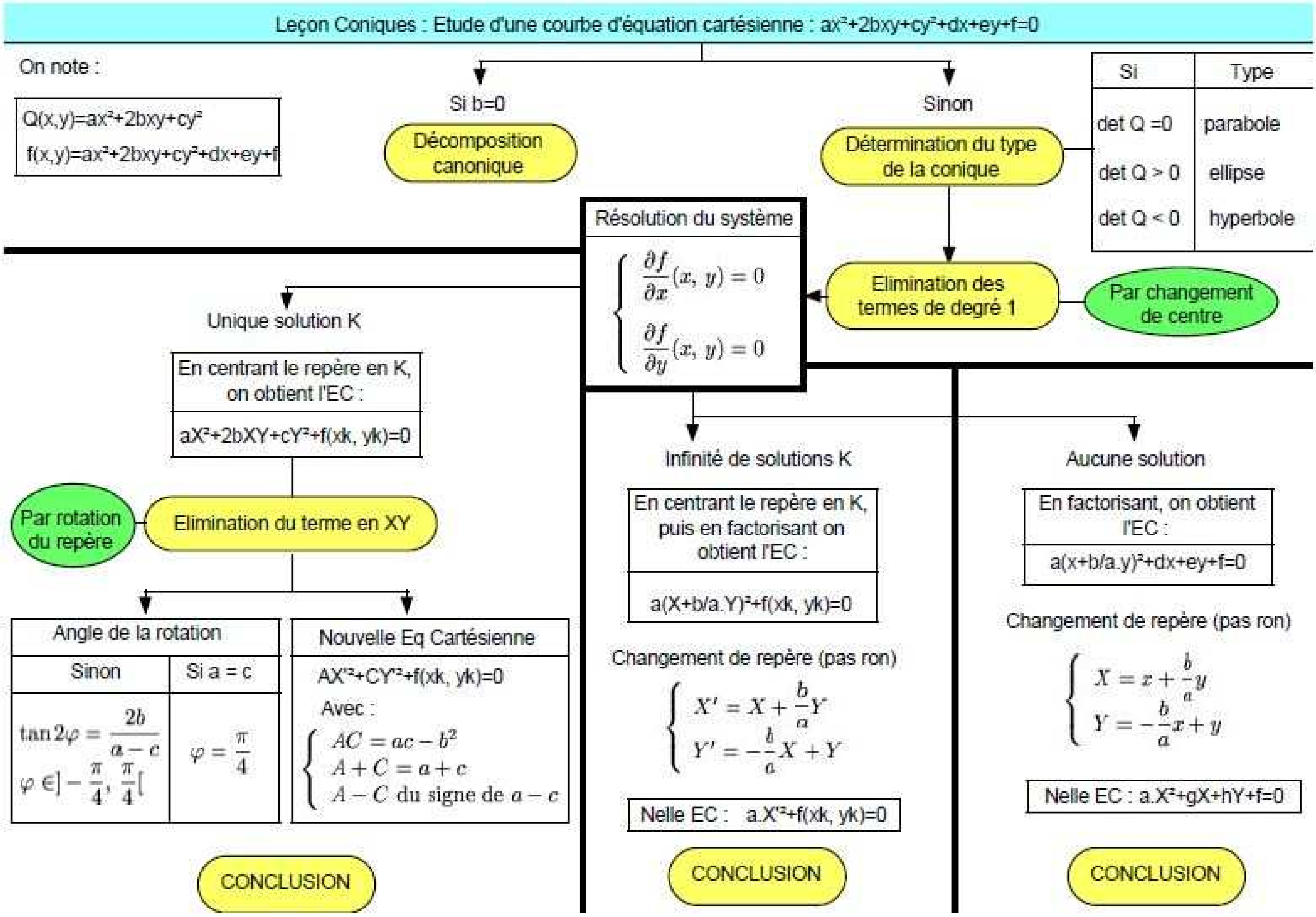

FIG. 5 – *Procédure d'étude d'une courbe de degré 2*

3.2 Exemples

`Exemple 9.` Donner la nature et si possible l'excentricité des courbes définies par les équations suivantes :

1. $xy = 4$
2. $2x^2 + 3xy + y^2 - 4x - 5y = 0$
3. $x^2 - 2xy + y^2 - 3x - 3y + 5 = 0$

Exercice : 14

Tracer la courbe d'équation cartésienne suivante après avoir déterminer sa nature et ses éléments caractéristiques.

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2(1 + \sqrt{2})x + 2(1 - \sqrt{2})y + 1 + 2\sqrt{2} = 0$$

Exercice : 15

1. Déterminer une équation cartésienne de la conique $\mathcal{C}$ de foyer F de coordonnées $(2, 1)$, de directrice (D) d'équation $x = 5$ et d'excentricité $e = \dfrac{2}{3}$.
2. Préciser son centre et en donner une équation réduite.
3. Déterminer les sommets, le second foyer et la seconde directrice de $\mathcal{C}$.