Espaces vectoriels euclidiens

MPSI - 1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

21 avril 2011

Dans ce chapitre, E désigne un $\boxed{\mathbb{R} \text{ espace vectoriel}}$.

1 Produit scalaire

DÉFINITION 1 : **Forme bilinéaire symétrique (FBS)**

On appelle *forme bilinéaire symétrique* sur E, une application $\phi : \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\, y) & \mapsto & \phi(x,\, y) \end{array}$ vérifiant :

1. ϕ est *bilinéaire* : $\forall (x,\, y,\, z) \in E^3$ et $\forall (\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{lll} \phi(\lambda x + \mu y,\, z) = \lambda \phi(x,\, z) + \mu \phi(y,\, z) & \text{en particulier} & \phi(0,\, z) = 0 \\ \phi(x,\, \lambda y + \mu z) = \lambda \phi(x,\, y) + \mu \phi(x,\, z) & \text{en particulier} & \phi(x,\, 0) = 0 \end{array}$$

2. ϕ est *symétrique* : $\forall (x,\, y) \in E^2, \quad \phi(x,\, y) = \phi(y,\, x)$

Remarque 1.

1. L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est noté $\mathcal{S}_2(E)$.
2. Pour montrer qu'une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique, il suffit de commencer par prouver qu'elle est symétrique puis qu'elle est linéaire par rapport à l'une des variables.
3. $\mathcal{S}_2(E)$ est un sev de $\mathcal{F}(E \times E,\, \mathbb{R})$.

`Exemple 1.` L'application déterminant sur $\mathbb{R}^2$ est une forme bilinéaire ANTIsymétrique.

DÉFINITION 2 : **produit scalaire**

On appelle *produit scalaire* sur E, une FBS $\phi : \begin{array}{ccc} E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\, y) & \mapsto & \phi(x,\, y) \end{array}$ vérifiant :

1. ϕ est *définie* : $\forall x \in E, \quad \phi(x,\, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2. ϕ est *positive* : $\forall x \in E, \quad \phi(x,\, x) \geq 0$

Remarque 2.

1. Si E est muni d'un produit scalaire, on dit alors que E est un *espace préhilbertien réel*.
   Si de plus, E est de dimension finie, on dit que E est un *espace euclidien*.
2. Le produit scalaire de deux vecteurs sera souvent noté : $\phi(x,\, y) = \langle x, y\rangle$.
   Un sev F d'un espace préhilbertien réel E est lui aussi considéré comme un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire de E.

`Exemple 2.` $(*)$

1) **Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$:** $\forall\ X, Y \in \mathbb{R}^n$: $\langle X,Y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY$
2) **Le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$:** $\forall\ f, g \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$: $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$
3) **Le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$:** $\forall\ f, g \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R})$: $\langle f,g\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)g(t)dt$
4) **Le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:** $\forall\ P, Q \in \mathbb{R}[X]$: $\langle P,Q\rangle = \int_0^1 \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)dt$
5) **Le produit scalaire sur $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$:** $\forall\ A, B \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$: $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)$

Exercice : 1

$(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\varphi(P, Q) = \sum_{k=0}^{n} \widetilde{P}(k).\widetilde{Q}(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Théorème 1 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle$.
Soient x et y deux vecteurs de E. Alors :

$$\boxed{|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}.\sqrt{\langle y,y\rangle}}$$

Avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont proportionnels, c'est à dire ssi : $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tq $y = \lambda x$.

Preuve 1 :
1. Soient $(x, y) \in E^2$. On considère la fonction $\varphi(\lambda) = \langle x + \lambda.y,x + \lambda.y\rangle$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Après développement, on constate que $\varphi(\lambda)$ est un polynôme positif de degré 2 en λ.
   Son discriminant est donc négatif...
2. Pour l'égalité :
   (a) Si les deux vecteurs sont proportionnels, on a immédiatement l'égalité.
   (b) Si on a l'égalité, alors il existe un λ_0 tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$ ...

Remarque 3. Cette inégalité permet de démontrer un grand nombre d'inégalités originales.

`Exemple 3.` $(*)$
1. Ecrire les inégalités de Cauchy-Schwarz obtenues pour chacun des produits scalaires précédents.
2. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que : $\left(\int_0^1 t.\widetilde{P}(t)\ \mathrm{d}t\right)^2 \leq \frac{1}{3}\int_0^1 \widetilde{P}^2(t)\ \mathrm{d}t$
3. Pour tout $(x_1,\ \ldots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer que : $\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n} x_k^2$ (cas d'égalité ?)

Exercice : 2

$(*)$ Soit f une fonction strictement positive, continue sur l'intervalle $[a;b]$. On pose : $l(f) = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t.\int_a^b \frac{1}{f(t)}\ \mathrm{d}t.$
1. Montrer que $l(f) \geq (b-a)^2$
2. Etudier les cas d'égalité.

Corollaire 2 : **Inégalité de Minkowsky**
Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle$.
Soient x et y deux vecteurs de E. Alors :

$$\boxed{\sqrt{\langle x+y,x+y\rangle} \leq \sqrt{\langle x,x\rangle} + \sqrt{\langle y,y\rangle}}$$

Preuve 2 : Conséquence quasi-immédiate de Cauchy-Schwarz.

Définition 3 : **Norme sur E**

L'application $\begin{array}{cccc} \|.\| : & E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & \|x\| \end{array}$ est une norme sur E ssi elle vérifie les 3 propriétés suivantes :

1)	$\forall (x, y) \in E \times E$	$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$	Inégalité triangulaire (ou de Minkowsky)
2)	$\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$	$\|\lambda.x\| = \|\lambda\|.\|x\|$	Homogénéïté
3)	$\forall x \in E$	$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$	Séparation

Remarque 4. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme est appelé un $\mathbb{K}$-*ev normé*. Voir le cours de Math Spé ...

Exemple 4. Sur $\mathbb{R}^n$, on définit pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la *norme* p par la formule $||(x_1, \ldots, x_n)||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$.
En donnant des valeurs particulières à p (1, 2 et $+\infty$ (!!)), on obtient les normes couramment utilisées sur $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} ||(x_1, \ldots, x_n)||_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \\ ||(x_1, \ldots, x_n)||_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \\ ||(x_1, \ldots, x_n)||_\infty = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]} (|x_1|, \ldots, |x_n|) \end{cases}$$

Remarque 5.

1. Il est possible de définir une infinité de normes différentes sur un $\mathbb{R}$-ev E.
   L'expression "Soit un vecteur x de norme 1" n'a donc de sens que s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme utilisée.
2. Un vecteur de norme 1 est appelé un *vecteur unitaire*. On dit alors qu'il est *normé*.
   Normer un vecteur non nul consiste à diviser ce vecteur par sa norme. On obtient ainsi un vecteur de norme 1.

Définition 4 : **Distance dans un espace préhilbertien E**
Soit $||.||$ une norme sur E.

L'application $\begin{array}{cccc} d : & E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & (x, y) & \mapsto & \|x-y\| \end{array}$ est appelée *distance* sur E associée à la norme $||.||$.

On dit que $d(x, y)$ est la *distance* entre x et y.

Théorème 3 : **Norme euclidienne**
Soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E. L'application :

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \|.\| : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{\langle x,x \rangle} \end{array}}$$ définit une norme sur E

Une norme ainsi associée à un produit scalaire est appelée une *norme euclidienne*.

Preuve 3 : Vous penserez à utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour démontrer l'inégalité triangulaire.

Remarque 6. Dans ce cours, nous nous limiterons à l'utilisation de normes euclidiennes.

Remarque 7. Dans un espace préhilbertien réel, on utilisera la norme associée au produit scalaire de l'espace.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz s'écrit alors :

$$|\langle x,y \rangle| \leq ||x||.||y||$$

Exemple 5. Norme euclidienne associée au :

produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$	produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$	produit scalaire usuel sur $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$
$\|\|X\|\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{{}^tXX}$	$\|\|f\|\| = \sqrt{\int_a^b f^2(t)dt}$	$\|\|A\|\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}$

Exemple 6. $(*)$

1. Dans $\mathcal{C}([0,\,1],\,\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, calculer $\|x \mapsto e^x\|$.
2. Déterminer un triangle rectangle de l'espace euclidien $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A,B\rangle = \mathrm{Tr}(\,{}^tAB)$.

Théorème 4 : **Calculs sur les normes euclidiennes**
Soit $\|.\|$ une norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle .,.\rangle$ sur E.
Pour tout couple de vecteurs $(x,\,y) \in E^2$, et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|\lambda.x\| = |\lambda|\|x\|$
2. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$ et donc $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$
3. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(égalité du parallélogramme)*

Preuve 4 : Pas de difficulté !!

Egalité du parallèlogramme

Corollaire 5 : **Identités de polarisation**
Soit $\|.\|$ une norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle .,.\rangle$ sur E.
Pour tout couple de vecteurs $(x,\,y) \in E^2$, et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\langle x,y\rangle = \dfrac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$
2. $\langle x,y\rangle = \dfrac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

Preuve 5 : Pas de difficulté !!

Remarque 8.
1. Ces identités permettent de retrouver l'expression d'un produit scalaire connaissant la norme euclidienne associée.
2. Elles permettent aussi de vérifier si une norme est une norme euclidienne ou pas.

2 Orthogonalité

Dans toute cette section, on considère $(E,\,\langle .,.\rangle)$ un espace préhilbertien réel.
La norme utilisée sera la norme euclidienne associée à $\langle .,.\rangle$.

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 5 : **Orthogonalité**
Soit E un espace préhilbertien réel munis du produit scalaire $\langle .,.\rangle$.
Soient x et y deux vecteurs de E et F et G deux sev de E.

- x et y sont dits *orthogonaux* ssi $\langle x,y\rangle = 0$. $(x \perp y)$
- x est dit *orthogonal* à F ssi x est orthogonal à tout vecteur de F. $(x \perp F)$
- F et G sont dits *orthogonaux* ssi Pour tout $x \in F$ et $y \in G$, on a $\langle x,y\rangle = 0$. $(F \perp G)$

Remarque 9.

1. Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.
2. $F \perp G$ équivaut à dire que tout vecteur de F est orthogonal à G ou que tout vecteur de G est orthogonal à F.

`Exemple 7.` (∗) Soit $E = \mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire usuel $\langle f,g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t).g(t)\ \mathrm{d}t$.

Soient $\begin{cases} F = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \cos nx)_{n\in\mathbb{N}} \\ G = \mathrm{Vect}\,(x \mapsto \sin nx)_{n\in\mathbb{N}^*} \end{cases}$. Montrer que F et G sont orthogonaux.

Pour montrer que 2 sev F et G sont orthogonaux, on dispose des 3 méthodes suivantes :

M1 : Soit $x \in F$ et $y \in G$, montrons que $\langle x,y\rangle = 0 \dots$

M2 : Si $G = \mathrm{Vect}(e_1,\ \dots,\ e_p)$ alors il suffit de montrer que $\begin{cases} \forall x \in F \\ \forall k \in [\![1,p]\!] \end{cases}$, $\langle x,e_k\rangle = 0$.

M3 : Si $\begin{cases} F = \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_q) \\ G = \mathrm{Vect}(e_1,\ \dots,\ e_p) \end{cases}$ alors il suffit de montrer que $\forall(i,\ j) \in [\![1,q]\!] \times [\![1,p]\!]$, $\langle \varepsilon_i,e_j\rangle = 0$.

`Exemple 8.` (∗) Vect((1, 0, 1)) et Vect((0, 1, 0),(−1, 1, 1)) sont orthogonaux dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel.

Théorème 6 : **Pythagore**

Soit $(E,\ \langle.,.\rangle)$, un espace préhilbertien réel.

Soient x et y deux vecteurs de E. Alors

$$\boxed{\langle x,y\rangle = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2}$$

Preuve 6 : Pas de difficulté !

Proposition 7 : Soit F un sev de dimension finie, d'un espace préhilbertien réel $(E,\ \langle.,.\rangle)$.

Soit $\mathcal{B}$ une base de F.

Soit $x \in E$.

$$x \perp F \Longleftrightarrow x \text{ est orthogonal à tous les vecteurs de } \mathcal{B}$$

Preuve 7 : Pas de difficulté.

Remarque 10. Cette caractérisation est très utilisée en pratique ...

Définition 6 : **Famille orthogonale et famille orthonormale**

Soit $(E,\ \langle.,.\rangle)$, un espace préhilbertien réel.

1. On appelle *famille orthogonale* de E toute famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ de E deux à deux orthogonaux :

$$\boxed{(x_i)_{i\in I} \text{ est orthogonale } \Longleftrightarrow \forall(i,\ j) \in I^2,\quad i \neq j \Rightarrow \langle x_i,x_j\rangle = 0}$$

2. On appelle *famille orthonormale* de E toute famille orthogonale de vecteurs unitaires de E.
   On aura alors : $(x_i)_{i\in I}$ est orthonornale $\Longleftrightarrow \langle x_i,x_j\rangle = \delta_{i,j}$.

Remarque 11. On obtient facilement une famille orthonormale à partir d'une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** en normant chaque vecteur.

`Exemple 9.` (∗) Vérifier que :

1. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormale lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel.
2. La base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une famille orthonormale lorsque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel.

Exercice : 3

(∗∗) On définit une application $\varphi\ :\ \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \mapsto \mathbb{C}$ par $\varphi(P,\ Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})Q(e^{-i\theta})\ \mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $(1,\ X,\ \dots,\ X^n)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire φ.

Théorème 8 : Une *famille orthogonale* de vecteurs non-nuls est libre.

Preuve 8 : On considère une CL nulle de vecteurs d'une famille orthogonale F.
Pour tout $i \in [1,n]$ on prend alors le produit scalaire de cette CL par x_i.

`Exemple 10.` $\mathbb{R}_n[X]$ dispose d'une base orthogonale pour chacun des produits scalaires suivants, le k^{eme} polynôme étant de degré $k-1$ et de coefficient dominant 1 :

1. $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ (Poly de Legendre)
2. $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ (Poly de Laguerre)
3. $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (Poly de l'Hermite)
4. $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$ (Poly de Tchebychev)

L'étude de ces polynômes fait très souvent l'objet de problèmes de concours.

Remarque 12. Généralisation de Pythagore : si $F = (x_1, \dots, x_n)$ est orthogonale, alors $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$.

Définition 7 : **Orthogonal d'une partie non vide de E**
Soit $A \subset E$ une partie non vide de E.
L'*orthogonal* de A est défini par : $\boxed{A^{\perp} = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ \langle x,a\rangle = 0\}}$ (noté parfois A°)

$A^{\perp}$ est donc l'ensemble des vecteurs orthogonaux à A.

`Exemple 11.`

1. $E^{\perp} = \{0\}$
2. $\{0\}^{\perp} = E$

Théorème 9 : **Propriétés de l'orthogonal d'une partie**
Soient A, $B \subset E$ deux parties non vides de E.

P1: $A^{\perp}$ est un sev de E
P2: $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$
P3: $A^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)^{\perp}$
P4: $A \subset [A^{\perp}]^{\perp}$
P5: Soit $a \neq 0$: $a^{\perp}$ est alors un hyperplan de E

Preuve 9 :
P1: On démontre que $A^{\perp}$ est une partie non vide de E stable par CL.
P2: On considère un élément de $B^{\perp}$ et on montre qu'il est orthogonal à tout élément de A.
P3: Comme $A \subset \mathrm{Vect}(A)$ alors $\mathrm{Vect}(A)^{\perp} \subset A^{\perp}$. Soit $x \in A^{\perp}$ ...
P4: Tout élément de A est orthogonal aux vecteurs de $A^{\perp}$.
P5: On remarque que $a^{\perp} = \ker\varphi$ où φ est l'application non nulle de E dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = \langle x,a\rangle$.

Théorème 10 : **Un sev et son orthogonal sont en somme directe**
Si F est un sev d'un espace préhilbertien E alors : $\begin{cases} F^{\perp} \text{ est un sev de } E \\ F\cap F^{\perp} = \{0\}\end{cases}$ et donc $F + F^{\perp} = F \oplus F^{\perp}$.

Preuve 10 : Nous savons déjà que l'orthogonal d'une partie de E est un sev.
On prouve que $F \cap F^{\perp} = \{0\}$ en remarquant que si x appartient à $F \cap F^{\perp}$ alors il est orthogonal à lui-même.

Théorème 11 : **Somme directe orthogonale**

1. Définition : On dit que p sev $F_1, \dots, F_p$ sont en somme directe (notée : $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$) lorsque :
$$\forall x \in F_1 + \cdots + F_p, \quad \exists!(x_1, \dots, x_p) \in F_1 \times \dots F_p \quad \text{tel que} \quad x = x_1 + \cdots + x_p$$
2. Propriété : Si $F_1, \dots, F_p$ sont p sev de E deux à deux orthogonaux, alors : $F_1 \oplus \cdots \oplus F_p$.

Preuve 11 : Avec Pythagore, on montre facilement qu'un élément de $F_1 + \cdots + F_p$ s'écrit de façon unique.

Proposition 12 : **Caractérisation de l'orthogonalité entre deux sev**
Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{R}$-ev E.

$$\boxed{F \text{ et } G \text{ sont 2 sev orthogonaux } \Longleftrightarrow F \subset G^{\perp}} \quad (\Longleftrightarrow G \subset F^{\perp})$$

Preuve 12 : Immédiat !

2.2 Orthogonalisation de Schmidt

Théorème Fondamental 13 : **Théorème et procédé de Schmidt**
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une famille libre quelconque d'un espace préhilbertien réel E.

Alors il existe une famille *orthogonale* $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ de E vérifiant :

$$\begin{cases} \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \\ \langle \varepsilon_n, e_n \rangle > 0 \end{cases}$$

Le procédé de Schmidt est donné dans la démonstration.

Preuve 13 : On procède par récurrence sur n.

1. Pour $n = 1$: $\varepsilon_1 = e_1$ convient.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour toute famille libre $(e_1, \dots, e_n)$, une famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ vérifiant la propriété du théorème existe.
   Soit $(e_1, \dots, e_{n+1})$ une famille libre.
   La sous famille $(e_1, \dots, e_n)$ est aussi une famille libre et on peut donc construire une famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ vérifiant la propriété du théorème.
   Il s'agit alors de construire ε_{n+1} tel que $\begin{cases} \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1}) \\ \forall i \in [\![1,n]\!], \langle \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_i \rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_{n+1}, e_{n+1} \rangle > 0 \end{cases}$.

   Cherchons ε_{n+1} sous la forme $\boxed{\varepsilon_{n+1} = e_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i . \varepsilon_i}$.

   (a) On a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\langle \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_i \rangle = 0 \Longleftrightarrow \lambda_i = -\dfrac{\langle e_{n+1}, \varepsilon_i \rangle}{\|\varepsilon_i\|^2}$.
   (b) Comme $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $\begin{cases} \varepsilon_i \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_n) \\ \varepsilon_{n+1} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1}) \end{cases}$ on a $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) \subset \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1})$.
   On vérifie facilement que $\varepsilon_{n+1} \neq 0$. $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1})$ est donc une famille de vecteurs non nuls orthogonale et donc $\text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n+1}) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n+1})$.
   (c) Avec ε_{n+1} ainsi défini, on vérifie facilement que $\langle \varepsilon_{n+1}, e_{n+1} \rangle > 0$.

Dessin

Redressement de e_1, e_2 et e_3 dans le procédé de Schmidt

Remarque 13.

1. On peut "normaliser" les vecteurs de la famille ε pour obtenir une famille orthonormée.
2. L'algorithme de construction de la famille ε par le procédé de Schmidt est aussi important que l'énoncé du théorème. Il est très utilisé en pratique.

`Exemple 12.` $(*)$ Dans $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, orthogonaliser selon le procédé de schmidt la base $\left\{\begin{array}{l} u=(1,0,1) \\ v=(1,1,1) \\ w=(-1,1,0)\end{array}\right.$.

`Exemple 13.` $(*)$ Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
Déterminer une base orthonormale (bon) de l'hyperplan d'équation $x+2y-z+t=0$.

Corollaire 14 : **Existence d'une bon dans tout espace euclidien**
Tout espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ possède une base orthonormale.

Preuve 14 : Le procédé de schmidt permet de construire une base orthonormale à partir de toute base de E.

Remarque 14.

1. Tout sev de dimension finie d'un espace préhilbertien E possède aussi une base orthonormale.
2. La matrice de passage de e vers ε est triangulaire supérieure et ces deux bases ont la même orientation.
3. Dans un espace euclidien, il est donc toujours possible de compléter une famille orthonormale en une bon.

Exercice : 4

$(*)$ Soit l'espace $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P,Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \widetilde{P}(t)\widetilde{Q}(t)dt$.

1. Trouver une base orthonormée ε de E.
2. Trouver les coordonnées du vecteur $P=X+1$ dans la base ε.

3 Projection orthogonale

3.1 Définition et théorèmes

Soient E_1 et E_2 deux sev de E tels que $E=E_1\oplus E_2$.
On rappelle que :

1. Tout $x\in E$ se décompose de façon unique en $x=x_1+x_2$ avec $\left\{\begin{array}{l} x_1\in E_1 \\ x_2 \in E_2\end{array}\right.$.

   L'application $p\ : x\mapsto x_1$ est appelée la *projection sur E_1 parallèlement à E_2* et on a : $\left\{\begin{array}{l} E_1=\operatorname{Im} p \\ E_2=\ker p\end{array}\right.$.
2. Si $\left\{\begin{array}{l} p \text{ est la projection sur } E_1 \text{ parallèlement à } E_2 \\ q \text{ est la projection sur } E_2 \text{ parallèlement à } E_1\end{array}\right.$ alors $\boxed{\mathrm{id}_E = p+q}$. q est appelée la *projection associée* à p.
3. On rappelle enfin la caractérisation suivante : $p\in\mathcal{L}(E)$ est un projecteur $\Longleftrightarrow p\circ p=p$

Théorème 15 : Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E. Alors :

$$\boxed{E=F\oplus F^{\perp}} \quad \text{et si } \dim E<+\infty \text{ alors : } \quad \boxed{\dim F+\dim F^{\perp}=\dim E}$$

Preuve 15 : On procède par analyse/synthèse :
Supposons que $E=F+F^{\perp}$ et notons $\mathcal{B}=(e_1,\ \dots,\ e_n)$ une base de F. (on verra qu'une bon est préférable !)
Soit $x\in E$. Il existe $(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que $x-(\lambda_1.e_1+\cdots+\lambda_n.e_n)\in F^{\perp}$.
Ainsi, on a pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $\langle x-(\lambda_1.e_1+\cdots+\lambda_n.e_n),e_i\rangle=0$. Cela nous donne une valeur unique pour chacun des λ_i.
La réciproque est immédiate.

`Exemple 14.` $(*)$ Si F n'est pas de dimension finie, alors on n'a pas nécessairement $F \oplus F^{\perp} = E$. En effet ...
Soit $E = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telles que $\sum u_n^2$ converge, muni de son produit scalaire usuel :

$$\langle (u_n),(v_n) \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$$

Soit F le sev de E défini par $F = \mathrm{Vect}(e^{(n)})$ où $e^{(n)} = (\delta_{i,n})_{i \in \mathbb{N}}$.
Déterminer $F^{\perp}$ et prouver que $F \oplus F^{\perp} \neq E$.

Définition 8 : **Projection orthogonale**
Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie**.
La projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ est appelée la *projection orthogonale* sur F

`Exemple 15.` $(*)$ Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Supposons que $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel.
Prouver alors que p est un projecteur orthogonal.

Théorème Fondamental 16 : **Expression dans une bon**
Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie n.
Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de F.

La projection orthogonale sur F est définie par : $\forall x \in E$, $\boxed{p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x,e_k \rangle . e_k}$

Preuve 16 : C'est une conséquence immédiate de la démonstration du théorème précédent.

Remarque 15. Pour pouvoir appliquer cette formule, il faudra commencer par rechercher une bon de F... avec Schmidt bien sûr !

3.2 Projections orthogonales en dimension finie

Dans cette partie, on suppose que E est un espace euclidien.

Théorème 17 : **Caractérisation d'une projection orthogonale en dimension finie**
Soit E un espace euclidien et $p \in \mathcal{L}(E)$.

$$p \text{ est une projection orthogonale} \iff \begin{cases} p \circ p = p \\ \ker p \perp \mathrm{Im}\, p \end{cases}$$

Preuve 17 :
- $\Rightarrow$ Pas de difficulté ...
- $\Leftarrow$ (a) $p \circ p = p$ donc p est une projection.
  (b) $\ker p \perp \mathrm{Im}\, p$ donc $\ker p \subset (\mathrm{Im}\, p)^{\perp}$. On démontre l'égalité en comparant les dimensions.

Théorème 18 : **Projection associée à une projection orthogonale**
Dans un espace euclidien, la projection associée à la projection $\perp$ sur F est la projection $\perp$ sur $F^{\perp}$.

Preuve 18 : La projection $\perp$ sur F (notée p) est la projection sur F parallèlement à $F^{\perp}$ avec $\begin{cases} \dim F < +\infty \\ \dim F^{\perp} < +\infty \end{cases}$.
La projection associée à p est donc la projection sur $F^{\perp}$ parallélement à F.
Il s'agit donc de montrer que $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
1. On sait que $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$
2. On montre facilement l'égalité des dimensions

COROLLAIRE 19 : Soit n un vecteur non nul d'un espace **euclidien** E.

1) Si p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(n)$ alors $\forall x \in E$, $\boxed{p(x) = \frac{\langle x,n\rangle}{\|n\|^2}.n}$

2) Si p est la projection orthogonale sur $n^\perp$ alors $\forall x \in E$, $\boxed{p(x) = x - \frac{\langle x,n\rangle}{\|n\|^2}.n}$

Preuve 19 :

1. C'est une application immédiate de la définition.
2. On obtient ce résultat en considérant q la projection associée à p et en remarquant qu'il s'agit de la projection orthogonale sur $F^\perp$.

Remarque 16. Si E est de dimension infinie, alors la formule $p(x) = \frac{\langle x,n\rangle}{\|n\|^2}.n$ reste valable.

`Exemple 16.` $(*)$ Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique e.
Déterminer la matrice de p, la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y - z = 0$.

Remarque 17. De façon plus générale :
Pour rechercher l'expression de p la projection orthogonale sur un sev F lorsque E est un espace euclidien :

1. Si $\dim F \leq \dim F^\perp$ on appliquera directement la formule du théorème 14
2. Si $\dim F \geq \dim F^\perp$ on recherchera l'expression de q et on utilisera $p = \mathrm{id}_E - q$

Pour trouver $p(x)$ sans rechercher une bon de F :

1. On détermine une base quelconque de F, $(f_1, \dots, f_p)$
2. On décompose $p(x)$ sur cette base : $p(x) = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p$
3. On écrit les p conditions d'orthogonalité : $\forall i \in [1, p]$, $\langle x - p(x), f_i\rangle = 0$
4. On résout alors le système de p équations obtenu.

`Exemple 17.` $(*)$ Soit p le projecteur orthogonal sur $\mathrm{Vect}((1, 2, 0, -1), (2, 0, -1, 0))$ dans l'espace $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel.
Déterminer l'image de $x = (3, 1, 0, -1)$ par p.

3.3 Les symétries orthogonales

Soient E_1 et E_2 deux sev de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.
Rappels :

1. L'application $s = 2p - \mathrm{id}_E$ est appelée la *symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2* et on a : $\begin{cases} E_1 = \ker(s - \mathrm{id}_E) \\ E_2 = \ker(s + \mathrm{id}_E) \end{cases}$.
2. On a la caractérisation suivante : $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie $\iff s \circ s = \mathrm{id}_E$

DÉFINITION 9 : **Symétrie orthogonale**
Soit p la projection orthogonale sur un sev F (de dimension fini !!) d'un espace préhilbertien réel E.
L'endomorphisme s défini par $\boxed{s = 2p - \mathrm{id}_E}$ est la symétrie orthogonale par rapport à F.

Dessin

Symétrie orthogonale sur un sev F

Remarque 18.

1. Pour déterminer la matrice S d'une symétrie orthogonale, on commencera par rechercher P la matrice de la projection orthogonale associée et on appliquera la formule $S = 2P - I_n$.
2. La symétrie orthogonale par rapport à F n'est autre que la symétrie par rapport à F parallèlement à $F^\perp$.

`Exemple 18.` $(*)$ On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i,\, j,\, k)$.
Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale sur le plan P d'équation $x = z$.

Remarque 19. Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (en dimension finie !) est appelée une *réflexion*.

Exercice : 5

$(*)$ Soit $u \in \mathbb{R}^{3*}$ euclidien usuel et s la réflexion par rapport à $\{u\}^\perp$.

1. Déterminer l'expression de $s(X)$ où $X = (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de s dans la base canonique lorsque $u = (1,\, 0,\, 1)$.

3.4 Application : Distance d'un vecteur à un sev de dimension finie

E désigne un espace préhilbertien réel.

Définition 10 : **Distance d'un vecteur à un sev de dimension finie**
Pour $x \in E$, et F un sev de dimension finie de E, on définit

$$d(x,\, F) = \inf_{f \in F} d(x,\, f) \quad (= \inf_{f \in F} ||x - f||)$$

Remarque 20. $\{d(x,\, f) \mid f \in F\}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc bien une borne inférieure.
Le théorème suivant montre que $d(x,\, F)$ est atteint en $p(x)$ où p est la projection orthogonale sur F.

Dessin

Théorème 20 : **Formule**
Soient $x \in E$ et F un sev de dimension finie de E.

$$\boxed{d(x,\, F) = \|x - p_F(x)\|} \quad \text{où} \quad p_F(x) \text{ est la projection orthogonale de } x \text{ sur } F$$

Preuve 20 :

1. Prouvons que $\forall f \in F$, $d(x, f) \geq \|x - p_F(x)\|$.
   $\|x-f\|^2 = \|x-p_F(x)+p_F(x)-f\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2+\|p_F(x)-f\|^2 \geq \|x-p_F(x)\|^2$ (d'après Pythagore)
2. D'autre part $p_F(x) \in F$. Donc $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

Remarque 21. On a aussi $d(x, F) = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$.

`Exemple 19.` $(*)$ Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Calculer $d(x,F)$ où $F = \text{Vect}((1, 1, 1))$ et $x = (3, 2, 1)$.

Exercice : 6

$(**)$ Soit $E = \mathcal{C}([-\pi,\pi],\mathbb{R})$.
Trouver $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que la quantité $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^t - (a + b\sin t)\right)^2 dt$ soit minimale.

4 Espaces euclidiens

Définition 11 : **Espaces euclidiens**
Un espace euclidien est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de *dimension finie*, muni d'un produit scalaire

On se place désormais dans des espaces de dimension finie.
Bien entendu, les résultats démontrés précédemment restent valables !

Définition 12 : **bases orthogonales, orthonormales**
Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de $(E, \langle .,. \rangle)$ où $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire quelconque.
On dit que e est une base :
1) *orthogonale* ssi $\forall (i, j) \in [1,n]^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle e_i,e_j \rangle = 0$
2) *orthonormale* ssi $\forall (i, j) \in [1,n]^2$, $\langle e_i,e_j \rangle = \delta_{ij}$

`Exemple 20.` On dira que $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle si $\mathbb{R}^n$ est muni de la base canonique et du produit scalaire usuel. Dans ce cas, la base canonique est une bon.

Théorème Fondamental 21 : **Expression du produit scalaire et de la norme dans une bon**
Soit $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une bon de E muni d'un produit scalaire quelconque $\langle .,. \rangle$.

1) Coordonnées d'un vecteur x dans une bon : $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x,e_i \rangle.e_i$

2) Soient $\begin{cases} x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \\ y = y_1e_1 + \cdots + y_ne_n \end{cases}$: $\langle x,y \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = {}^tXY$

3) Soit $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ un vecteur de E : $\|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = {}^tXX$

Preuve 21 :

1. On exprime $x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, puis pour tout $i \in [0 ; n]$ on prend le produit scalaire de x par e_i.
2. Immédiat !
3. Immédiat !

Remarque 22. IMPORTANT !! On se placera toujours, si possible, dans une bon.
En effet, dans une bon, le produit scalaire de 2 vecteurs s'exprime comme le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

`Exemple 21.` $(*)$ $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique et d'un produit scalaire tel que $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ soit bon.

Calculer le produit scalaire $\left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix} \right\rangle$.

Exercice : 7

$(***)$ Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E un espace euclidien de dimension n.
Soit F un sev de E de bon $(a_1, \ldots, a_p)$. On note $A_1, \ldots, A_p$ les matrices colonnes des a_k dans $\mathcal{B}$.

Soit p_F la projection orthogonale sur F. Prouver que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} A_k\ {}^tA_k$.

Théorème 22 : **Propriétés de l'orthogonal d'un sev**
Soit F un sev de E un espace euclidien. Alors

1. $E = F \oplus F^\perp$
2. $\dim F + \dim F^\perp = n$
3. $(F^\perp)^\perp = F$

Preuve 22 :

1. E est euclidien, donc $\dim F < +\infty$. Ce résultat a donc déjà été démontré.
2. Conséquence du résultat précédent.
3. Nous savons déjà que $F \subset (F^\perp)^\perp$. L'égalité des dimensions permet de conclure.

Exercice : 8

$(*)$ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E vérifiant pour tout $(x, y) \in E^2$, $\langle f(x),y\rangle = \langle x,f(y)\rangle$.
Montrer que $\mathrm{Im}\, f = (\ker f)^\perp$.

Exercice : 9

$(*)$ Soit F et G deux sev d'un ev euclidien E.

1. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
2. Montrer que $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Remarque 23.

1. Si F et G sont 2 sev orthogonaux et $\dim E = n$, alors $\dim F + \dim G \leq n$.
   Ainsi, dans $\mathbb{R}^3$, 2 plans vectoriels ne peuvent pas être orthogonaux.
2. Si F et G sont 2 sev orthogonaux alors $F + G = F \oplus G$, et on notera $F \overset{\perp}{\oplus} G$ ce sev.

Définition 13 : **Sous-espaces vectoriels perpendiculaires**
Soient F et G deux sev d'un espace euclidien E.
On dira que F et G sont perpendiculaires si et seulement si $F^\perp$ et $G^\perp$ sont orthogonaux.

Remarque 24. En d'autre termes :

$$\begin{aligned} F \text{ et } G \text{ sont perpendiculaires} &\iff F^\perp \subset G \\ &\iff G^\perp \subset F \end{aligned}$$

Remarque 25. Si F et G sont 2 sev perpendiculaires d'un espace euclidien E, alors $\dim F + \dim G \geq \dim E$.
En particulier dans $\mathbb{R}^3$, 2 droites vectorielles ne peuvent être perpendiculaires.

Proposition 23 : **Caractérisation des hyperplans dans un espace euclidien**
Soit H un sev d'un espace euclidien E. On a alors :

$$H \text{ est un hyperplan de } E \iff \exists n \in E \text{ non nul tel que } H = n^\perp$$

Ainsi, dans E euclidien muni d'une bon e, l'hyperplan (H) d'équation : $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Preuve 23 : par équivalences successives en se plaçant dans une bon.

Théorème Fondamental 24 : **Théorème de Riesz**
Soit E un espace euclidien muni du produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, \mathbb{R}) & \longrightarrow & E \\ f & \mapsto & z_f \end{array}$ telle que $\forall x \in E,\quad f(x) = \langle z_f,x\rangle$ est un isomorphisme d'ev.

Remarque 26. Cela signifie en particulier que $\forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ il existe un unique $z_f \in E$ tel que $\forall x \in E$, $f(x) = \langle z_f, x \rangle$.

Preuve 24 :
1. Existence de l'application :
   (a) Considérons $e = (e_1, \ldots, e_n)$ une bon de E. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i \in E$. On a alors $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i.f(e_i)$.
   Posons $z_f = (f(e_1), \ldots, f(e_n))$ dans la base e.
   Comme e est une bon, l'expression de $f(x)$ s'écrit alors $f(x) = \langle z_f, x \rangle$.
   (b) L'unicité de l'expression ne pose pas de difficulté.
2. Isomorphisme : facile ...

Remarque 27. Pour $a, b \in E$, retenons en particulier le résultat suivant : Si $\forall x \in E$, $\langle a, x \rangle = \langle b, x \rangle$ alors $a = b$

`Exemple 22.` $(*)$
1. Définition du produit vectoriel en dimension 3. (voir la fin du chapitre)
2. Toute forme linéaire f de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ s'écrit sous la forme $f(X) = \mathrm{Tr}(FX)$ avec $F \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

5 Endomorphismes orthogonaux, matrices orthogonales

On considère un **espace euclidien** $(E, \langle ., . \rangle)$ de dimension n.

5.1 Les endomorphismes orthogonaux

Définition 14 : **Endomorphismes orthogonaux**
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

$$u \text{ est un endomorphisme orthogonal} \iff \forall (x, y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de E.

Remarque 28. En d'autres termes, un endomorphisme de E est un endomorphisme orthogonal si et seulement si il conserve le produit scalaire. En particulier, un endomorphisme orthogonal conserve d'orthogonalité.

Théorème 25 : **Caractérisation à l'aide de l'image d'une bon**
Soit $u \in L(E)$ et ϵ une bon de E.

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme orthogonal} \iff \text{l'image de la bon } \epsilon \text{ est une bon}}$$

Preuve 25 : Soit $u \in L(E)$.

$$\begin{aligned} u \text{ est un endomorphisme orthogonal} &\iff \forall (p, q) \in [\![1, n]\!]^2,\ \langle u(\epsilon_p), u(\epsilon_q) \rangle = \langle \epsilon_p, \epsilon_q \rangle \\ &\iff \forall (p, q) \in [\![1, n]\!]^2,\ \langle u(\epsilon_p), u(\epsilon_q) \rangle = \delta_{pq} \\ &\iff u(\epsilon) \text{ bon} \end{aligned}$$

Remarque 29.
1. Pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ soit un endomorphisme orthogonal, il suffit qu'il transforme UNE bon en une bon.
2. Si u transforme UNE bon en une bon, alors il transforme toutes les bon en bon.
3. Les endomorphismes orthogonaux sont donc des automorphismes.

Théorème 26 : **Caractérisation par la conservation de la norme**

$$u \in \mathrm{O}(E) \iff \forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$$

Preuve 26 : Equivalence facile à démontrer en utilisant l'identité de polarisation.

Remarque 30. Un endomorphisme orthogonal est donc aussi appelé une *isométrie vectorielle.*

`Exemple 23.` $(*)$ L'identité et les symétries orthogonales de E sont des endomorphismes orthogonaux.

Exercice : 10

(∗) Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $f(F^\perp) = (f(F))^\perp$.

THÉORÈME 27 : **Groupe orthogonal**
$(\mathrm{O}(E),\circ)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathcal{GL}(E),\circ)$.
On l'appelle le *groupe orthogonal* de E.

Preuve 27 : On montre que $\mathrm{O}(E)$ est une partie non vide de $\mathcal{GL}(E)$ $\left\{\begin{array}{l}\text{stable par la loi de composition}\\ \text{stable par symétrisation}\end{array}\right.$.

Remarque 31. Ce théorème signifie en particulier que :

1. La composée de deux automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal.
2. La bijection réciproque d'un automorphisme orthogonal est un automorphisme orthogonal.

THÉORÈME 28 : **Endomorphisme orthogonal induit**
Si un sev F est stable par $u \in \mathcal{O}(E)$ alors :

1. u induit un endomorphisme orthogonal sur F. $(u_{|F} \in \mathcal{O}(F))$
2. $F^\perp$ est aussi stable par u qui induit ainsi un endomorphisme orthogonal sur $F^\perp$.

Preuve 28 :

1. Pas de difficulté !
2. Soit $x \in F^\perp$, et $y \in F$. Il s'agit de montrer que $\langle u(x),y\rangle = 0$.
   Remarquer que $\exists z \in F$ tel que $y = u(z)$ ...

Remarque 32. Lorsque F est stable par un endomorphisme orthogonal u, alors la matrice de u dans une base e obtenue en réunissant une base de F et une base de $F^\perp$ est une matrice diagonale par blocs.

5.2 Les matrices orthogonales

DÉFINITION 15 : **Matrices orthogonales**
On dit qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si et seulement si :

$$^tAA = I_n \qquad (\text{ ou } A^tA = I_n)$$

On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (ou encore $O(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients réels.

Remarque 33.

1. Une matrice orthogonale est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.
2. Une matrice orthogonale a un déterminant égal à ± 1.

THÉORÈME 29 : **Caractérisation pratique des matrices orthogonales**
Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors A est une matrice orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes $(C_1,\dots,C_n)$ forment *une base orthonormale* pour $\langle .,.\rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire :

$$\forall (p,\,q) \in [1,n]^2, \quad \boxed{\langle Cp,Cq\rangle_{usuel} = \sum_{i=1}^{n} a_{ip}a_{iq} = \delta_{p,q}}$$

Preuve 29 : On exprime la relation ${}^tA.A = I_n$ à l'aide les coefficients des matrices.

Remarque 34. Comme on a aussi $A\,{}^tA = I_n$, alors les vecteurs lignes de A forment aussi une bon.

`Exemple 24.` (∗) Montrer que $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ est orthogonale et calculer A^{-1}.

THÉORÈME 30 : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\,\times)$.

Preuve 30 : Pas de difficulté.

5.3 Matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une bon

THÉORÈME FONDAMENTAL 31 : **La matrice d'une isométrie dans une bon est orthogonale**

Soit E un espace euclidien, $u \in L(E)$ et ε une base orthonormale de E.
Notons $A = \text{Mat}_\varepsilon(u)$.
Alors

$$\boxed{u \text{ est un endomorphisme orthogonal} \iff A \text{ est une matrice orthogonale}}$$

Preuve 31 : Soit $u \in L(E)$ et A sa matrice dans une bon ϵ.
Les vecteurs colonnes C_i de la matrice A sont les coordonnées des vecteurs $u(\epsilon_i)$ dans la bon ϵ.
On a donc : $\forall (p,q) \in [1,n]^2 \quad \begin{cases} \langle u(\epsilon_p), u(\epsilon_q)\rangle = \langle Cp, Cq\rangle_{usuel} \\ \langle \epsilon_p, \epsilon_q\rangle = \delta_{pq} \end{cases}$.
Par conséquent :

$$\begin{array}{llll} \forall (p,q) \in [1,n]^2 & \langle u(\epsilon_p), u(\epsilon_q)\rangle = \langle \epsilon_p, \epsilon_q\rangle & \iff & \langle Cp, Cq\rangle_{usuel} = \delta_{pq} \\ & u \text{ endomorphisme orthogonal} & \iff & A \text{ matrice orthogonale} \end{array}$$

Remarque 35. Attention !! Le résultat précédent est faux si la base ε n'est pas orthonormale.
Considérer par exemple $\varepsilon = (\overrightarrow{i}, 2\overrightarrow{j})$ et s la symétrie orthogonale par rapport à Vect(1,1).

COROLLAIRE 32 : **Caractérisation des matrices de passage entre bon**
Soit e une base orthonormale de E et f une base.
Soit $P = P_{e\to f}$ la matrice de passage entre ces deux bases.
Alors

$$\boxed{f \text{ est une base orthonormale} \iff P \text{ est une matrice orthogonale}}$$

Preuve 32 : Soit e une bon de E et f une base.
On considère u l'endomorphisme de E défini par $\forall k \in [\![1,n]\!]$, $u(e_k) = f_k$.
Soit P la matrice de u dans la bon e. P est aussi la matrice de passage de e vers f.
D'après les théorèmes précédents : $\begin{cases} u \text{ endomorphisme orthogonal} \iff f \text{ bon} \\ u \text{ endomorphisme orthogonal} \iff P \text{ orthogonale} \end{cases}$ CQFD ...

Remarque 36. Si e et f sont 2 bon de E, et $P = P_{e\to f}$ alors $P^{-1} = {}^tP$.
En particulier, la formule de changement de bases s'écrit alors $A_f = {}^tPA_eP$.

Remarque 37. En conclusion, une matrice orthogonale s'interprète :

1. Soit comme la matrice d'un endomorphisme orthogonal dans une bon.
2. Soit comme la matrice de passage d'une bon vers une bon.

Exercice : 11

(∗∗) Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq n$

Aide : Penser à utiliser l'inégalité de Schwarz.

Exercice : 12

(∗∗) Prouver que :

1. Une isométrie vectorielle est une symétrie orthogonale ssi sa matrice dans une bon quelconque est symétrique.
2. Une projection vectorielle est une projection orthogonale ssi sa matrice dans une bon quelconque est symétrique.

6 Espaces euclidiens orientés. Produit mixte

On considère un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $\langle .,. \rangle$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

DÉFINITION 16 : **Orientation**
Soient e et f deux bases de E et la matrice de passage $P = P_{e\mapsto f}$ entre ces deux bases.
On dit que les deux bases e et f définissent la même orientation si et seulement si $\det(P) > 0$.

Orienter l'espace consiste à choisir une base de référence e.
Les bases de même orientation que e sont dites *directes* et les autres *indirectes*.

Remarque 38. Si $e = (e_1, e_2, e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et si l'on choisit l'orientation définie par cette base, alors la base $f = (e_2, e_3, e_1)$ est directe alors que la base $g = (e_1, e_3, e_2)$ est indirecte.

PROPOSITION 33 : **Matrice de passage entre deux bon**
Soient $e = (e_1, \dots, e_n)$ et $f = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E.
Notons $P = P_{e\mapsto f}$ la matrice de passage entre les bases e et f.
Alors :

1. $\det(P) = \pm 1$;
2. Si les bon ont même orientation, alors $\det(P) = +1$.

Preuve 33 : Il suffit de remarquer que P est une matrice orthogonale.

DÉFINITION 17 : **Produit mixte**
Soit E un espace euclidien orienté de dimension n et $\boxed{\varepsilon \text{ une } \textit{bon directe}}$.
Soient $(x_1, \dots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle produit mixte de ces n vecteurs, le scalaire

$$[x_1, \dots, x_n] = \det_\varepsilon(x_1, \dots, x_n)$$

Il est indépendant de la bon directe choisie.

Preuve : Il suffit d'exprimer le déterminant de $(x_1, \dots, x_n)$ dans deux bon directes différentes.

Remarque 39.

1. Parfois, le produit mixte se note aussi : $[x_1, \dots, x_n] = \mathrm{Det}(x_1, \dots, x_n)$.
2. Le produit mixte d'une bond est égal à 1.

COROLLAIRE 34 : Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ une famille de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$$\varepsilon \text{ est une base directe } \iff [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3] > 0$$

Preuve 34 : Immédiat !

Remarque 40.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, le produit mixte de deux vecteurs $[x,y]$ représente l'aire algébrique du parallélogramme défini par ces deux vecteurs.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, le produit mixte de trois vecteurs $[x,y,z]$ représente le volume algébrique du parallélépipède qui s'appuie sur ces trois vecteurs.

7 Produit vectoriel ($\dim E = 3$)

On considère dans cette section, un espace euclidien orienté de dimension 3 : $(E, \langle .,. \rangle)$.

DÉFINITION 18 : **Produit vectoriel**

Soient $(x, y) \in E^2$. L'application $\phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z & \mapsto & [x, y, z] \end{array}$ est une forme linéaire.

D'après le théorème de Riesz, il existe un unique vecteur noté $x \wedge y$ tel que : $\forall z \in E, \quad [x, y, z] = \langle x \wedge y, z \rangle$
Le vecteur $x \wedge y$ est appelé le *produit vectoriel* de x avec y.

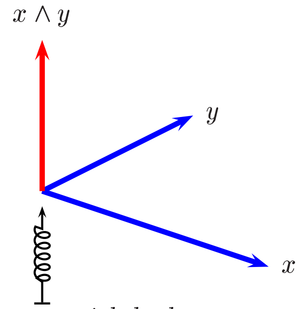

FIG. 1 – *Produit vectoriel de deux vecteurs dans E_3*

Remarque 41. **Rappel des propriétés usuelles du produit vectoriel sur E euclidien de dimension 3**

1. L'application $\begin{array}{cccc} \varphi : & E^2 & \longrightarrow & E \\ & (x,\, y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$ est linéaire par rapport à chaque variable.
2. Antisymétrie : $y \wedge x = -x \wedge y$.
3. x et y sont colinéaires $\Longleftrightarrow x \wedge y = 0$.
4. Si $(x,\, y)$ est un système libre, alors
   (a) $x \wedge y \neq 0$
   (b) $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y.
   (c) $(x,\, y,\, x \wedge y)$ est une base directe de E.
5. Si $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est une base orthonormée directe (bon directe) alors $\begin{cases} \vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j} \end{cases}$.
6. Dans une bon directe : $\vec{x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \vec{y}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$.
7. Formule du double produit vectoriel : $x \wedge (y \wedge z) = \langle x,z \rangle.y - \langle x,y \rangle.z$
8. Identité de Lagrange : $\langle x,y \rangle^2 + \|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2$.
9. Si $x \perp y$ alors $\|x \wedge y\| = \|x\|.\|y\|$. *On peut alors démontrer la réciproque de 5.*
10. Si $(x,\, y)$ est un système orthonormé de E, alors $(x,\, y,\, x \wedge y)$ est une bon directe de E.

Exercice : 13

$(**)$ Démontrer la fomule de Jacobi :

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) + \vec{w} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v}) + \vec{v} \wedge (\vec{w} \wedge \vec{u}) = 0$$