Géométrie élémentaire de l'espace

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

12 octobre 2010

Nous avons vu que dans le plan orienté, l'angle entre deux vecteurs était défini à 2π près.
Dans l'espace en revanche, Il n'est pas possible d'attribuer un signe à l'angle de deux vecteurs. Ceux-ci seront donc des angles géométriques (donc positifs) que l'on pourra choisir appartenant à $[0, \pi]$. Ainsi, contrairement au plan, le cosinus d'une angle de deux vecteurs de l'espace suffit à déterminer la valeur de cet angle.

1 Repérage dans l'espace

1.1 Coordonnées cartésiennes d'un point

Comme dans le plan, on considérera deux espaces : l'*espace affine* dont les éléments sont des points et l'*espace vectoriel* dont les éléments sont des vecteurs.

Théorème Fondamental 1 : **Base de l'espace vectoriel**
Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs de l'espace, non nuls et non coplanaires.
Alors pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan, il existe trois uniques réels x, y et z tels que : $\overrightarrow{u} = x.\overrightarrow{i} + y.\overrightarrow{j} + z.\overrightarrow{k}$.

On dit que $\overrightarrow{u}$ s'exprime de façon unique comme *combinaison linéaire* de $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$.

1. Le triplet $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est appelée *base* de l'espace vectoriel.
2. Si $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont *normés* (de norme 1), on dit que la base $\mathcal{B}$ est normée.
3. Si $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont deux à deux *orthogonaux*, on dit que la base $\mathcal{B}$ est orthogonale.
4. Si $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ sont normés et orthogonaux, on dit que la base $\mathcal{B}$ est orthononormée.

On dit que la base $\mathcal{B}$ est *directe* si elle vérifie la *règle des 3 doigts* ou celle du *tire-bouchon*.
On dit alors que (x, y, z) sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$ dans la base $\mathcal{B}$.

Règle des 3 doigts :

DÉFINITION 1 : **Repère de l'espace affine**
Soit O un point du plan, et $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de l'espace vectoriel.
Le point O et la base $\mathcal{B}$ forment un *repère* de l'espace affine et on note $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$.
O est appelé le *centre* du repère et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont les *vecteurs de base.*

THÉORÈME 2 : Soit M un point quelconque de l'espace munis d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Alors il existe un unique triplet de réels x, y et z tels que : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.

1. x, y et z sont appelées les *coordonnées* de M dans $\mathcal{R}$.
2. x est appelée l'*abscisse* de M
3. y est appelée l'*ordonnée* de M
4. z est appelée la *côte* de M

On note $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ ou plus simplement $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur le repère utilisé.
La notation $M(x, y, z)$ sera parfois aussi utilisée.

Preuve 2 : Conséquence du premier théorème ...

Remarque 1. On peut identifier l'ensemble $\mathbb{R}^3$ à l'espace affine muni d'un repère orthonormal ou à l'espace vectoriel muni d'une base orthonormale.

Remarque 2. On retrouve les formules de changement de repère en écrivant : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$. (comme dans le plan)

1.2 Coordonnées cylindriques d'un point

L'espace affine est ici muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$.

Dessin

Coordonnées cylindriques d'un point

THÉORÈME 3 : **Coordonnées cylindriques**
Soit $M(x, y, z) \neq O$.
On appelle *coordonnées cylindriques* de M dans le repère $\mathcal{R}$, tout triplet $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = r(\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}) + z\,\vec{k} \quad \text{on a alors} \quad \boxed{\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ z = z \end{cases}}$$

Les valeurs (r, φ) définies par $\begin{cases} r = OH \\ \varphi = \widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OH})} \end{cases}$ où H est le projeté orthogonal de M sur O_{xy}, conviennent.

Remarque 3.

1. Attention, l'angle φ est parfois appelé θ.
2. Il n'y a pas unicité des coordonnées cylindriques.
3. En cylindriques, un cylindre de révolution autour de O_z admet pour équation : $r = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

1.3 Coordonnées sphériques d'un point

L'espace affine est ici muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$.

Dessin

Coordonnées sphériques d'un point.

Théorème 4 : Soit $M(x, y, z) \neq O$.
On appelle *coordonnées sphériques* de M dans le repère $\mathcal{R}$, tout triplet $(\rho, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \rho \sin\theta(\cos\varphi \overrightarrow{i} + \sin\varphi \overrightarrow{j}) + \rho \sin\theta \overrightarrow{k} \quad \text{on a alors} \quad \boxed{\begin{cases} x = \rho \sin\theta \cos\varphi \\ y = \rho \sin\theta \sin\varphi \\ z = \rho . \cos\theta \end{cases}}$$

Les valeurs (ρ, φ, θ) définies par $\begin{cases} \rho = OM \\ \varphi = (\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH}}) \\ \theta = (\widehat{\overrightarrow{k}, \overrightarrow{OM}}) \end{cases}$ où H est le projeté orthogonal de M sur O_{xy}, conviennent.

Remarque 4.

1. φ est appelé la longitude du point M
2. θ est appelé la colatitude du point M
3. Il n'y a pas unicité des coordonnées sphériques.
4. En coordonnées sphériques, une sphère de centre O admet pour équation : $\rho = a$ où $a \in \mathbb{R}$.

2 Le Produit Scalaire dans l'espace

Dans l'espace, le produit scalaire de deux vecteurs se définit comme dans le plan :

- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||. \cos(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls.
- $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ si l'un des 2 vecteurs est nul.

Comme pour le produit scalaire du plan, il vérifie aussi les propriétés de symétrie et de bilinéarité.
Nous avons aussi la caractérisation usuelle : $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux $\Longleftrightarrow \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$.

Proposition 5 : **Expression du produit scalaire dans une base orthonormale**

Si l'espace vectoriel est muni d'une bon $\mathcal{B}$. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x.x' + y.y' + z.z'}$$

Preuve 5 : Il suffit de décomposer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la bon $\mathcal{B}$ et d'utiliser la bilinéarité du produit scalaire.

Remarque 5. Comme dans le plan, nous avons donc la relation : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}}$.

Proposition 6 : **Distance entre deux points**

Soient deux points $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ dans un repère orthonormal.
La distance AB s'exprime alors par :

$$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Preuve 6 : Immédiat.

Remarque 6. Attention à ne pas utiliser cette formule si le repère n'est pas orthonormé.

3 Le Produit Vectoriel

Définition 2 : **Produit vectoriel**

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Le produit vectoriel de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ (noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$) est :

1. le vecteur nul si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires.
2. le vecteur $\left\{\begin{array}{l}\text{de norme } ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.|\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})| \\ \textbf{directement} \text{ orthogonal à } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v}\end{array}\right.$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires.

Remarque 7. Attention :

1. le produit vectoriel de deux vecteurs est un autre vecteur. (contrairement au produit scalaire qui donne un réel)
2. le produit vectoriel de deux vecteurs du plan n'a aucun sens.

Remarque 8.

1. $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}||$ est l'aire du parallélogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
2. Si $\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v}$ alors $||\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||$

Dessin

Remarque 9. Dans le cas où $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont non colinéaires, le triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ forme une base directe de l'espace vectoriel. Il est donc facile de construire une bon directe :

1. On choisit un vecteur $\overrightarrow{u}$ normé.
2. On choisit un vecteur $\overrightarrow{v}$ normé et orthogonal à $\overrightarrow{u}$.
3. Le triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})$ forme alors une bon directe.

Proposition 7 : Soient $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{k}$ trois vecteurs non coplanaires de l'espace.

$$\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right) \text{ est une base orthonormée directe } \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \end{cases}$$

Preuve 7 : Le vecteur $\overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j}$ est un vecteur de norme 1 directement orthogonal à $\overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{j}$. C'est donc $\overrightarrow{k}$.

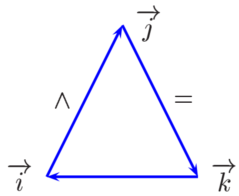


Fig. 1 – *Permutation des vecteurs dans une bon directe*

Remarque 10. Que dire de la réciproque de ce théorème ?

Théorème Fondamental 8 : **Caractérisation de la colinéarité de deux vecteurs**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires } \iff \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$$

Preuve 8 : Immédiat compte-tenu de la définition.

Proposition 9 : Le produit vectoriel de deux vecteurs de l'espace admet les propriétés suivantes.
Pour tous réels λ et μ et pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

1. Antisymétrie : $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{u}$
2. Bilinéarité : $\begin{cases} (\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}) \wedge \overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{v} \\ \overrightarrow{u} \wedge (\lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{b} \end{cases}$

Preuve 9 :
1. L'anti-symétrie est immédiate compte-tenu de la définition.
2. La bilinéarité se démontre en montrant que l'application $\overrightarrow{v} \mapsto \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est la composée d'une projection, d'une homothétie de rapport $\|\overrightarrow{u}\|$ et d'une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

Théorème 10 : **Coordonnées du produit vectoriel de deux vecteurs**
Lorsque l'espace est muni d'une $\boxed{\text{base orthonormée directe}}$.
Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}(x, y, z)$ et $\overrightarrow{v}(x', y', z')$.
Le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ admet alors pour coordonnées :

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y.z' - z.y' \\ z.x' - x.z' \\ x.y' - y.x' \end{pmatrix}$$

Preuve 10 : Il suffit de décomposer les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la bon directe et d'effectuer le calcul.

Méthode de calcul des coordonnées d'un produit vectoriel :

`Exemple 1.` Dans une bon $\mathcal{B}$ directe de l'espace vectoriel.

1. Pour $\vec{u}(1, 2, -1)$ et $\vec{v}(0, 3, -1)$, calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.
2. Construire une bon directe $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ telle que $\vec{u}$ soit colinéaire à $\vec{s}(4, 0, -3)$.
3. Construire une bon directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ telle que $\mathrm{Vect}(\vec{i}, \vec{j}) = \mathrm{Vect}(\vec{u}(1, 2, 3), \vec{v}(1, 0, -2))$.

Théorème 11 : **Formule de dévoloppement d'un double produit vectoriel**
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On a alors :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = (\vec{u}.\vec{w})\vec{v} - (\vec{u}.\vec{v})\vec{w}$$

Preuve 11 : On peut effectuer le calcul analytiquement dans une bon directe bien choisie !

Théorème 12 : **Carcatérisation de la colinéarité de deux vecteurs dans une base quelconque**
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ dans une $\boxed{\text{base quelconque}}$. On a alors :

$$\vec{u} \quad \text{colinéaire à} \quad \vec{v} \iff \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = 0$$

Preuve 12 : On calcule $\vec{u} \wedge \vec{v}$ dans la base quelconque puis on montre que $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ ssi les coefficients des 3 vecteurs obtenus sont nuls. Attention : la fin de la démonstration nécessite l'utilisation du produit mixte.

4 Produit Mixte (ou déterminant)

Définition 3 : **Définition du Produit Mixte**
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
On définit le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ par :

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \wedge \vec{v}).\vec{w}}$$

Remarque 11.

1. $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est un nombre réel.
2. $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ représente le volume du parallélépidède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.
3. Inutile de préciser pourquoi $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$ est appelé le produit mixte de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ...

Dessin

Proposition 13 : Produit Mixte et coplanarité
Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan. On a :

$$\vec{u},\ \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires } \iff [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$$

Preuve 13 : Conséquence immédiate de la définition.

Remarque 12.

1. Si A, B, C et D sont quatre points du plan, alors : A, B, C et D sont coplanaires $\iff [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] = 0$
2. Si deux des 3 vecteurs sont colinéaires (et donc en particulier égaux), alors le produit mixte est nul.

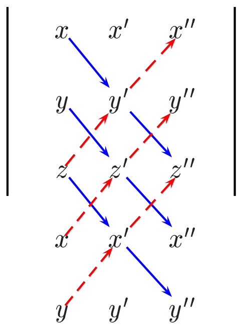
Exercice : 1
Montrer que si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base, alors $(\vec{i} \wedge \vec{j}, \vec{j} \wedge \vec{k}, \vec{k} \wedge \vec{i})$ en est aussi une.

Proposition 14 : Calcul du Produit Mixte dans une base orthonormale directe

Si le plan vectorielle est muni d'une $\boxed{\text{bon directe}}$ $\mathcal{B}$. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Alors :

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - xz'y'' - yx'z''} = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} \quad \text{(notation)}$$



Calcul du produit mixte par la règle de Sarrus :

Autre calcul du produit mixte :

Preuve 14 : Il suffit d'effectuer le calcul en exprimant les vecteurs dans la bond.

`Exemple 2.` Dans l'espace est muni d'une bon directe, calculer le produit mixte de $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$.

PROPOSITION 15 : Le déterminant de trois vecteurs admet les 3 propriétés suivantes.

1. Antisymétrie : Le déterminant change de signe si on échange les positions de deux vecteurs
2. Trilinéarité : Le déterminant est linéaire par rapport aux trois variables.
   On a par exemple : $[\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{b}, \overrightarrow{w}] = \lambda[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}, \overrightarrow{w}] + \mu[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{w}]$
3. Invariance par permutation circulaire : $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = [\overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = [\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}, \overrightarrow{u}]$
   Et donc : $(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}).\overrightarrow{w} = (\overrightarrow{w}\wedge\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w}).\overrightarrow{u}$

Preuve 15 :
1. L'antisymétrie est facile compte-tenu de la formule du déterminant dans une bon directe.
2. La trilinéarité se déduit facilement de la définition du déterminant.
3. Il suffit d'utiliser la formule de calcul dans une bond.

`Exemple 3.` **Identité de Lagrange**
En utilisant la définition, puis en utilisant la formule du double produit vectoriel, démontrer que :

$$\|\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}\|^2 + (\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2.\|\overrightarrow{v}\|^2$$

THÉORÈME FONDAMENTAL 16 : **Caractérisation de la coplanarité dans une base quelconque**
Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ dans une base quelconque $\mathcal{B} = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Alors :

$$\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \text{ sont coplanaires} \iff \begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix} = 0$$

Preuve 16 : On démontre facilement (à l'aide de l'antisymétrie et de la trilinéarité) que :

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}] = \begin{vmatrix}x & x' & x''\\ y & y' & y''\\ z & z' & z''\end{vmatrix}.\det(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$$

`Exemple 4.` Dans l'espace muni d'un repère quelconque, dire si les quatres points $A(1,\ -2,\ 0)$, $B(0,\ 0,\ 3)$, $C(2,\ 4,\ 1)$ et $D(-2,\ 2,\ 1)$ sont coplanaires.

5 Les plans affines

Un plan $\mathcal{P}$ peut être défini de différentes façons :
1. Soit par un point A et deux vecteurs non liés $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$. (deux vecteurs directeurs)
2. Soit par 3 points (A, B, C) non alignés.
3. Soit par un point A et un vecteur normal $\overrightarrow{n}$.

Obtention d'une équation cartésienne

cas 1 *dans un repère quelconque*

Si le plan affine est défini par un point $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{vmatrix}$, et deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}_1\begin{vmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{u}_2\begin{vmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{vmatrix}$.

On obtient une équation cartésienne en remarquant que :

$$M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathcal{P} \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}) \text{ coplanaires } \iff \begin{vmatrix} x-x_A & a_1 & a_2 \\ y-y_A & b_1 & b_2 \\ z-z_A & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

cas 2 *dans un repère quelconque*

Si le plan affine est défini par trois points $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{vmatrix}$, $B\begin{vmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{vmatrix}$ et $C\begin{vmatrix} x_C \\ y_C \\ z_C \end{vmatrix}$ non-alignés.

On obtient une équation cartésienne en remarquant que :

$$M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathcal{P} \iff (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \text{ coplanaires } \iff \begin{vmatrix} x-x_A & x_B-x_A & x_C-x_A \\ y-y_A & y_B-y_A & y_C-y_A \\ z-z_A & z_B-z_A & z_C-z_A \end{vmatrix} = 0$$

cas 3 : *Uniquement si le repère est orthonormé*

Si le plan affine est défini par un point $A\begin{vmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{vmatrix}$, et un vecteur normal $\overrightarrow{n}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ non nul.

On obtient une équation cartésienne en remarquant que :

$$M\begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \in \mathcal{P} \iff \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{n} \iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0 \iff a.(x-x_A) + b.(y-y_A) + c.(z-z_A) = 0$$

Remarque 13.

1. On dira que 2 plans affines sont parallèles ssi leurs vecteurs normaux le sont ou ssi leurs 4 vecteurs directeurs sont coplanaires.
2. On dira que 2 plans affines sont perpendiculaires ssi leurs vecteurs normaux le sont.

Proposition 17 : **Equations cartésiennes d'un plan**

Les propriétés suivantes sont valables quelque soit le repère choisi :

1. Tout plan de l'espace admet une équation cartésienne de la forme : $ax + by + cz + d = 0$.
2. Tout plan de vecteurs directeurs $\begin{cases} \overrightarrow{u}_1(a_1, b_1, c_1) \\ \overrightarrow{u}_2(a_2, b_2, c_2) \end{cases}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$
3. Si $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ alors $\mathcal{P} = \{M(x, y, z) \mid ax + by + cz + d = 0\}$ est un plan dont l'ensemble des vecteurs directeurs admet pour équation cartésienne : $ax + by + cz = 0$.
4. 2 plans affines sont parallèles si et seulement si dans leurs équations cartésiennes, les coefficients de x, y et z sont proportionnels.
5. 2 équations cartésiennes d'un même plan affine $\mathcal{P}$ sont proportionnelles.

Preuve 17 : Par soucis de temps, on se dispensera de prouver ces différentes propriétés.

`Exemple 5.` Soit $\mathcal{P}\ :\ z = x + y + 1$.
1. Expliquer pourquoi $\mathcal{P}$ est un plan.
2. Déterminer une équation en coordonnées cylindriques, puis sphériques de $\mathcal{P}$.
3. Donner deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

PROPOSITION 18 : **Vecteur normal à un plan**
Lorsque le repère est orthonormé, on a l'équivalence suivante :

un plan $\mathcal{P}$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$
si et seulement si
il est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}(a,\, b,\, c)$.

$\overrightarrow{n}$ est alors appelé *vecteur normal* au plan.

Preuve 18 : On mq la relation $ax + by + cz + d = 0$ est équivalente à une relation de la forme $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} = 0$.

`Exemple 6.` Dans l'espace muni d'un ron, montrer que les plans $\begin{cases} \mathcal{P}\ :\ 3x - y + z - 3 = 0 \\ \mathcal{P}'\ :\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ sont perpendiculaires.

Exercice : 2

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z = 1$ dans un repère orthonormé (direct).
1. Déterminer un repère orthonormé direct $\mathcal{R}(\Omega,\, \overrightarrow{I},\, \overrightarrow{J},\, \overrightarrow{K})$ tel que $\begin{cases} \Omega = \mathcal{P} \cap (O_z) \\ \overrightarrow{I} \text{ et } \overrightarrow{J} \text{ dirigent } \mathcal{P} \end{cases}$
2. Déterminer les formules de changement de repère.

DÉFINITION 4 : **Équations paramétriques (EP) d'un plan affine**
Soit $\mathcal{P}$ le plan affine passant par $A(a,\, b,\, c)$ et de vecteur directeur $\begin{cases} \overrightarrow{u_1}(\alpha_1,\, \beta_1,\, \gamma_1) \\ \overrightarrow{u_2}(\alpha_2,\, \beta_2,\, \gamma_2) \end{cases}$.
Alors :

$$M(x,\, y,\, z) \in \mathcal{P} \iff \exists \lambda,\, \mu \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = a + \lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \\ y = b + \lambda\beta_1 + \mu\beta_2 \\ z = c + \lambda\gamma_1 + \mu\gamma_2 \end{cases}$$

Le système obtenu est appelé *équations paramétriques* de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{R}$. λ et μ sont les paramètres.

Remarque 14.
1. On obtient une EC d'un plan $\mathcal{P}$ à partir des EP en éliminant les paramètres λ et μ.
2. On obtient des EP d'un plan $\mathcal{P}$ à partir d'une EC en posant le système $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{cases}$ (si $a \neq 0$).

`Exemple 7.` Choisir deux plans sur lesquels appliquer les méthodes précédentes.

6 Les droites affines

On suppose ici encore l'espace muni d'un repère quelconque.

Une droite $\mathcal{D}$ de l'espace peut être définie par :
1. Soit 2 points $(A,\, B)$.
2. Soit un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ non nul.

DÉFINITION 5 : **Équations paramétriques d'une droite affine**
Soit $\mathcal{D}$ la droite affine passant par $A(a,\, b,\, c)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(\alpha,\, \beta,\, \gamma)$.
Alors :

$$M(x,\, y,\, z) \in \mathcal{D} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = a + \lambda\alpha \\ y = b + \lambda\beta \\ z = c + \lambda\gamma \end{cases}$$

Le système obtenu est appelé *équations paramétriques* de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}$. λ est le paramètre.

DÉFINITION 6 : **Système d'équations cartésiennes d'une droite affine**
Une droite $\mathcal{D}$ peut être décrite comme intersection de deux plans non parallèles et donc par deux équations de plans. Le système obtenu est appelé *système d'équations cartésiennes* de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{R}$.

Remarque 15.

1. On obtient un système d'équations cartésiennes à partir des équations paramétriques en éliminant le paramètre.
2. On obtient un système d'équations paramétriques à partir d'un système d'équations cartésiennes en choisissant l'une des coordonnées comme paramètre.
3. Il n'y a pas unicité des équations cartésiennes définissant une droite de l'espace.

`Exemple 8.` Choisir une droite sur laquelle appliquer les méthodes précédentes.

PROPOSITION 19 : **Vecteur directeur d'une droite donnée par un système d'équations cartésiennes**

Soit une droite $\mathcal{D}$ donnée par un système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$.

On obtient directement un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ par : $\boxed{\vec{n} = \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{vmatrix}}$

Preuve 19 :

1. Cas où le repère est orthonormé :
   Un vecteur directeur de la droite intersection de deux plans doit être perpendiculaire aux vecteurs normaux aux deux plans.
2. Cas d'un repère quelconque : on admettra le résultat car la démonstration fait apparaître trop de cas !

`Exemple 9.`
Déterminer un vecteur directeur de la droite définie par le système d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 2x-y+z+2=0 \end{cases}$.

Remarque 16. Pour les calculs d'intersections entre droites et plans, on a intérêt à choisir une représentation cartésienne pour un des sous-espaces et une représentation paramétrique pour l'autre.

`Exemple 10.` Déterminer l'intersection du plan passant par $\begin{cases} A(1,\ 2{,}0) \\ B(0,\ -1,\ 3) \\ C(1,\ 1,\ -1) \end{cases}$ et la droite $\begin{cases} \text{passant par } D(2,\ 0,\ 1) \\ \text{dirigée par } \vec{u}(1,\ -1,\ -1) \end{cases}$.

PROPOSITION 20 : Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites affines de l'espace.
Si $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles, alors il existe une unique droite Δ sécante et perpendiculaire à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

Preuve 20 :

1. Méthode 1 : On cherche $M = A + \lambda\vec{u}$ et $M' = A' + \mu\vec{u}'$ tels que $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}$ et $\overrightarrow{MM'} \perp \vec{u}'$.
2. Méthode 2 : Par analyse/synthèse
   Une telle droite doit nécessairement appartenir aux plans $\begin{cases} \mathcal{P} = A + \mathrm{Vect}(\vec{u},\ \vec{w}) \\ \mathcal{P}' = A' + \mathrm{Vect}(\vec{u}',\ \vec{w}) \end{cases}$ avec $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$.
   Réciproquement ...

Pour déterminer la perpendiculaire commune à deux droites (dans un rond)

1. Méthode 1 :
   (a) On recherche des équations paramétriques des deux droites
   (b) On recherche alors un point M et un point M' sur chacune des droites de telle façon que $\overrightarrow{MM'}$ soit perpendiculaire à chacune des deux droites.
   (c) On obtient alors un système de deux équations à deux inconnues qui admet un unique couple de solutions d'après le théorème précédent.

2. Méthode 2 : la plus rapide !!
   On recherche des équations cartésiennes des plans $\begin{cases} \mathcal{P} = A + \text{Vect}(\vec{u}, \vec{w}) \\ \mathcal{P}' = A' + \text{Vect}(\vec{u}', \vec{w}) \end{cases}$ avec $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{u}'$.

`Exemple 11.` Déterminer la perpendiculaire commune aux deux droites suivantes :
D_1 : passant par $A(1,0,\ 0)$ et dirigée par $\vec{u}(1,\ -1,\ 1)$
D_2 : passant par $B(0,0,\ 0)$ et dirigée par $\vec{v}(1,\ 1,\ 1)$

Exercice : 3

Soit l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé direct.

1. Déterminer l'intersection du plan affine d'équation cartésienne : $(\mathcal{P})$ $x + y - z + 1 = 0$ et de la droite affine $(\mathcal{D})$ passant par le point $A(1,1,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(4,\ 3,\ 1)$.

2. On considère les deux plans affines d'équations $\begin{cases} \mathcal{P} : x + y + z - 1 = 0 \\ \mathcal{P}' : x - y + z = 0 \end{cases}$.
   Déterminer une équation paramétrée de la droite affine $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$.

3. Montrer que les plans $\mathcal{P} : \begin{cases} x = 2 + \lambda + 2\mu \\ y = 2 + 2\lambda + \mu \\ z = 1 - \lambda - \mu \end{cases}$ et $\mathcal{P}' : \begin{cases} x = 1 + 3u - v \\ y = 3 + 3u + v \\ z = 1 - 2u \end{cases}$ sont identiques.

4. Soient $A(1,\ 0,\ -1)$, $B(1,\ 1,\ 2)$ et $C(2,\ 1,\ 1)$.
   Ces points sont-ils alignés ? Si non, déterminer une équation du plan $\mathcal{P}$.

5. Soit $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y + z - 1 = 0$.
   Montrer que la droite passant par $A(2,\ 2,\ 1)$ et $B(3,\ 0,\ 1)$ est parallèle à $\mathcal{P}$.

6. Les points $A(1,\ 2{,}1)$, $B(3,\ 0,\ -1)$, $C(2,\ -1,\ 1)$ et $D(2,\ 3,\ -1)$ sont-ils coplanaires ?

7. Soit $\mathcal{D} = \begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$.
   Déterminer la droite $\mathcal{D}'$ passant par $A(1,\ 0,\ 1)$ et parallèle à $\mathcal{D}$ et le plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{D}$ et A.

8. Soit $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y + z - 4 = 0$ et $\mathcal{D}$ la droite passant par $A(2,\ 2,\ 2)$ et dirigée par $\vec{v}(1,\ -1,\ 1)$.
   Montrer qu'il existe une unique droite de $\mathcal{P}$ parallèle à $\mathcal{D}$ et passant par $B(1,\ 1,\ 1)$.

9. Soient $\mathcal{D}$: $\begin{cases} x + 2y = 2 \\ 2y + z = 4 \end{cases}$ et $\mathcal{D}' = A + \text{Vect}(\vec{v})$ avec $A(2,\ 1,\ -1)$ et $\vec{v}(3,\ 1,\ -1)$. Soit $B(1,\ 0,\ 2)$.
   (a) $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles sécantes ?
   (b) Montrer qu'il existe une unique droite (à déterminer) passant par B et sécante à la fois à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

7 Distance d'un point à une droite ou à un plan

Dans toute cette partie, on considère l'espace muni d'un repère orthonormé direct.

DÉFINITION 7 : **Distance entre deux parties**
Soit A et B deux parties de l'espace affine.
Lorsque $\{MN \mid M \in A \text{ et } N \in B\}$ admet un plus petit élément, cet élément est appelé la *distance entre A et B*. On a alors :

$$d(A,\, B) = \min_{(M,\ N)\in A\times B} MN$$

7.1 Distance d'un point à un plan dans l'espace

THÉORÈME 21 : **Formule de base**
Soient $\mathcal{P}$ est le plan passant par le point A et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{n}$. Soit M est un point de l'espace.
Alors

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}}$$

Preuve 21 : On commence par prouver que $d(M,\, \mathcal{P}) = HM$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.
Il suffit alors d'effectuer le calcul de $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}$ en introduisant le point H.

Distance d'un point à un plan

COROLLAIRE 22 : **Formule 1**
Soient $\mathcal{P}$ est le plan passant par les trois points A, B, C non-alignés, et M est un point de l'espace.
Alors

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = \frac{|[\overrightarrow{AM},\, \overrightarrow{AB},\, \overrightarrow{AC}]|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}}$$

Preuve 22 : Il suffit d'appliquer la formule de base en remarquant que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Remarque 17. Dans le cas où le plan est défini par un point A et deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on pourra appliquer la formule suivante :

$$d(M,\mathcal{P}) = \frac{|[\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}]|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}$$

COROLLAIRE 23 : **Formule 2**
Soit $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ un plan affine et $M(x,\, y,\, z)$ un point de l'espace.
Alors :

$$\boxed{d(M,\mathcal{P}) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}}$$

Preuve 23 : Il suffit d'appliquer la formule de base ...

Remarque 18. On reconnait une formule semblable à celle obtenue dans le plan pour la distance d'un point à une droite.

PROPOSITION 24 : **Equation normale d'un plan**
On munit l'espace d'un rond $\mathcal{R}(O,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$.
Tout plan $(\mathcal{P})$ admet une équation cartésienne unique de la forme :

$$\boxed{a.x + b.y + cz = e} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} e \geq 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{array} \right.$$

1. Cette équation est appelée l'*équation normale* de $\mathcal{P}$
2. Interprétation géométrique des paramètres :
   (a) e représente la distance de O à $(\mathcal{P})$
   (b) $(a,\, b,\, c)$ représente les coordonnées d'un vecteur orthogonal à $(\mathcal{P})$

Preuve 24 : On montre que parmi toutes les équations cartésiennes de $(\mathcal{D})$ $(\lambda.ax + \lambda.by + \lambda.bz = \lambda c)$ une seule est de la forme voulue.

Interprétation angulaire de l'équation normale à un plan

`Exemple 12.` Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $2x - y + z - 3 = 0$ dans un repère orthonormal direct. Déterminer les angles que fait un vecteur normal de $\mathcal{P}$ avec les trois vecteurs de base.

Exercice : 4

1. Soient $A(1,\, 1,\, 0)$, $B(2,\, 1,\, 3)$, $C(0,\, 1,\, 1)$ et $D(-1,\, 3,\, 2)$.
   Déterminer la hauteur du tétraèdre de base ABC et de sommet D.
2. Déterminez la distance de la droite $\left\{ \begin{array}{l} \text{passant par } A(1,\, 1,\, 1) \\ \text{dirigée par } \overrightarrow{u}(0,\, 3,\, -1) \end{array} \right.$ au plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + y + 3z - 1 = 0$.

7.2 Distance d'un point à une droite dans l'espace

THÉORÈME 25 : **Formule**

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A dirigée par $\overrightarrow{u}$ et M un point de l'espace. Alors $\boxed{d(M,\mathcal{D}) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|}{\|\overrightarrow{u}\|}}$.

Distance d'un point à une droite

Preuve 25 : On commence par montrer que $d(M, \mathcal{D}) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$. Puis, on peut effectuer un calcul direct de $\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{u}\|$ en introduisant le point H.

`Exemple 13.` Calculer la distance de $A(0,\ 1,\ 0)$ à la droite d'équations $\left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ x + y + z = 0 \end{array}\right.$.

Exercice : 5

Dans l'espace, déterminer l'ensemble des points à égale distance des deux points $A(1,\ 2,\ 1)$ et $B(0,\ 1,\ 1)$. Cet ensemble est le *plan médiateur* du segment $[A,\ B]$.

7.3 Distance d'une droite à une autre droite de l'espace

Théorème 26 : **distance entre deux droites non coplanaires**

Soient $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{D} = A + \operatorname{Vect} u \\ \mathcal{D}' = A' + \operatorname{Vect} u' \end{array}\right.$ deux droites non coplanaires de l'espace. On a alors :

$$d(\mathcal{D},\ \mathcal{D}') = \frac{|[\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}]|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{u'}\|}$$

Preuve 26 : Nous avons vu que deux droites non coplanaires admettaient une perpendiculaire commune. Notons H et H' les intersections de cette droite respectivement avec $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

1. On commence par montrer que $d(\mathcal{D},\ \mathcal{D}') = HH'$.
   Pour cela, si $M \in \mathcal{D}$ et $M' \in \mathcal{D}'$, on remarquera que $MM'^2 = HH'^2 + \|\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{H'M'}\|^2$.
2. Puis, on en déduit le résultat en introduisant H et H' dans le calcul de $|[\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u'}]|$

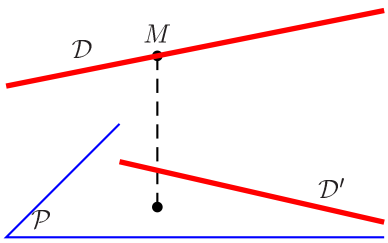


Fig. 2 – *Distance entre deux droites de l'espace*

Remarque 19. Remarquons ainsi que $d(\mathcal{D},\ \mathcal{D}') = d(M,\ \mathcal{P})$ où $\left\{\begin{array}{l} M \text{ est un point quelconque de } \mathcal{D} \\ \mathcal{P} \text{ est l'unique plan contenant } \mathcal{D}' \text{ et parallèle à } \mathcal{D} \end{array}\right.$

Remarque 20. Et dans le cas où les deux droites sont coplanaires ?...

Exercice : 6

On considère dans $\mathbb{R}^3$, les droites $(\mathcal{D}_1)$ $\left\{\begin{array}{l} \text{passant par } A(1,\ 1\ 2) \\ \text{dirigée par } \overrightarrow{u}(2,\ 1,\ 1) \end{array}\right.$ et $(\mathcal{D}_2)$ $\left\{\begin{array}{l} \text{passant par } B(3,\ 1\ 0) \\ \text{dirigée par } \overrightarrow{v}(1,\ 2,\ 0) \end{array}\right.$.

1. Calculer la distance $d(\mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_2)$.

2. Déterminer $M \in (\mathcal{D}_1)$ et $N \in (\mathcal{D}_2)$ tels que (MN) soit la perpendiculaire commune à $(\mathcal{D}_1)$ et $(\mathcal{D}_2)$.
   Retrouver ainsi le résultat de 1).
3. Soit $P(k) = B + k.\vec{v}$ un point de $(\mathcal{D}_2)$.
   Déterminer le minimum de la fonction g définie par $g(k) = d^2(P(k), \mathcal{D}_1)$.
   Retrouver ainsi le résultat de 1).

8 Sphères de l'espace

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$.

Définition 8 : Soit Ω un point de l'espace et $R \in \mathbb{R}^{+*}$.
La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M de l'espace situés à une distance R de Ω.

Proposition 27 : Soit $\mathcal{C}$ la sphère de centre $A(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon R.

$$M(x, y, z) \in \mathcal{C} \iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$$

L'équation obtenue est appelée *équation cartésienne* de $\mathcal{C}$.
Cette équation est de la forme $x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$

Preuve 27 : Pas de difficulté.

Proposition 28 : Réciproquement, l'ensemble des points $\mathcal{C}$ vérifiant une relation de la forme

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0}$$

est soit une sphère, soit un point, soit l'ensemble vide.

Preuve 28 : Il suffit de transformer l'équation cartésienne de $\mathcal{C}$ par décomposition canonique.

`Exemple 14.` Soit $\mathcal{C}$ la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.
Déterminer l'équation de cette sphère en coordonnées cylindriques puis en coordonnées sphériques.

Proposition 29 : **Plan tangent**
On appelle *plan tangent* à une sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon R en $A(x_A, y_A, z_A) \in \mathcal{S}$, le plan passant par A et orthogonal au vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$.
Ce plan a pour équation cartésienne :

$$(x_A - x_\Omega)(x - x_\Omega) + (y_A - y_\Omega)(y - y_\Omega) + (z_A - z_\Omega)(z - z_\Omega) = R^2$$

Preuve 29 : Il suffit de faire le calcul ...

Remarque 21. L'équation cartésienne du plan tangent se retrouve facilement à partir de l'équation cartésienne de $\mathcal{S}$ en appliquant une règle dîte "règle de dédoublement des termes".

Théorème 30 : **Intersection d'une sphère et d'un plan**
Soit $(\mathcal{S})$ une sphère de centre Ω et de rayon R et $(\mathcal{P})$ un plan. L'intersection de $(\mathcal{S})$ et de $(\mathcal{P})$ est :
1. L'ensemble vide lorsque $d(\Omega, (\mathcal{P})) > R$
2. Un point lorsque $d(\Omega, (\mathcal{P})) = R$
3. Un cercle lorsque $d(\Omega, (\mathcal{P})) < R$

Preuve 30 : On peut effectuer une étude analytique en se plaçant dans un repère bien choisi.

`Exemple 15.` L'espace étant muni d'un ron, déterminer le lieu d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 6z - 5 = 0$ puis étudier son intersection avec le plan d'équation $2x - y + 3z - 2 = 0$.

Remarque 22. De même, sauriez-vous décrire l'intersection de deux sphères et l'intersection d'une sphère et d'une droite ?