Géométrie élémentaire du Plan

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

27 septembre 2010

1 Points, vecteurs et droites

DÉFINITION 1 : **Plan affine et plan vectoriel**
Le plan peut être considéré comme :

1. un ensemble de points on l'appellera alors le *plan affine*
2. un ensemble de vecteurs on l'appellera alors le *plan vectoriel*

A tout couple de points (A, B) on associe de façon unique un vecteur $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$. On pourra alors noter : $B = A + \overrightarrow{u}$.

Dessin

Points et vecteurs :

DÉFINITION 2 : **Droite vectorielle et droite affine**

1. L'ensemble $\mathcal{D}_{\overrightarrow{u}}$ de tous les vecteurs colinéaires à un vecteur non-nul $\overrightarrow{u}$ est appelé la *droite vectorielle* engendrée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. On la notera : $\mathcal{D}_{\overrightarrow{u}} = \text{Vect}(\overrightarrow{u}) = \{\lambda.\overrightarrow{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

2. L'ensemble des points $\mathcal{D} = \{A + \lambda.\overrightarrow{u} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ où A est un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul, est appelé la *droite affine* $\mathcal{D}$ passant par le point A et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$.
On dit que $\text{Vect}(\overrightarrow{u})$ est la *direction* de $\mathcal{D}$ et on note : $\mathcal{D} = A + \text{Vect}(\overrightarrow{u})$.

Dessin

Droite vectorielle et droite affine :

2 Repérage dans le plan

2.1 Coordonnées cartésiennes

Définition 3 : **Base du plan vectoriel**
Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs du plan, non nuls et non colinéaires.
Alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe deux uniques réels x et y tels que : $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.
(On dit que $\vec{u}$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire de $\vec{i}$ et $\vec{j}$)

1. Le couple $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$ est appelée *base* de l'ensemble des vecteurs du plan (*Plan vectoriel*).
2. Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont *normés* (de norme 1), on dit que la base $\mathcal{B}$ est normée.
3. Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont *orthogonaux*, on dit que la base $\mathcal{B}$ est orthogonale.
4. Si $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont normés et orthogonaux, on dit que la base $\mathcal{B}$ est orthonormée.
5. x et y sont appelés les *coordonnées* de $\vec{u}$ dans la base $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j})$.

On peut orienter le plan en choisissant un sens positif de rotation.
On prendra en général le sens trigonométrique.
Dans ce cas, on dit que la base $\mathcal{B}$ est *directe* si $(\widehat{\vec{i}, \vec{j}}) > 0$.

Remarque 1. Si on a le choix, on se placera plutôt dans une base orthonormale directe.

Définition 4 : **Repère du plan affine**
Soit O un point du plan, et $\mathcal{B}$ une base du plan vectoriel.
Le point O et la base $\mathcal{B}$ forment un *repère du plan* et on note $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$.
O est appelé le *centre* du repère et $\vec{i}$, $\vec{j}$ sont les *vecteurs de base.*

Remarque 2. On dira que le repère $\mathcal{R}$ est orthonormé si la base $\mathcal{B}$ l'est.

Théorème 1 : **Coordonnées d'un point dans un repère**
Soit M un point quelconque du plan munis d'un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
Alors il existe un unique couple de réels x et y tels que : $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j}$.

1. x et y sont appelées les *coordonnées* de M dans $\mathcal{R}$.
2. x est appelée l'*abscisse* de M
3. y est appelée l'*ordonnée* de M

On note $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ ou plus simplement $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ou $M(x, y)$ lorsqu'il n'y a pas ambiguïté sur le repère utilisé.

Preuve 1 : Conséquence immédiate du premier théorème.

Remarque 3. On peut identifier les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ au plan affine muni d'un repère orthonormal ou au plan vectoriel muni d'une base orthonormale.

Base $(\vec{i}, \vec{j})$	Repère du plan $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$	Plan complexe

Exemple 1. Dans le plan, montrer que les médianes d'un triangle ABC se coupent en l'isobarycentre de $(A,\, B,\, C)$.

Exercice : 1

(∗) Dans le plan, on considère deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sécantes. Soient $\left\{\begin{array}{l} A_1,\, B_1 \text{ et } C_1 \text{ trois points de } \mathcal{D}_1 \\ A_2,\, B_2 \text{ et } C_2 \text{ trois points de } \mathcal{D}_2 \end{array}\right.$.

Montrez que si les droites $(A_1,\, B_2)$ et $(A_2,\, B_1)$ sont parallèles ainsi que les droites $(B_1,\, C_2)$ et $(B_2,\, C_1)$, alors les droites $(A_1,\, C_2)$ et $(A_2,\, C_1)$ sont également parallèles.

Théorème 2 : **Formules de changement de base et de repère**

Considérons les deux bases $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{B} = (\vec{i},\, \vec{j}) \text{ (ancienne)} \\ \mathcal{B}' = (\vec{I},\, \vec{J}) \text{ (nouvelle)} \end{array}\right.$ et les deux repères cartésiens $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{R} = (O,\mathcal{B}) \\ \mathcal{R}' = (\Omega,\mathcal{B}') \end{array}\right.$

La nouvelle base et le nouveau repère sont définis par : $\Omega\begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et $\vec{I}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}_{\mathcal{B}},\ \vec{J}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

1/ Notons : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$ alors : $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = a.X + c.Y \\ y = b.X + d.Y \end{array}\right.}$

2/ Notons : $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ *et* $M\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$ alors : $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x_\Omega + a.X + c.Y \\ y = y_\Omega + b.X + d.Y \end{array}\right.}$

Preuve 2 :

1. Il suffit de remarquer que : $\vec{u} = \vec{u} \iff x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = X\,\vec{I} + Y\,\vec{J} \iff \ldots.$
2. Il suffit de remarquer que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_\Omega \\ y_\Omega \end{pmatrix} + X\,\vec{I} + Y\,\vec{J}.$

Remarque 4. Lorsque les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont orthogonales directes telles que $\theta = (\widehat{\vec{i},\vec{I}})$, alors on a les formules de changement de repère :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x = x_\Omega + \cos\theta.X - \sin\theta.Y \\ y = y_\Omega + \sin\theta.X + \cos\theta.Y \end{array}\right.}$$

Dessin

Changement de repère :

Remarque 5. Pour déterminer $\left\{\begin{array}{l} X \\ Y \end{array}\right.$ en fonction de $\left\{\begin{array}{l} x \\ y \end{array}\right.$, il suffit de résoudre le système.

Exemple 2. En choisissant vos propres données, déterminer l'équation cartésienne d'une droite dans un nouveau repère.

L'exercice suivant donne une application du changement de repère (reconnaissance de la nature d'une courbe).

Exercice : 2

(∗) Le plan affine est muni du repère $\mathcal{R}(O,\, \vec{i},\, \vec{j})$ orthonormé direct.

Soit $\mathcal{R}'$ le repère de centre $\Omega\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$, et dont la base $(\vec{I},\, \vec{J})$ est obtenue par rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ de $(\vec{i},\, \vec{j})$.

Soit (H) l'ensemble des points $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ du plan vérifiant : $x^2+y^2+6xy-8x-8y+6=0$.

Déterminer la nature de (H) en recherchant son équation dans $\mathcal{R}'$.

2.2 Coordonnées polaires d'un point

Dans cette partie, le plan affine est muni d'un repère cartésien orthonormé direct $\mathcal{R}$.

Dessin

Coordonnées Polaires d'un point :

Définition 5 : **Repère polaire**

On définit les deux vecteurs $\begin{cases}\overrightarrow{u}_\theta=\cos\theta\,\overrightarrow{i}+\sin\theta\,\overrightarrow{j}\\ \overrightarrow{v}_\theta=-\sin\theta\,\overrightarrow{i}+\cos\theta\,\overrightarrow{j}\end{cases}$.

Le repère $\mathcal{R}_\theta=\left(O,\overrightarrow{u}_\theta,\overrightarrow{v}_\theta\right)$ s'appelle le *repère polaire* ou parfois le repère *mobile*.

Remarque 6. Dans le plan complexe, $\overrightarrow{u}_\theta$ a pour affixe $e^{i\theta}$ et $\overrightarrow{v}_\theta$ a pour affixe $i.e^{i\theta}$.

Théorème 3 : **Coordonnées polaires d'un point**

Lorsque $M\in\mathcal{P}$, il existe un couple $(\rho,\,\theta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{OM}=\rho\overrightarrow{u}_\theta$.

On a la relation : $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ et la donnée de $(\rho,\,\theta)$ définit donc la position exacte de M.

Tout couple $(\rho,\,\theta)$ tels que $\overrightarrow{OM}=\rho\overrightarrow{u}_\theta$ est appelé *coordonnées polaires* de M dans $\mathcal{R}$.

Preuve 3 : On considère $\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\|OM\|}=\overrightarrow{u}_\theta$. L'existence de ρ et θ est alors acquise.

Remarque 7.

1. Contrairement aux coordonnées cartésiennes, les coordonnées polaires ne sont pas uniques.
   Ainsi, les deux couples de coordonnées polaires $(\rho,\,\theta)$ et $(-\rho,\,\theta+\pi)$ définissent le même point.
   On aura unicité des coordonnées polaires si l'on impose $\rho\in\mathbb{R}^+$ et $\theta\in[0,2\pi[$.
2. Le point $M(\rho,\,\theta)$ admet pour coordonnées cartésiennes $\begin{cases}x=\rho\cos\theta\\ y=\rho\sin\theta\end{cases}$ et pour affixe $z=\rho e^{i\theta}$.

Définition 6 : **Equation polaire d'un ensemble**

On appelle *équation polaire* d'un sous-ensemble Δ du plan toute relation de la forme $f(\rho,\,\theta)=0$ telle que :

$$M(\rho,\,\theta)\in\Delta\iff f(\rho,\,\theta)=0$$

Proposition 4 : **Equation polaire d'une droite**
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R}$.

1. Soit $\mathcal{D}_a$ la droite d'éq : $x = a$. $\quad M(\rho, \theta) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \boxed{\rho.\cos\theta = a} \quad (1)$
2. Soit $\mathcal{D}_b$ la droite d'éq : $y = b$. $\quad M(\rho, \theta) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \boxed{\rho.\sin\theta = b} \quad (2)$
3. Soit $\mathcal{D}_c$ la droite d'éq : $a.x + b.y = c$ avec $\left\{\begin{array}{l} a \neq 0 \\ b \neq 0 \end{array}\right.$. $\quad M(\rho, \theta) \in \mathcal{D} \Longleftrightarrow \boxed{\rho(a.\cos\theta + b.\sin\theta) = c} \quad (3)$

(1), (2) et (3) sont appelées les *équations polaires* des droites $\mathcal{D}_a$, $\mathcal{D}_b$ et $\mathcal{D}_c$.

Preuve 4 : Il suffit de substituer $\left\{\begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array}\right.$ dans les équations cartésiennes des droites.

Théorème 5 : **Equation Polaire d'une droite oblique ne passant pas par O**
$\mathcal{D}$ est une droite oblique (ne passant pas par O) ssi elle admet une équation polaire de la forme :

$$\boxed{\rho = \frac{A}{\cos(\theta - \theta_0)}} \quad \text{où} \left\{\begin{array}{l} \theta_0 = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH}) \text{ où } H \text{ est le projeté orthogonal de } O \text{ sur } \mathcal{D} \\ A \text{ est la distance de } O \text{ à } \mathcal{D} \end{array}\right.$$

Preuve 5 : On pourra effectuer un raisonnement géométrique.

Remarque 8. Une droite oblique passant par O admet tout simplement une équation de la forme $\theta = \theta_0$.

Verticale	Horizontale	Droite oblique	Droite passant par O

Proposition 6 : **Equation polaire d'un cercle passant par O**
Le plan est muni d'un repère orthonormé directe $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R et de centre Ω passant par l'origine O. Appelons θ_0 l'angle $(\widehat{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{O\Omega}})$.
On a alors :

$$M(\rho, \theta) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow \boxed{\rho = 2R.\cos(\theta - \theta_0)} \quad (1) \quad \textit{équation polaire de } \mathcal{C}$$

Preuve 6 : On pourra effectuer un raisonnement géométrique.

Dessin

Equation polaire d'un cercle passant par O

Corollaire 7 : $\mathcal{C}$ est un cercle passant par O ssi il admet une équation polaire de la forme

$$\boxed{\rho = a.\cos\theta + b.\sin\theta}$$

Preuve 7 : Il suffit de prouver que les équations $\rho = a.\cos\theta + b.\sin\theta$ et $\rho = 2.R.\cos(\theta - \theta_0)$ sont équivalentes.

`Exemple 3.` $(*)$ Déterminer une équation cartésienne du cercle d'équation polaire $\rho = 4\cos\theta + 2\sin\theta$.
En déduire les caratéristiques de ce cercle.

3 Le Produit Scalaire de deux vecteurs

Définition 7 : **Définition Géométrique**
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan.
On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par :

1. $\vec{u}.\vec{v} = ||\vec{u}||.||\vec{v}||.\cos(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}})$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.
2. $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si l'un des 2 vecteurs est nul.

Remarque 9.
1. Cette définition nous donne la caractérisation bien connue : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v} = 0$.
2. On pourra aussi retenir la formule suivante : $\boxed{\cos(\widehat{\vec{u},\ \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{||\vec{u}||.||\vec{v}||}}$ si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls.

Produit scalaire de deux vecteurs

Remarque 10. Constatons que l'on a alors : $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ ou encore que $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$

Proposition 8 : Le produit scalaire de deux vecteurs admet les propriétés suivantes.
Pour tout réels λ et μ et pour tout vecteurs $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

1. Symétrie (ou commutativité) : $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
2. Bilinéarité : $\begin{cases} (\lambda\vec{a} + \mu\,\vec{b}).\vec{v} = \lambda(\vec{a}.\vec{v}) + \mu(\vec{b}.\vec{v}) & (1) \\ \vec{u}.(\lambda\vec{a} + \mu\,\vec{b}) = \lambda(\vec{u}.\vec{a}) + \mu(\vec{u}.\vec{b}) & (2) \end{cases}$

Preuve 8 :
1. Compte-tenu de la définition, la symétrie est immédiate.
2. Pour la bilinéarité, compte-tenu de la symétrie, il suffit de prouver (1). On procède en 3 temps :
   (a) On démontre que $(\lambda\vec{a}).\vec{v} = \lambda.(\vec{a}.\vec{v})$
   (b) On démontre géométriquement que $(\vec{u} + \vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w} + \vec{v}.\vec{w}$
   (c) On en déduit alors la propriété !

Proposition 9 : **Expression du produit scalaire dans une base orthonormale**

Si le plan vectoriel est muni d'une **bon** $\mathcal{B}$. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.

Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x.x' + y.y'}$$

Preuve 9 : Il suffit d'exprimer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans $\mathcal{B}$ et d'appliquer la bilinéarité.

Corollaire 10 : **Distance de deux points**
Dans un repère orthonormé, la distance d'un point $A(x_a, y_a)$ à un point $B(x_b, y_b)$ est donc :

$$AB = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

Preuve 10 : Pas de difficulté.

Remarque 11. Dans le plan complexe, si $\begin{cases} u \text{ est l'affixe de } \overrightarrow{u} \\ v \text{ est l'affixe de } \overrightarrow{v} \end{cases}$ alors : $\boxed{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \mathrm{Re}(u.\bar{v})}$

Remarque 12. Dès qu'il s'agira de calculer des distances ou d'utiliser l'expression du produit scalaire à l'aide des coordonnées, on prendra bien soin de se placer dans un repère orthonormé.

4 Le Déterminant de deux vecteurs

Définition 8 : **Définition Géométrique**
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On définit le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par :

1. $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls.
2. $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = 0$ si l'un des 2 vecteurs est nul.

Remarque 13.

1. $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est du signe de $(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}})$ si on considère les angles de vecteurs dans $]-\pi;\pi]$.
2. $|\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})|$ représente l'aire du parallèlogramme construit sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
3. On pourra aussi retenir la formule suivante : $\boxed{\sin(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})}{||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||}}$ si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls.

Dessin

PROPOSITION 11 : Le déterminant de deux vecteurs admet les propriétés suivantes.
$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et pour tout vecteur $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

1. Antisymétrie : $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = -\det(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})$
2. Bilinéarité : $\begin{cases} \det(\lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b}, \overrightarrow{v}) = \lambda \det(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v}) + \mu \det(\overrightarrow{b}, \overrightarrow{v}) \\ \det(\overrightarrow{u}, (\lambda \overrightarrow{a} + \mu \overrightarrow{b})) = \lambda \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{a}) + \mu \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{b}) \end{cases}$

Preuve 11 :
1. L'antisymétrie est immédiate compte-tenu de la définition.
2. Pour la bilinéarité, on procède comme pour le produit scalaire.

PROPOSITION 12 : **Expression du déterminant dans une base orthonormale directe**
Si le plan vectoriel est muni d'une bon directe $\mathcal{B}$. Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
Alors :

$$\boxed{\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = x.y' - y.x'} = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$$

Preuve 12 : Il suffit d'exprimer $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ dans la bon $\mathcal{B}$ et d'utiliser la bilinéarité.

Remarque 14. Dans le plan complexe, si $\begin{cases} u \text{ est l'affixe de } \overrightarrow{u} \\ v \text{ est l'affixe de } \overrightarrow{v} \end{cases}$ alors : $\boxed{\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \mathrm{Im}(u.\bar{v})}$.

Ainsi : $\begin{cases} \overrightarrow{u}(u) \text{ et } \overrightarrow{v}(v) \text{ colinéaires} \iff u\bar{v} \in \mathbb{R} \\ \overrightarrow{u}(u) \text{ et } \overrightarrow{v}(v) \text{ perpendiculaires} \iff u\bar{v} \in i\mathbb{R} \end{cases}$

Remarque 15. Dès qu'on souhaitera utiliser l'expression du déterminant à l'aide des coordonnées, on prendra soin de se placer dans un repère orthonormale direct.

THÉORÈME FONDAMENTAL 13 : **Déterminant et colinéarité**
Soient $\overrightarrow{u}(x, y)$ et $\overrightarrow{v}(x', y')$ deux vecteurs du plan dans une **base quelconque**. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires} &\iff \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \\ &\iff xy' - yx' = 0 \end{aligned}$$

Preuve 13 :
1. La première équivalence est immédiate d'après la définition du déterminant.
2. La deuxième est une conséquence directe de la démonstration de la proposition précédente.

Remarque 16. Si A, B et C sont trois points du plan on a alors : A, B et C sont alignés $\iff \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

5 Droites et Cercles du plan affine

5.1 Droites affines

DÉFINITION 9 : **Equations cartésiennes et équations paramétriques**
Soit $\mathcal{D}$ la droite (affine) passant par un point A et dirigée par un vecteur non nul $\overrightarrow{u}$.
Soit M un point du plan.
Par définition : $M \in \mathcal{D} \iff \overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires

1. Avec la caractérisation de la colinéarité à l'aide des coordonnées : $M \in \mathcal{D} \iff \begin{vmatrix} x - x_A & x_{\overrightarrow{u}} \\ y - y_A & y_{\overrightarrow{u}} \end{vmatrix} \iff \dots$
   La relation obtenue est appelée une *équation cartésienne* de $\mathcal{D}$
2. Avec un paramètre : $M \in \mathcal{D} \iff$ il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda.\overrightarrow{u} \iff \dots$
   Les relations obtenues pour les coordonnées sont appelées *équations paramétriques* de $\mathcal{D}$

`Exemple 4.` Déterminer $\left\{\begin{array}{l}\text{une équation cartésienne}\\ \text{des équations paramétriques}\end{array}\right.$ de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Remarque 17. **Equation cartésienne d'une droite**

1. Une droite affine admet donc une équation de la forme : $ax+by+c=0$ avec $(a,\, b)\neq(0,\, 0)$.
2. L'ensemble des points $M(x,\, y)$ vérifiant une relation $\left\{\begin{array}{l}ax+by+c=0\\ (a,\, b)\neq(0,\, 0)\end{array}\right.$ est une droite dirigée par $\overrightarrow{u}(-b,\, a)$.
3. Une droite admet une infinité d'équations cartésiennes, toutes proportionnelles les unes aux autres.

Remarque 18. **Equations paramétriques d'une droite**

1. Une droite affine admet donc des équations paramétriques de la forme : $\left\{\begin{array}{l}x=\alpha+\lambda.a\\ y=\beta+\lambda.b\end{array}\right.$.
2. L'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\left\{\begin{array}{l}x=\alpha+\lambda.a\\ y=\beta+\lambda.b\end{array}\right.$ avec $\left\{\begin{array}{l}\lambda\in\mathbb{R}\\ (a,\, b)\neq(0,\, 0)\end{array}\right.$ est une droite $\left\{\begin{array}{l}\text{dirigée par } \overrightarrow{u}(a,\, b)\\ \text{passant par } A(\alpha,\, \beta)\end{array}\right.$.
3. Une droite admet une infinité d'équations paramétriques.

Proposition 14 : **Equation cartésienne d'une droite orthogonale à un vecteur**
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par un point A et orthogonale au vecteur non nul $\overrightarrow{u}$.
Soit $M(x,\, y)$ un point du plan muni d'un **repère orthonormé**.
On a alors :

$$M\in\mathcal{D}\iff\overrightarrow{AM}\text{ et }\overrightarrow{u}\text{ sont orthogonaux}\iff\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{u}=0\quad(1)$$

On obtient alors une équation cartésienne d'une telle droite en exprimant la relation (1) a l'aide des coordonnées.

`Exemple 5.` Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormé.
Déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathcal{D}$ passant par $A\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$ et orthogonale à $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.

Remarque 19. Dans un repère orthonormé, une droite d'équation cartésienne $ax+by+c=0$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{u}(a,\, b)$.

Proposition 15 : **Distance d'un point à une droite du plan**

Si $\left\{\begin{array}{l}\mathcal{D}\text{ est la droite }\left\{\begin{array}{l}\text{passant par } A\\ \text{dirigée par } \overrightarrow{u}\end{array}\right.\\ M\text{ est un point du plan}\end{array}\right.$ alors : $\boxed{d(M,\mathcal{D})=\dfrac{\left|\det(\overrightarrow{AM},\, \overrightarrow{u})\right|}{\|\overrightarrow{u}\|}}$

Preuve 15 : L'expression du déterminant (en valeur absolue) fait apparaître la distance du point à la droite.

Dessin

Distance d'un point à une droite

Corollaire 16 : Soit $\left\{\begin{array}{l}\text{une droite } \mathcal{D}: ax+by+c=0\\ \text{un point de plan } M(x,\, y)\end{array}\right.$. Alors dans un ron : $\boxed{d(M,\mathcal{D})=\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

Preuve 16 : Cette formule se déduit du résultat précédent en remarquant que $\overrightarrow{u}(-b, a)$ dirige la droite $\mathcal{D}$ et en introduisant un point $M_0 \in \mathcal{D}$.

Proposition 17 : **Equation normale d'une droite**
On munit le plan d'un rond $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.
Toute droite $(\mathcal{D})$ admet une équation cartésienne unique de la forme : $\boxed{\cos\theta.x + \sin\theta.y = e}$ avec $e \geq 0$.

1. Cette équation est appelée l'*équation normale* de $\mathcal{D}$
2. Interprétation géométrique des paramètres :
   (a) e représente la distance de O à $(\mathcal{D})$
   (b) θ représente l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH})$ où H est le projeté orthogonal de O sur $(\mathcal{D})$

Preuve 17 :

1. On montre que parmi toutes les équations cartésiennes de $(\mathcal{D})$ $(\lambda.ax + \lambda.by = \lambda c)$ une seule est de la forme voulue.
2. Pas de difficulté pour e
3. On montre facilement que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH}) = \theta\ [\pi]$ en vérifiant que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix} \ // \ \overrightarrow{OH}$.
   On montre que $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OH}) = \theta\ [2\pi]$ en remarquant que $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{OH} = e > 0$.

Dessin

Equation normale d'une droite

`Exemple 6.` $(*)$ Le plan est ici muni d'un repère orthonormé. Les questions suivantes sont indépendantes :

1. Déterminer l'équation normale de la droite d'équation cartésienne : $x - y + 3 = 0$.
2. Soient les points $A(1, -1)$, $B(2, 3)$, $C(1, 6)$ et $D(0, 2)$. Déterminer l'aire du parallèlogramme ABCD.
3. Déterminer les droites dirigées par $2\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j}$ et situées à une distance $\sqrt{5}$ de $A(1, 1)$.

Exercice : 3

$(*)$ Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et A un point du plan. Soit une application f : Plan $\mapsto \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}$.
On appelle "ligne de niveau k" de f l'ensemble des points M du plan tels que $f(M) = k$.

Déterminer les lignes de niveaux des applications : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \overrightarrow{u}.\overrightarrow{AM} \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AM}) \end{array}$

5.2 Cercles

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R}$.

Proposition 18 : Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon R.

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = R^2$$

L'équation obtenue est appelée *équation cartésienne* de $\mathcal{C}$.

Preuve 18 : On a : $M(x, y, z) \in \mathcal{C} \Longleftrightarrow M\Omega = R \Longleftrightarrow M\Omega^2 = R^2 \Longleftrightarrow \ldots.$

Remarque 20.
1. L'équation d'un cercle est donc de la forme : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.
2. Dans le repère $\mathcal{R}(\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation cartésienne $X^2 + Y^2 = R^2$.

PROPOSITION 19 : Réciproquement :

L'ensemble des points vérifiant une relation de la forme $\boxed{x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0}$ est $\begin{cases} \text{soit un cercle} \\ \text{soit un point} \\ \text{soit } \emptyset \end{cases}$.

Preuve 19 : Il suffit de réduire l'équation ...

Remarque 21. le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.
Exprimée dans un repère orthonormé, cette relation nous donne une équation du cercle.
Que dire de l'ensemble des points du plan vérifiant une relation de la forme $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$?

`Exemple 7.` $(*)$ Le plan est ici muni d'un repère orthonormé.
1. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $\Omega(3, -2)$ et de rayon $R = 2$.
2. Déterminer une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(3, -1)$ et $B(4,0)$.
3. Caractériser l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées vérifient l'équation : $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 1 = 0$

Exercice : 4

$(**)$ Dans les deux questions suivantes, vous veillerez à choisir correctement le repère.
1. Etudiez analytiquement la nature de l'intersection d'un cercle et d'une droite.
2. Etudiez analytiquement la nature de l'intersection de deux cercles.

Exercice : 5

$(*)$ Questions indépendantes :
1. Soient A et B deux points distincts du plan et un réel $k > 0$.
   Déterminer l'ensemble des points vérifiant : $d(M, B) = k.d(M, A)$
2. Déterminer l'ensemble des complexes z vérifiant $\dfrac{|z-i|}{|z+1|} = 2$.

.

PROPOSITION 20 : **CNS pour qu'une droite soit tangente à un cercle**
Soit $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{C}$ un cercle de centre Ω et de rayon $R > 0$.
On dit que $\mathcal{D}$ est tangente à $\mathcal{C}$ si et seulement si $\mathrm{Card}(\mathcal{D} \cap \mathcal{C}) = 1$.
On a alors la caractérisation suivante :

$$\boxed{\mathcal{D} \text{ est tangente à } \mathcal{C} \quad \text{si et seulement si} \quad d(\Omega, \mathcal{D}) = R}$$

Preuve 20 : Résultat démontré dans un exercice précédent.

Exercice : 6

$(**)$ Soient A et B deux points distincts du plan.

Etudier les lignes de niveau de l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\ [\pi] \end{array}$.

Aide : On pourra se placer dans un repère tel que $A(\alpha, 0)$ et $B(-\alpha, 0)$ puis remarquer que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \lambda[\pi] \Longleftrightarrow \arg((z+\alpha)(\bar{z}-\alpha)e^{-i\lambda}) = 0[\pi] \Longleftrightarrow \dots$$

COROLLAIRE 21 : **Ensemble des points vérifiant** $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = k\ [\pi]$
Soient A et B deux points distincts du plan et $k \in \mathbb{R} \backslash \pi\mathbb{Z}$.
L'ensemble des points vérifiant $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = k\ [\pi]$ est le cercle :
- de centre Ω situé sur la médiatrice de $[AB]$ et tel que $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) = 2k\ [\pi]$.
- de rayon $R = \Omega A$.
- privé de A et B

Preuve 21 : Conséquence de l'étude menée dans l'exercice précédent.

COROLLAIRE 22 : **CNS de cocyclicité ou d'alignement**
Quatres points du plan A, B, C et D sont alignés ou cocycliques si et seulement si on a la relation :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})[\pi]$$

Preuve 22 : Conséquence de l'étude menée dans l'exercice précédent.

CNS de cocyclicité ou d'alignement

`Exemple 8.` Déterminer une CNS d'alignement ou de cocyclicité de quatre points exprimée à l'aide des affixes de ces points.

Exercice : 7

($**$) Déterminer les complexes z tels que les points d'affixes $a = 1$, $b = z$, $c = 1/z$ et $d = 1 - z$ soient alignés ou cocycliques.