Intégration

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

5 février 2011

1 Construction de la notion d'intégrale

Cette partie a pour objectif de définir correctement la notion d'*intégrale de Riemann* d'une fonction **continue par morceaux** sur un segment. Les théorèmes énoncés ici servent à cette construction et auront peu d'utilisation pratique.

1.1 Intégrale d'une fonction en escalier

Définition 1 : **Subdivision**
On appelle subdivision σ du segment $[a,b]$ tout sous-ensemble fini de $[a,b]$ contenant les éléments a et b.
On ordonnera ces éléments et l'on écrira $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ les éléments de cette subdivision.

Remarque 1. Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions du segment $[a,b]$, on peut introduire la subdivision $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ qui est *plus fine* que σ_1 et que σ_2 (c'est à dire telle que $\sigma_1 \subset \sigma$ et $\sigma_2 \subset \sigma$).

Subdivisions d'un segment

Définition 2 : **Fonction en escalier**
Une fonction $\varphi \in \mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ est *en escalier* s'il existe une subdivision σ de $[a,b]$: $a < x_1 \ldots < x_n = b$ telle que φ soit constante (égal à λ_i) sur chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$.
La subdivision σ est dite *subordonnée* à la fonction φ.
On notera $\mathcal{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier.

Fonction en escalier

Remarque 2.

1. Si σ est une subdivision associée à la fonction en escalier φ, alors toute subdivision plus fine que σ (c'est à dire, qui inclus σ) est également subordonée à φ.
2. L'ensemble des subdivisions subordonnées à φ admet un plus petit élément (au sens de l'inclusion : $\sigma_a \subset \sigma_b$) que l'on appellera la *subdivision minimale*. Vous vérifierez que cet ensemble n'est pas totalement ordonné !!

Remarque 3. Une fonction constante est une fonction en escalier.

Proposition 1 : **Algèbre des fonctions en escalier**
L'ensemble $\mathcal{E}([a,\ b])$ est une sous-algèbre de l'algèbre $\big(\mathcal{F}([a,\ b]),\ +\ ,\ \times\ ,\ \cdot\big)$ des fonctions définies sur $[a,\ b]$.

Preuve 1 : On démontre que $\begin{cases} (\mathcal{E}([a,\ b]),\ +\ ,\ .) \text{ est un espace vectoriel} \\ (\mathcal{E}([a,\ b]),\ +\ ,\ \times) \text{ est un anneau} \\ \forall f,\ g \in \mathcal{E}([a,\ b]) : \quad \lambda.(f \times g) = (\lambda.f) \times g = f \times (\lambda.g) \end{cases}$.

Remarque 4. En particulier, cet ensemble est donc stable par $+$, $\times$ et par la mutiplication par un réel.

Définition 3 : **Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier**

Soit σ une subdivision subordonnée à la fonction φ sur laquelle : $\quad \forall x \in]x_i,\ x_{i+1}[,\ \varphi(x) = \lambda_i$

On appelle intégrale de Riemann de la fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([a,\ b],\ \mathbb{R})$, le réel :

$$\boxed{\int_{[a,\ b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)}$$

IMPORTANT : Cette quantité est indépendante de la subdivision σ subordonnée à φ.

Intégrale d'une fonction en escalier

Remarque 5.
1. $\int_{[a,\ b]} \varphi$ est indépendante des valeurs $\varphi(x_i)$ où $i \in [\![0,n]\!]$.
2. Si φ est constante et égale à M, alors $\int_{[a,b]} \varphi = M.(b-a)$.
3. Si $\varphi \geq 0$ sur $[a,\ b]$ alors $\int_{[a,b]} \varphi$ représente l'aire (en unité^2) de la portion du plan comprise entre $\begin{cases} \text{la courbe} \\ \text{l'axe } O_x \end{cases}$.

Théorème 2 : **Propriétés**
Soient φ et ψ deux fonctions en escalier sur $[a,\ b]$ (avec $a < b$) :
1. **Forme linéaire** : l'application $\varphi \mapsto \displaystyle\int_{[a,\ b]} \varphi$ est une forme linéaire sur $\mathcal{E}([a,\ b],\mathbb{R})$
2. **Positivité** : si φ est une fonction positive sur $[a,\ b]$ $(*)$, alors : $\displaystyle\int_{[a,\ b]} \varphi \geq 0$
3. **Chasles** : si $a < c < b$ alors : $\displaystyle\int_{[a,\ b]} \varphi = \int_{[a,\ c]} \varphi + \int_{[c,\ b]} \varphi$.
4. **Majoration** : on a la majoration suivante : $\displaystyle\Big|\int_{[a,\ b]} \varphi\Big| \leq \int_{[a,\ b]} |\varphi|$
5. **Croissance** : si $\varphi \leq \psi$ $(*)$, alors : $\displaystyle\int_{[a,\ b]} \varphi \leq \int_{[a,\ b]} \psi$.

$(*)$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points*

Preuve 2 : Ce sont des résultats intermédiaires dont les démonstrations ne présentent pas d'intérêt particulier.

1.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

Définition 4 : **Fonction continue par morceaux**
Soit une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.
On dit qu'elle est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$ du segment $[a, b]$ telle que :

1. La restriction f_i de la fonction f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, $(0 \leq i \leq n-1)$ est continue
2. La restriction f_i de la fonction f à chaque intervalle $]x_i, x_{i+1}[$, possède une limite $\begin{cases} \text{à droite en } x_i \\ \text{à gauche en } x_{i+1} \end{cases}$.

Fonction continue par morceaux

Remarque 6. On montre que l'ensemble $\mathcal{C}_m([a, b])$ des fonctions continues par morceaux est une sous-algèbre de l'algèbre $\big(\mathcal{F}([a, b], \mathbb{R}), +, \times, \cdot\big)$ des fonctions définies sur le segment $[a, b]$. En particulier, cet ensemble est donc stable par $+$, $\times$ et par la mutiplication par un réel.

Théorème Fondamental 3 :
Encadrement d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier
Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a, b]$ telles que :

$$\forall x \in [a, b] \quad \begin{cases} \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \\ 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon \end{cases}$$

Encadrement d'une fonction continue par deux fonctions en escalier

Preuve 3 :

1. On commence par prolonger f en $\widetilde{f}$ sur tous les intervalles de la subdivision associée à f.
2. $\widetilde{f}$ étant continue sur chacun des segments de la subdivision, on peut appliquer le théorème de Heine.
3. Cela nous permet de définir pour tout $\varepsilon > 0$ les fonctions φ et ψ recherchées.

Remarque 7. On peut trouver les fonctions en escalier φ et ψ pour un ϵ aussi petit que l'on veut en choisissant une subdivision de $[a; b]$ suffisamment fine.

THÉORÈME FONDAMENTAL 4 : **Intégrale d'une fonction continue par morceaux**
Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,\, b])$.

On note : $$I(f) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \varphi \leq f}} \int_{[a,b]} \varphi \quad \text{et} \quad S(f) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \psi \geq f}} \int_{[a,b]} \psi$$

On a alors $I(f) = S(f)$ et cette valeur commune I est appelée :

intégrale de f sur le segment [a,b] : $$\boxed{\int_{[a,b]} f = I(f) = S(f)}$$

Preuve 4 :
1. On démontre facilement l'existence de $I(f)$ et $S(f)$ par le théorème de la borne sup et inf.
2. Grâce au théorème précédent, on démontre que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|I(f) - S(f)| \leq \varepsilon$.

Remarque 8.
1. L'intégrale ainsi définie est appelée *intégrale de Riemann* d'une fonction f continue par morceaux.
2. Il existe d'autres types d'intégrales qui ne sont pas au programme (intégrale de Lebesgue - 1902).
3. Toutes les fonctions continues par morceaux (et donc à fortiori les fonctions continues) sont intégrables au sens de Riemann.
4. $\int_{[a,\, b]} f$ est indépendante des valeurs $f(x_i)$ où $\{x_i\}_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une subdivision subordonnée à f.
5. Deux fonctions continues par morceaux sur $[a,\, b]$ qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points ont même intégrale de Riemann.
6. Si $f \geq 0$ sur $[a,\, b]$, alors $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire de la portion du plan comprise entre $\begin{cases} \text{la courbe} \\ \text{l'axe } O_x \end{cases}$.

Remarque 9. **Contre-exemple**
Il existe des fonctions bornées non-intégrables au sens de Riemann.
Considérons par exemple la fonction caractéristique des rationnels sur $[0,\, 1]$ définie par :

$$\chi : \begin{array}{ccc} [0,\, 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

On montre en effet facilement que $I(\chi) \leq 0$ et $S(\chi) \geq 1$.
Pourtant, cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue et son intégrale sur $[0,\, 1]$ est égale à 1.

THÉORÈME 5 : **Propriétés fondamentales de l'intégrale**
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,\, b]$ (avec $a < b$).

1. **Linéarité :** $I : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_m([a,\, b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[a,\, b]} f \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_m([a,b])$
2. **Positivité :** si $\forall x \in [a,\, b],\ f(x) \geq 0$ $(*)$, alors : $\displaystyle\int_{[a,\, b]} f \geq 0$
3. **Chasles :** si $a < c < b$, alors : $\displaystyle\int_{[a,\, c]} f + \int_{[c,\, b]} f = \int_{[a,b]} f$
4. **Majoration** : on a la majoration suivante : $\displaystyle\left|\int_{[a,\, b]} f\right| \leq \int_{[a,\, b]} |f|$
5. **Croissance** : si $f \leq g$ $(*)$, alors : $\displaystyle\int_{[a,\, b]} f \leq \int_{[a,\, b]} g$

$(*)$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points*

Preuve 5 : Il s'agit d'étendre par passage à la limite les propriétés connues pour les fonctions en escalier. Compte-tenu de la lourdeur de ces démonstrations, nous admettrons les résultats précédentes.

2 Notation définitive et majorations fondamentales d'intégrales.

Tous les théorèmes importants de ce chapitre sont dans les parties suivantes ! Les démonstrations des propriétés de base ont été vu dans la partie consacrée à la construction de l'intégrale de Riemann.

Définition 5 : **N**otations
Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a, b]$. On note selon la position de a par rapport à b :

1) $a < b$ $\quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f$
2) $b < a$ $\quad \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{[b,a]} f$
3) $b = a$ $\quad \int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Remarque 10.

1. l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ pourra aussi se noter $\int_a^b f$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la variable d'intégration.
2. On remarque qu'avec la notation précédente on a : $\int_b^a f = -\int_a^b f$

Exemple 1.

(∗) Pour montrer que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est bien définie, il suffit de montrer que f est continue (par morceaux) sur $[a,b]$. Ainsi :

1. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-k\sin x}}$ existe lorsque $0 < k < 1$.
2. $\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$ existe car $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$.

Proposition 6 : **Linéarité de l'intégrale de Riemann**
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur $[a, b]$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\int_a^b f + \lambda g = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$$

Proposition 7 : **Chasles**
Si f est continue par morceaux sur l'intervalle I et si l'on considère trois réels $(a, b, c) \in I^3$, alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Théorème 8 : **Majoration usuelle 1**
Si f et g sont deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,b]$.

$$\text{SI} \quad \boxed{\begin{cases} a \le b \\ f(x) \le g(x) \quad \forall x \in [a, b] \end{cases}} \quad \text{alors} \quad \boxed{\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t} \quad (1)$$

Remarque 11. L'inégalité (1) est inversée si $a \ge b$.

Remarque 12. En particulier, dans le cas où $a \le b$, on a :

$$\text{Si} \quad \forall x \in [a, b], \quad m \le f(x) \le M \quad \text{alors} \quad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \le M(b-a)$$

Corollaire 9 : Intégrale d'une fonction positive
Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,\, b])$.

1. $\begin{cases} a \leq b \\ f(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,\, b](*) \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f \geq 0$
2. $\begin{cases} a \leq b \\ f(x) > 0 \ \forall x \in [a,\, b](*) \end{cases} \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f > 0$

($*$ sauf éventuellement en un nombre fini de points)

Preuve 9 :
1. Immédiat !
2. On considère une subdivision $\sigma = \{x_0,\ \ldots,\ x_n\}$ associée à f.
   On montre alors qu'il existe $i \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $\displaystyle\int_{x_i}^{x_{i+1}} f > 0$

Corollaire 10 : Une fonction continue dont l'intégrale est nulle s'annule
Soit f une fonction $\boxed{\text{continue}}$ sur $[a,b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
Alors :

1. $\exists c \in]a,\, b[$ tel que $f(c) = 0$.
2. si de plus $f \geq 0$ alors f est nulle sur $[a,\, b]$

Preuve 10 :
1. On procède par l'absurde. Si f ne s'annule pas sur $]a,\, b[$, alors elle est nécessairement de signe constant. On suppose par exemple que f est strictement positive et on applique le théorème précédent.
2. Même principe ...

Remarque 13.
1. Le résultat 1. pourra être utilisé au même titre que le TVI pour prouver qu'une application continue f s'annule sur $]a,\, b[$.
2. Les résultats du théorème précédent sont faux si l'on considère une fonction f uniquement continue par morceaux sur le segment $[a,\, b]$.

Exercice : 1
$(*)$ Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\, \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe sur $]0,\, 1[$.

Théorème 11 : Majoration usuelle 2
Soient f une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$.

$$\text{SI } \boxed{a \leq b} \text{ alors } \boxed{\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$$

`Exemple 2.` $(*)$ Soit une fonction $f \in \mathcal{C}([a,\, b])$.
Montrer que la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne sur le segment $[a,\, b]$.

Corollaire 12 : Inégalité de la moyenne
En particulier, toujours dans le cas où $a \leq b$, on a l'inégalité de la moyenne :

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b |g(x)|\,\mathrm{d}x$$

On en déduit l'inégalité plus simple : $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

Preuve 12 : Pas de difficulté.

Remarque 14. Lorsque $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue} \\ g \text{ est positive}\end{array}\right.$, on a plus précisément l'égalité de la moyenne :

$$\exists c \in [a,\, b] \quad \text{tel que} \quad \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Remarque 15. Retenons que pour majorer une intégrale sur un segment $[a,\, b]$, il suffit de trouver un majorant sur le segment $[a,\, b]$ de la fonction ou d'*une partie* de la fonction.

Exercice : 2

$(*)$ Etudier les limites des suites définies par les intégrales suivantes :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \arctan(1-nx)\,\mathrm{d}x$

Exercice : 3

$(*)$ Déterminer les limites des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ lorsque $x \to +\infty$.
2. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+a^2x^2}\,\mathrm{d}x$ lorsque $a \to 0$.

Exercice : 4

$(**)$ Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Etudier la limite de la suite de terme général : $I_n = \displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)\,\mathrm{d}x$

Exercice : 5

$(*)$ Déterminer un équivalent lorsque $x \to 0$ de la fonction définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$

Définition 6 :
Pour toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a; b]$,

la valeur $\boxed{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f}$ est appelée *la valeur moyenne* de f sur $[a; b]$.

Exercice : 6

$(*)$ Soit f une fonction continue sur une segment $[a,\, b]$. Montrer que $\exists c \in [a,\, b] \mid f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème Fondamental 13 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Soient deux fonctions f et g continues par morceaux sur le segment $[a,\, b]$. Alors

$$\boxed{\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

Lorsque f et g sont continues sur $[a,\, b]$, on a l'égalité ssi les fonctions sont proportionnelles.

Preuve 13 : On considère l'expression $P(t) = \displaystyle\int_a^b (f(x)+tg(x))^2\,\mathrm{d}x$.

1. Après développement, on constate qu'il s'agit d'une fonction polynômiale en t de degré deux et toujours positive. Son discriminant doit donc être négatif !
2. Pour l'égalité :
   $\Rightarrow$ Si on a l'égalité, alors il existe une valeur t_0 qui annule $P(t)$. La suite est immédiate !
   $\Leftarrow$ Si $g = \lambda f$ alors l'égalité est évidente.

`Exemple 3.` $(*)$ Soit une suite de fonctions (f_n) toutes continues sur le segment $[a,b]$.
En supposant que $\displaystyle\int_a^b f_n^4(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, montrer que : $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème 14 : **Inégalité "triangulaire" de Minkowski**
Soient deux fonctions continues par morceaux f et g sur le segment $[a, b]$.
On a alors l'inégalité de Minkowski :

$$\boxed{\sqrt{\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)^2 \, \mathrm{d}x} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g^2(x) \, \mathrm{d}x}}$$

Preuve 14 : On transforme l'inégalité de Minkowski par équivalences en l'élevant au carré.
On obtient alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Remarque 16. En notant $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x}$, l'inégalité devient une inégalité triangulaire : $\boxed{\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2}$.

3 Le théorème fondamental du calcul

La partie précédente nous permet d'obtenir facilement des encadrements d'intégrales, mais nous ne savons toujours pas comment procéder pour effectuer le calcul d'une intégrale.

Définition 7 : **Primitives**
Soit un *intervalle* I et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $F : I \mapsto \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si

1. la fonction F est dérivable sur l'intervalle I
2. $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

Proposition 15 : Deux primitives de f sur I sont égales à une constante près.

Preuve 15 : Soit F_1 et F_2 deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle $[a, b]$.
On considère alors la fonction $F = F_1 - F_2$ et on la dérive ...

Remarque 17. Au cas où vous l'auriez oublié, le théorème précédent est une conséquence du théorème des accroissements finis qui lui même est une conséquence du théorème de Rolle.

Théorème Fondamental 16 : **Existence de primitives d'une fonction continue**
Toute fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ *continue* sur un *intervalle* I admet des primitives sur l'intervalle I.
En particulier, si $a \in I$, la fonction

$$F : \begin{array}{rcl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t) \, \mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a. On a donc $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

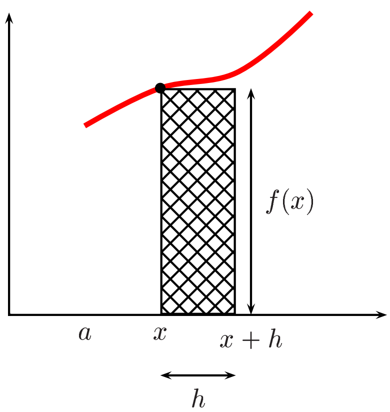

Fig. 1 – *Théorème fondamental :* $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \sim f(x)$

Preuve 16 : Soit la fonction $F\ : x \mapsto \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ pour tout $x \in I$.
On démontre facilement que $\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$. F est donc bien une primitive de f.

Remarque 18. Une fonction non continue peut parfois admettre des primitives.
Prenons en effet la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x\sin(\dfrac{1}{x}) - \cos(\dfrac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
f n'est clairement par continue en 0 et pourtant, la fonction $F(x) = x^2\sin(\dfrac{1}{x})$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

`Exemple 4.` ($*$) Etudier la régularité de la fonction $x \mapsto \int_1^x t^2.f(t)\ \mathrm{d}t$ où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

`Exemple 5.` ($*$) Soit f continue et non nulle sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $a, b \in I$ tels que $\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \neq 0$.

Théorème Fondamental 17 :
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a,b]$, et $F : [a,\, b] \mapsto \mathbb{R}$ une primitive de f sur le segment $[a,\, b]$. Alors, on sait calculer l'intégrale de f en appliquant la formule :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = F(b) - F(a)} \quad = [F(x)]_a^b$$

Preuve 17 : C'est une conséquence presqu'immédiate du théorème précédent.

`Exemple 6.` ($*$) Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leur existence :

1. $I_1 = \int_2^3 \dfrac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$
2. $I_2 = \int_e^3 \dfrac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$
3. $I_3 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\ \mathrm{d}x$
4. $I_4 = \int_0^1 \dfrac{t^2}{1+t^2}\ \mathrm{d}t$

Corollaire 18 : **Autre forme du Théorème Fondamental**
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$.
Alors la formule suivante relie f à l'intégrale de sa dérivée. Pour tout $x \in [a,b]$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\ \mathrm{d}t}$$

Preuve 18 : Conséquence immédiate du théorème fondamental.

Remarque 19. On peut se servir de la formule précédente pour montrer des relations entre une fonction et sa dérivée. On peut, par exemple, grâce à cette formule, retrouver l'inégalité des accroissements finis (avec cependant une condition plus restrictive sur f puisque le théorème impose $f \in \mathcal{C}^1(I)$).

Exercice : 7
($***$) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que des bornes a et b telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([a,\, b]) \text{ telle que } f(a) = 0, \quad \int_a^b f^2(t)\ \mathrm{d}t \leq C\int_a^b {f'}^2(t)\ \mathrm{d}t \qquad \text{(Inégalité de Poincaré)}$$

Etude de g définie par $g(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, où f est continue sur I.

1. Pour l'ensemble de définition, on recherche les valeurs de x telles que $[u(x),\, v(x)] \subset I$.
2. Pour la dérivabilité, on introduit F une primitive de f et on exprime g sous la forme :

$$g(x) = Fov(x) - Fou(x)$$

   On applique alors le théorème de dérivabilité des fonctions composées.
   Lorsque g est dérivable, on obtient alors : $g' = fov.v' - fou.u'$.
3. Pour le calcul des limites, on utilise les méthodes d'encadrement / majoration vue dans la partie précédente.

Exercice : 8

(∗) Soit la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$

1. Montrer que g est définie, dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer la fonction dérivée g'.
2. Dresser le tableau de variations de g.
3. Vous pouvez vérifier les résultats obtenus ci-dessus en calculant directement la fonction g.

4 Changement de variables, intégration par parties.

Théorème 19 : **Changement de variables**
Soit une fonction $f : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $[a; b]$.
Soit $\varphi : [\alpha, \beta] \mapsto [a, b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\alpha, \beta]$. Alors

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = \varphi(\alpha) \\ b = \varphi(\beta) \end{cases}}$$

Preuve 19 : On considère F une primitive de f et on remarque alors que $Fo\varphi$ est une primitive de $fo\varphi.\varphi'$. On peut alors calculer les deux membres de l'égalité et montrer qu'ils sont égaux.

Remarque 20. On se souviendra de $\begin{cases} a = \varphi(\alpha) \\ b = \varphi(\beta) \end{cases}$ en se rappelant que α et β sont des valeurs particulières de t.

Situation 1 :
Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on pourra poser $\boxed{x = \varphi(t) \quad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$

1. On détermine α et β tels que $a = \varphi(\alpha)$ et $b = \varphi(\beta)$
2. On vérifie que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha, \beta]$ vers $[a,b]$
3. Et on écrit : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ (Ne pas oublier de transformer les bornes !)

`Exemple 7.` Calculer les deux intégrales suivantes après avoir justifié leur existence.

1. $I_1 = \displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Situation 2 : cas 1
Pour calculer $\displaystyle\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ on pourra poser $t = \varphi(x)$.
On écrit alors : $\begin{cases} t = \varphi(x) \\ \mathrm{d}t = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$ et on obtient $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

`Exemple 8.` Calculer les deux intégrale suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, \mathrm{d}x$.

2. $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\, \mathrm{d}x$.

Situation 2 : cas 2 (très fréquent !)

Dans certains cas, il peut arriver que dans une intégrale du type $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$, on souhaite poser $t = \varphi(x)$.

Dans le cas où $\varphi'(x) \neq 0$ sur $[a, b]$ (cad : φ est bijective de $[a, b]$ dans $[\varphi(a), \varphi(b)]$), on peut écrire :

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{f(x)}{\varphi'(x)}\varphi'(x)\, \mathrm{d}x$$

Il suffit alors de trouver une fonction g telle que $\dfrac{f(x)}{\varphi'(x)} = g[\varphi(x)]$ pour se ramener au cas précédent !

`Exemple 9.` ($*$) Calculer les intégrales suivantes en choisissant un changement de variable adapté :

1. $I = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln t\, \mathrm{d}t}{t + t(\ln^2 t)}$
2. $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{5 + 3\cos t}$
3. $K = \displaystyle\int_1^e \frac{e^{2t}\, \mathrm{d}t}{e^t + 1}$

Exercice : 9

Montrer à l'aide d'un changement de variable que :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\, \mathrm{d}x$.

   En déduire la valeur de ces intégrales.

2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\, \mathrm{d}x$.

   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)\, \mathrm{d}x$.

Remarque 21. Comme le montre les deux exercices suivants, le changement de variables ne sert pas uniquement au calcul d'intégrale. Il peut aussi être utile pour étudier des propriétés d'une fonction définie par une intégrale.

Exercice : 10

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et g la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t + x)\, \mathrm{d}t$.

Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et calculer l'expression de g'..

Exercice : 11

Soit φ définie par $\forall x \in,\quad \varphi(x) = \int_x^{x+1} \ln(1 + t^2)\, \mathrm{d}t$.

Prouver que la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ et admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

Corollaire 20 : **Propriétés diverses**

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(t - c)\, \mathrm{d}t$ (Invariance par translation)
2. Si f est paire sur $[-a, a]$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\, \mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\, \mathrm{d}x$
3. Si f est impaire sur $[-a, a]$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\, \mathrm{d}x = 0$
4. Si f est T périodique, $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\, \mathrm{d}t$

Preuve 20 : Ces résultats se démontrent simplement en utilisant des changements de variable affines.

Théorème 21 : **Intégration par parties**

Soient deux fonctions $u, v : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\, \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\, \mathrm{d}t$$

Preuve 21 : Il suffit de calculer $(u.v)'$ et d'effectuer une intégration dont on pensera à justifier l'existence.

`Exemple 10.` $(*)$ Calculer $F(x)=\displaystyle\int_0^x \arctan t \ \mathrm{d}t$, $\quad G(x)=\displaystyle\int_1^x \ln t \ \mathrm{d}t$ et $\quad H(x)=\displaystyle\int_1^x t^2\cos t \ \mathrm{d}t$

Exercice : 12

$(**)$ Soit 2 entiers p et q tels que $0<p<q$. Calculer $I_{p,q}=\displaystyle\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q \ \mathrm{d}x$.

Exercice : 13

$(*)$ Soit $I_n=n\displaystyle\int_0^1 x^n f(x) \ \mathrm{d}x$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Trouver la limite de I_n lorsque $n\to+\infty$.

Exercice : 14

$(*)$ Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$.
Montrez que :

$$\int_a^b \sin(nt)f(t) \ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque 22. Parfois, une seule technique de calcul ne suffit pas... Comme dans l'exemple suivant, on peut être amené à utiliser alternativement le changement de variables et l'intégration par parties.

`Exemple 11.` Calculer l'intégrale suivante en effectuant le changement de variables $x=\sqrt{2t+1}$: $\quad I=\displaystyle\int_0^1 3^{\sqrt{2t+1}}$.

5 Formules de Taylor.

Théorème Fondamental 22 : **Formule de Taylor avec reste intégrale**

Soit une fonction f de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^{n+1}}$ sur un intervalle I, et deux points a, $x\in I$. Alors

$$\boxed{f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \ \mathrm{d}t}$$

La quantité $R_n(x)=\displaystyle\int_a^x\frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t) \ \mathrm{d}t$ est appelée le reste intégral.

Preuve 22 : On démontre facilement ce théorème par récurrence en utilisant une intégration par partie.

Remarque 23. Cette formule est très souvent utilisée en analyse : il faut la connaître parfaitement !!
On peut se souvenir du reste par comparaison de cette formule à $f(x)=f(a)+\displaystyle\int_a^x\frac{(x-t)^0}{0!}f'(t) \ \mathrm{d}t$.

`Exemple 12.` $(*)$ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Majorer les quantités suivantes sur le segment $[0\ ;\ 1]$.

1. $\left|e^x-(1+x+\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!})\right|$
2. $\left|\ln(1+x)-(x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n})\right|$

Exercice : 15

$(**)$ Soit $g\in\mathcal{C}([0,\ 1],\ \mathbb{R})$.
Trouver toutes les fonctions $f\in\mathcal{C}^2([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ telles que $\begin{cases} f(0)=f(1)=0 \\ f''=g \end{cases}$.

Corollaire 23 : **Inégalité de Taylor-Lagrange (majoration du reste)**
Soit une fonction f de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^{n+1}}$ sur un intervalle I et un point $a\in I$.
Si $x\in I$, on peut écrire $f(x)$ comme somme du polynôme de Taylor et d'un reste $R_n(x)$:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{(x-a)^k}{k!}f^{(k)}(a)+R_n(x)$$

avec le reste vérifiant la majoration suivante : $\boxed{|R_n(x)|\leq\dfrac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}M_{n+1}(x)}$ où $M_{n+1}(x)=\displaystyle\sup_{t\in[a,x]}|f^{(n+1)}(t)|$.

Preuve 23 : On commence par justifier l'existence de $M_{n+1}(x)$ grâce à la continuité de $f^{(n+1)}$.
Puis, la majoration du reste s'effectue en utilisant la majoration célèbre : $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ (lorsque $a \leq b$!!).

Remarque 24. En cas d'oubli de cette majoration, on peut facilement directement refaire le raisonnement de la démontration ... Pour cela, il est bien entendu nécessaire de connaître parfaitement la formule de Taylor avec reste intégrale !!

`Exemple 13.` $(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer un majorant de $\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right|$. Qu'en déduire ?

Exercice : 16

$(*)$ En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction $f(x) = \ln(1+x)$, déterminer la limite de la série $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$.

Corollaire 24 : **Formule de Taylor-Young**
Soit f de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^n}$ sur un intervalle I, et $a \in I$. Alors $\forall x \in I$,

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + (x-a)^n \varepsilon(x)} \qquad \text{où } \lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$$

Cette expression est un Développement Limité de f au voisinage de a à l'ordre n : DL(a, n).

Preuve 24 :
1. Si la fonction f est $\mathcal{C}^{n+1}$, ce résultat est une conséquence immédiate du corollaire précédent.
2. Sinon on peut appliquer la formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre $n-1$, puis démontrer que la différence de $R_{n-1}(x)$ avec $\frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$ est majorée par un $o(x-a)^n$. Pour cela, on peut utiliser la continuité de $f^{(n)}$ en a.

`Exemple 14.` $(*)$ Déterminer la limite de $f(x) = \frac{\sin x - x}{x^3}$ lorsque $x \to 0$.

Remarque 25. Utilisation des formules précédentes :
1. La formule de Taylor avec reste intégrale permet d'exprimer $f(x)$ en fonction des dérivées de f en a, pour tout les réels $x \in I$. On l'utilisera donc lors d'études *globales* de la fonction. Par exemple pour des majorations.
2. La formule de Taylor-Young quant à elle, donne une information *locale* sur le comportement de f au voisinage du point a (l'information sur le reste est une limite). On s'en servira donc pour le calcul de limites, d'équivalents et de développements limités au voisinage du point a.

Exercice : 17

$(**)$ Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[-1, 1]$.
Le but de cet exercice est de déterminer et de comparer des approximations de $f'(0)$ et de $f''(0)$.

A] Approximation de $f'(0)$:

Pour un réel positif h tel que $0 < h < 1$, on pose : $\boxed{\Delta_0^1(h) = \frac{f(h) - f(0)}{h} \quad \text{et} \quad \Delta_0^2(h) = \frac{f(h) - f(-h)}{2h}}$

1. Nous savons déjà que $\Delta_0^1(h) \xrightarrow[h \to 0]{} f'(0)$.
   (a) Trouver un majorant de $|\Delta_0^1(h) - f'(0)|$.
   (b) Trouver un équivalent de $|\Delta_0^1(h) - f'(0)|$ lorsque $h \to 0$.
2. Pour montrer que $\Delta_0^2(h) \xrightarrow[h \to 0]{} f'(0)$, majorer $|\Delta_0^2(h) - f'(0)|$ en fonction de h.
3. Comparer les vitesses de convergence de $\Delta_0^1(h)$ et $\Delta_0^2(h)$ vers $f'(0)$.

B] Approximation de $f''(0)$:

Pour un réel positif h tel que $0 < h < 1$, on pose : $\boxed{\Delta_0^3(h) = \frac{f(h) - 2f(0) + f(-h)}{h^2}}$.

Montrer que $\lim\limits_{h\to 0} \Delta_0^3(h) = f''(0)$, puis majorer en fonction de h la quantité $|\Delta_0^3(h) - f''(0)|$.

Remarque 26. Ces résultats montrent que l'on peut approximer les quantités $f'(0)$ et $f''(0)$ à l'aide des valeurs prises par la fonction f au voisinage de 0.

6 Méthodes numériques de calcul d'intégrales.

On considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et l'on note $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Les deux méthodes suivantes ont pour objectif de déterminer une approximation de I.
On prendra une subdivision du segment $[a\ ;\ b]$ de pas constant $h = (b-a)/n$ et on pose pour un entier $k \in [0,n]$:

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

6.1 Méthode des rectangles

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$. Il s'agit de déterminer une approximation de $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Posons pour un entier $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{R_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}$

R_n est appelée *somme de Riemann* et représente la somme des aires des rectangles de la figure suivante.

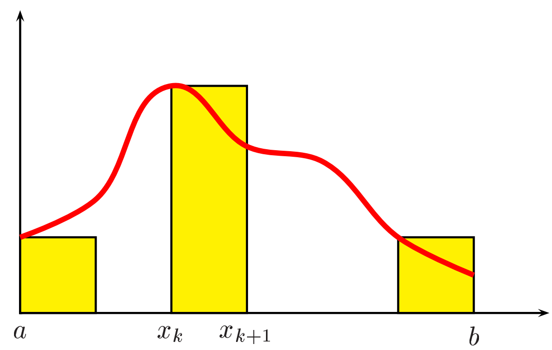

FIG. 2 – *Méthode des rectangles*

> THÉORÈME 25 : **Majoration de l'erreur**
> Soit $M_1 = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.
> R_n est une approximation de l'intégrale I et on a la majoration suivante de l'erreur $|I - R_n| \leq \dfrac{(b-a)^2}{2n} M_1$

Preuve 25 :
1. On utilise la relation de Chasles pour décomposer I le long de la subdivision.
2. On écrit chacun des termes de la somme R_n comme une intégrale entre les bornes x_k et x_{k+1}.
3. On regroupe les termes deux à deux et on utilise la formule de Taylor pour majorer chacune des différences obtenues.

> THÉORÈME 26 : **Convergence d'une somme de Riemann** (Admis lorsque f est seulement continue)
> Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ où $a < b$, alors :
> $$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve 26 : Dans le cas où la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, ce résultat est une conséquence directe du théorème précédent.

Remarque 27. La valeur de départ et d'arrivée de l'indice courant k n'a pas d'importance à un nombre fixé d'unités près.

Remarque 28. Ainsi, si f est une fonction continue sur $[0, 1]$ alors : $\boxed{\dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\dfrac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$

Toute somme de Riemann peut s'exprimer de cette façon. C'est donc cette forme que l'on retiendra et que l'on cherchera à faire apparaître dans les exercices de calcul de limite. Pour cela, on mettra en évidence le terme $1/n$ en facteur et le groupement k/n dans la somme.

`Exemple 15.` $(*-**)$ Etudier les suites de terme général :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$
2. $v_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} \frac{\sqrt{n^2+p^2}}{n^2}$
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$

Exercice : 18

$(**)$ Déterminer la limite de la suite de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$

6.2 Méthode des trapèzes

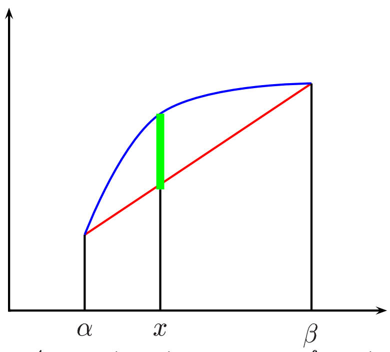

FIG. 3 – *Approximation par une fonction affine*

LEMME 27 : **Approximation d'une fonction $\mathcal{C}^2$ par une fonction affine**

Soit une fonction $f \in \mathcal{C}^2([\alpha\ ,\ \beta])$ et $M_2 = \sup_{x\in[\alpha\ ,\ \beta]} |f''(x)|$.
Soit φ une fonction affine telle que $\varphi(\alpha) = f(\alpha)$ et $\varphi(\beta) = f(\beta)$.

On a alors la majoration suivante de l'erreur commise en approximant la fonction f par la fonction affine φ sur le segment $[\alpha\ ,\ \beta]$:

$$\forall x \in [\alpha\ ,\ \beta], \qquad |f(x) - \varphi(x)| \leq \frac{(x-\alpha)(\beta-x)}{2} M_2$$

Preuve 27 : Calcul intéressant !!
Appelons g la fonction majorante. On peut commencer par montrer que $f(x) - \varphi(x) - g(x) \leq 0$ sur $[\alpha, \beta]$.
Pour cela, on étudie la fonction $\Delta(x) = f(x) - \varphi(x) - g(x)$.

1. On montre facilement que sa dérivée seconde est positive
2. En utilisant le théorème de Rolle, on prouve que $\Delta'(x)$ s'annule sur $]\alpha, \beta[$.
3. On déduit des deux résultats précédents le sens de variation de Δ et son signe sur $[\alpha, \beta]$

On fait alors la même chose pour $\Gamma(x) = f(x) - \varphi(x) + g(x)$.

Méthode des trapèzes

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a\ ;\ b]$. On note $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

Posons pour un entier $n \in \mathbb{N}$: $\boxed{T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{2n}[f(x_k) + f(x_{k+1})]}$ avec $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$

Remarque 29. T_n représente la somme des aires des trapèzes de la figure 7.

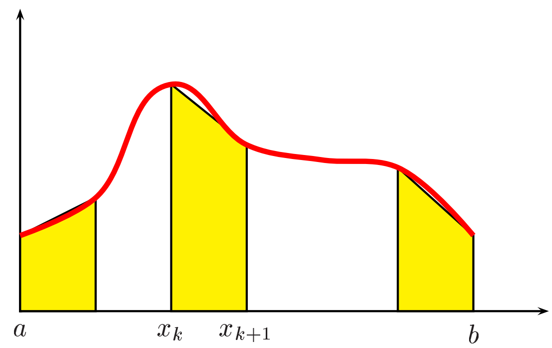

FIG. 4 – *Méthode des trapèzes*

THÉORÈME 28 : **Majoration de l'erreur**
Soit $M_2 = \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$.
T_n est une approximation de l'intégrale I et on a la majoration suivante de l'erreur : $|I - T_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$

Preuve 28 : On procède de la même façon que dans la méthode des rectangles en utilisant la majoration vue dans le lemme précédent.

Remarque 30. Si $x_k = a + k.\frac{b-a}{n}$, on alors : $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}.\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

7 Attention : piège !

Ne pas passer à la limite dans une intégrale !!

Considérons une suite d'applications f_n continues sur $[0, 1]$ telles que $\forall x \in [0, 1]$, on a : $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Il est alors très tentant d'affimer que :

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Et pourtant ce n'est pas nécessairement le cas !

Pour vous en convaincre, considérer les applications f_n définies par : $\begin{cases} f_n(x) = n^3 x \text{ pour } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = -n^3 x + 2n^2 \text{ pour } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ f_n(x) = 0 \text{ pour } x \in [\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$.