Les Applications

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

1er mars 2011

Les notions développées dans ce chapitre sont d'une importance fondamentale. Si vous ne les maitrisez pas parfaitement, vous rencontrerez des difficultés tout au long de l'année quelque soit le chapitre traité.

1 Premières définitions

Définition 1 : **Définition d'une application**
Soient E et F deux ensembles.

Si à tout élément x de E, on fait correspondre un unique élément y de F, alors cette "correspondance" est appelée une *application*. Une application est souvent notée f, g, φ, ψ, u, v ...
Dans le cas où cette application est appelée f :

1. le correspondant y de $x \in E$ est appelé l'*image* de x par l'application f et est noté $f(x)$.
2. les valeurs x de E a qui on associe $y \in F$ sont appelées les *antécédents* de y.
3. E est appelé *l'ensemble de départ ou de définition* de f.
4. F est appelé *l'ensemble d'arrivée* de f.

On note alors : $\quad f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$ cette application.

Représentation ensembliste d'une application

Pour prouver que $\varphi : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ x & \mapsto & \varphi(x) \end{array}$ est une application, on vérifie que $\forall x \in A$, $\exists ! y \in B$ tel que $y = \varphi(x)$.
Cela signifie qu'il faut montrer que pour tout $x \in A$:
1. φ lui associe un **unique** élément y
2. cet élément y est bien dans B

Exemple 1. Les "correspondances" suivantes sont des applications :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+*} \\ x & \mapsto & e^x \end{array} \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \dfrac{1}{n} \end{array} \qquad h : \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ (n, p) & \mapsto & n \wedge p \end{array} \qquad i : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z) \end{array}$$

Exemple 2. Soit $E = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Peut-on définir une application de E dans $\mathbb{C}^2$ qui à tout triplet $(a, b, c) \in E$ associe le couple de racines complexes de l'équation : $ax^2 + bx + c = 0$?

Exercice : 1

Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ définie par : $f(x, y) = (x + y, xy)$.
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, déterminez une CNS sur a et b pour que (a, b) admette un antécédent par f.
Dans ce cas, combien y en a-t-il ?

Remarque 1. Soit f une application de E dans F

- Si f n'est pas définie sur E tout entier, on parlera de "*fonction* de E dans F".
- Un élément $y \in F$ peut admettre : 0 antécédent, 1 antécédent ou plusieurs antécédents (Trouver des exemples !!)
- On notera $\mathcal{F}(E,F)$ l'ensemble des applications de E dans F. (On utilise parfois la notation F^E).

Définition 2 : **Égalité de deux applications**

Soient $\begin{cases} f : E \mapsto F \\ f' : E' \mapsto F' \end{cases}$ deux applications.

On dit qu'elles sont égales et l'on note $f = f'$ lorsque : $\begin{cases} \text{elles ont même ensemble de départ } (E = E') \\ \text{elles ont même ensemble d'arrivée } (F = F') \\ \boxed{\forall x \in E, \quad f(x) = f'(x)} \end{cases}$

Pour montrer que $f = g$:
On vérifie l'égalité des ensembles de départ et d'arrivée et on montre que : $\forall x \in E$ on a $f(x) = g(x)$

Définition 3 : **Identité**

Soit E un ensemble. On appelle *identité* de E l'application : $\mathrm{id}_E : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{array}$

Définition 4 : **Restriction et prolongement d'une application**

Soit $f : E \mapsto F$ une application et $\begin{cases} E' \subset E \\ E \subset E'' \end{cases}$.

- On définit *la restriction* de l'application f au sous-ensemble E' l'application : $f_{|E'} : \begin{array}{ccc} E' & \longrightarrow & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$
- Une application $\widetilde{f} : E'' \mapsto F$ est *un prolongement* de l'application $f : E \mapsto F$ si et seulement si $\widetilde{f}_{|E} = f$.

Remarque 2. Il y a unicité de la restriction à E', mais il n'y a pas unicité d'un prolongement à E''.

Exemple 3. Prolonger *par continuité* en 0, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Définition 5 : **Composée d'applications**

Soit deux applications $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto G$.
On définit l'application *composée* de E dans G notée $g \circ f$ par la relation : $\boxed{\forall x \in E, \quad g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)}$

$$\underset{x}{E} \xrightarrow{f} \underset{f(x)}{F} \xrightarrow{g} \underset{g \circ f(x)}{G}$$

Remarque 3. Pour deux applications f et g telles que $\begin{cases} f : E \mapsto F \\ g : G \mapsto H \end{cases}$, $g \circ f$ n'a un sens que si : $f(E) \subset G$

Théorème 1 : **"Associativité" de la loi de composition**

1. Pour trois applications telles que $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{g} G \xrightarrow{h} H$ on a $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
2. Si $f : E \mapsto F$ on a $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$

Preuve 1 : Pour tout $x \in E$, il suffit de calculer $h \circ (g \circ f)(x)$ et $(h \circ g) \circ f(x)$.

Remarque 4. Attention, la loi de composition n'est pas commutative !! $fog \neq gof$. Trouvez un contre-exemple !!

2 Injection, surjection, bijection

DÉFINITION 6 : **Applications injectives, surjectives, bijectives**
Soit $f : E \mapsto F$ une application.
On dit que :

f est *injective*	ssi	$\forall (x, x') \in E^2$,	$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$
f est *surjective*	ssi	$\forall y \in F$,	$\exists x \in E$ tel que $y = f(x)$
f est *bijective*	ssi	f est injective et surjective	
	ssi	$\forall y \in F$,	$\exists ! x \in E$ tel que $y = f(x)$

Remarque 5.

1. Dire que $f : E \to F$ est injective revient à dire (par contraposée) que $\forall (x, x') \in E^2$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
Cela signifie que tout élément de F possède **au plus un antécédent** dans E.
2. Dire que $f : E \to F$ est surjective revient à dire que tout élément de F possède **au moins un antécédent** dans E.
3. Dire que $f : E \to F$ est bijective revient à dire que tout élément de F possède **un et un seul antécédent** dans E.
4. Ne pas confondre les définitions de *application* et de *application bijective* !

Injection	Surjection	Bijection

1. **Pour montrer que f est injective :**
Le raisonnement commence ainsi.
Soit $x \in E$ et $x' \in E$. Supposons que $f(x) = f(x')$ et montrons alors que $x = x'$.
2. **Pour montrer que f n'est pas injective :**
On recherche 2 éléments x et x' de E distincts tels que $f(x) = f(x')$

Pour montrer que f est surjective :

1. Méthode directe :
Soit $y \in F$, cherchons $x \in E$ tel que $y = f(x)$. En résolvant cette équation, on détermine un x qui convient.
2. Parfois, la résolution par équivalences est impossible. Dans ce cas, on peut procéder par Analyse/synthèse. L'analyse nous donne des antécédents possibles de y. Il suffit alors de vérifier que parmi ces valeurs, il y en a une qui vérifie bien $y = f(x)$

Pour montrer que $f : E \to F$ est bijective :

1. Méthode 1 : On montre que f est à la fois injective et surjective
2. Méthode 2 : On montre directement la proposition : $\forall y \in F, \exists ! x \in E \mid y = f(x)$.

Exemple 4. Les applications de $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ suivantes sont-elles injectives, surjectives ?

1. $x \to x^2$
2. $x \to x^3$
3. $x \to \sin x$

Que dire de l'application $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ telle que : $f(x) = e^{ix}$?

Exercice : 2

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\, y) & \mapsto & (x+y,\, x+2y) \end{array}$. Est-elle injective ? Surjective ?

Théorème 2 : **Propriétés des composées**
Soient $f : E \mapsto F$ et $g : G \mapsto H$ deux applications telles que $f(E) \subset G$.

1. $\begin{cases} f \\ g \end{cases}$ sont injectives $\Rightarrow g \circ f$ est injective
2. $\begin{cases} f \\ g \end{cases}$ sont surjectives $\Rightarrow g \circ f$ est surjective
3. $g \circ f$ est injective $\Rightarrow f$ est injective
4. $g \circ f$ est surjective $\Rightarrow g$ est surjective
5. La restriction d'une injection est injective

Preuve 2 : On utilise les méthodes présentées précédemment.

Remarque 6. En particulier, la composée de deux bijections est une bijection.

Théorème 3 : **Bijection réciproque**
Soit $f : E \mapsto F$ une application.

$$\boxed{f \text{ bijective} \iff \exists g \in \mathcal{F}\,(F,E) \text{ tq } \begin{cases} f \circ g = \mathrm{id}_F \\ g \circ f = \mathrm{id}_E \end{cases}}$$

Lorsque f est bijective, La fonction réciproque g ainsi définie est unique : on la note f^{-1}.
On l'appelle la *bijection réciproque* de l'application f.

On écrira : $E \underset{f^{-1}}{\overset{f}{\rightleftarrows}} F$ et l'on a : $\boxed{y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)}$

Preuve 3 :
$\Rightarrow$ On définit la fonction g qui à tout $y \in F$ associe l'unique antécédent x par f.
On vérifie alors que cette fonction g convient.
$\Leftarrow$ On utilise les propriétés d'injectivité et de surjectivité des composées.
L'unicité se démontre par la méthode usuelle : supposons que g et g' conviennent ...

Remarque 7. N'introduire l'application f^{-1} que lorsqu'elle existe, c'est à dire uniquement après avoir prouvé que l'application f était bijective !

Bijection

Exercice : 3

1. On appelle "involution de E" une application de E dans E qui vérifie : $f \circ f = \mathrm{id}_E$
   Démontrer que f est bijective.

   Exemples : $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R}^* \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \bar{z} \end{array}$

2. Soit E un ensemble et $f : E \mapsto E$ une application vérifiant $f \circ f = f$.
Montrer que :

(a) f injective $\Rightarrow f = \mathrm{id}_E$

(b) f surjective $\Rightarrow f = \mathrm{id}_E$

Pour trouvez la bijection réciproque d'une application $f : E \to F$:

- Cas 1 : On peut rechercher intuitivement g la réciproque de f.
Puis, on prouve que l'application g introduite vérifie : $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et que $g \circ f = \mathrm{id}_E$
- Cas 2 : Si l'on dispose d'une expression explicite de $f(x)$, on peut procéder par équivalences :
Soient $x \in E$ et $y \in F$:
$$y = f(x) \iff \dots \iff x = f^{-1}(y)$$

Exercice : 4

Soit $f : \mathbb{C}\backslash\{-i\} \to \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \dfrac{iz+1}{iz-1}$.
Prouver que f est une bijection de $\mathbb{C}\backslash\{-i\}$ dans un ensemble que l'on déterminera et déterminer sa bijection réciproque.

Théorème 4 : **bijection réciproque d'une composée**
Si $f : E \to F$ et $g : G \to H$ (avec $f(E) \subset G$) sont deux bijections, alors l'application $g \circ f$ est bijective et
$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Preuve 4 : La vérification est immédiate.

Exercice : 5

Soient deux applications $f : E \mapsto F$ et $g : F \mapsto E$.
On suppose que l'application $g \circ f \circ g \circ f$ est surjective et que l'application $f \circ g \circ f \circ g$ est injective.
Montrer qu'alors les deux applications f et g sont bijectives.

3 Image directe et réciproque d'un ensemble

Définition 7 : **Image directe d'un ensemble**
Soit une application $f : E \mapsto F$ et $A \subset E$.
On appelle *image directe* de A par f, la partie de F notée : $\boxed{f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}}$

Image Directe d'un ensemble

Remarque 8.

1. Nous avons donc l'équivalence suivante : $y \in f(A) \iff \exists x \in A,\, y = f(x)$
2. Ainsi nous avons en particulier pour toute application f : $f(\emptyset) = \emptyset$

Pour prouver que $y \in f(A)$ on montrera que $\exists x \in A$ tel que $y = f(x)$.
Pour cela, on recherche un x tel que $y = f(x)$ et on vérifie que cet x appartient à A.

Remarque 9. Une application $f : E \mapsto F$ est surjective ssi $f(E) = F$.

Définition 8 : Partie stable
Soit une application $f : E \mapsto E$, et une partie $A \subset E$.
On dit que la partie A est *stable* par l'application f lorsque $f(A) \subset A$.
Cela est équivalent à dire que :

$$\boxed{A \text{ est stable par } f \iff \forall x \in A,\ f(x) \in A}$$

Exemple 5. Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1 - x^2$.
Montrer que l'intervalle I = $[0\,;\,1]$ est un intervalle stable par f.

Définition 9 : Image réciproque d'un ensemble
Soit une application $f : E \mapsto F$ et $B \subset F$.
On appelle *image réciproque* de B par f, la partie de E notée : $\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$

Image Réciproque d'un ensemble

Remarque 10.
1. Nous avons donc l'équivalence suivante : $x \in f^{-1}(B) \iff f(x) \in B$
2. Ainsi nous avons en particulier pour toute application f : $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$

Pour prouver que $x \in f^{-1}(B)$ on montrera simplement que $f(x) \in B$.

Remarque 11. la notation $f^{-1}(B)$ a un sens même si f n'est pas bijective !!
$f^{-1}(B)$ est juste une notation qui désigne un *sous-ensemble* de l'ensemble de départ de f, elle ne présuppose aucunement de l'existence de l'application f^{-1}. Quelle différence faites-vous entre $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(0)$?

Exercice : 6

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin x \end{array}$.
Après avoir vérifié que les notations sont correctes, déterminer les ensembles suivants :

1. $f^{-1}(0)$
2. $f^{-1}(\{0\})$
3. $f^{-1}(\{5\})$
4. $f^{-1}(\{1/3\})$
5. $f^{-1}([0, +\infty[)$
6. $f([0,\pi])$
7. $f(\{0\})$
8. $f(\mathbb{R})$

Exercice : 7

Déterminer $f(\delta)$ où $\delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = x\}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y,\ xy) \end{array}$.