# Comment faire des mathématiques ?

**MPSI-1 Prytanée National Militaire**

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

12 septembre 2010

# 1 Table de vérité

## 1.1 Notion de proposition

Définition 1 :
Une *proposition* est une affirmation qui peut prendre deux valeurs logiques : V (VRAI) ou F (FAUX).

*Remarque* 1. Une proposition est aussi parfois appelée une *propriété*, une *affirmation* ou une *assertion*.

**Exemple 1.** Voici quelques exemples de propositions :

1. "Il pleut actuellement à Taïwan"
2. "Toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$"
3. "Il existe une infinité de nombres premiers"
4. "$\ln x > 0$"
5. "Dieu existe !"
6. "Par deux points il ne passe qu'une seule droite"
7. "Tout entier pair est somme de deux nombres premiers" (Conjecture de Goldbach 1670 - 1764)
8. $1 + 1 = 3$
9. "Je suis un menteur"

*Remarque* 2. Il existe donc plusieurs types de propositions :
1. Des propositions qui sont fausses ou vraies de façon évidente. (8)
2. Des propositions que l'on accepte comme vraies sans chercher à les remettre en cause. (6)
3. Des propositions dont la valeur logique est vérifiable à l'aide éventuellement d'une démonstration. (2, 3)
4. Des propositions pour lesquelles nos connaissances sont insuffisantes pour répondre. (1, 4)
5. Des propositions invérifiables. (5, 7?)
6. Des propositions paradoxales qui ne peuvent être ni vraies, ni fausse. (9)

*Remarque* 3.
1. Pour exprimer qu'une proposition $A$ est vraie, on dira tout simplement : *"On a A"*.
   Ainsi au lieu de dire "la proposition $1 + 1 = 2$ est vraie", on dira : "on a $1 + 1 = 2$".
2. Dans le cours de mathématiques les propositions rencontrées seront soit vraies, soit fausses soit incomplètes.
   On rendra soin de ne jamais écrire de proposition incomplète !

**Exemple 2.** ($*$) Les propositions mathématiques suivantes sont-elles vraies, fausses ou incomplètes ?
Justifiez votre réponse et compléter les propositions incomplètes afin de les rendre vraies.

1. $\sin x \leq x$
2. $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{N}$
3. $x \geq 0$ si et seulement si $x^2 \geq 0$
4. Soit $z \in \mathbb{C}$.
   Si $z + \bar{z} = 0$ alors $z \in \mathbb{R}$
5. $x \mapsto |x|$ est dérivable.
6. Les nombres impairs sont premiers.
7. $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
8. $e^x$ s'annule sur $[-1, 1]$

**Principe des mathématiques :**

On "fait des mathématiques" en partant de définitions ($\mathbb{R}$, ensemble, point, droite, parallélisme ...) et d'un petit nombre de propositions que l'on suppose être VRAIES (les *axiomes*). On construit alors de nouvelles propositions que l'on *démontre* être soit vraies soit fausses, le but étant d'accroitre le plus possible le nombre de propositions VRAIES. *Démontrer une proposition* consiste à justifier, sans susciter le moindre doute, qu'une proposition donnée est vraie.

**Exemple 3.** En géométrie euclidienne par exemple, on définit entre autre les notions de points, de droites et de parallélisme et on pose l'axiome suivant : "par un point, il ne passe qu'une seule droite parallèle à une droite donnée". A l'aide de 5 axiomes de base (cf ci-dessous), on peut alors démontrer l'ensemble des propriétés usuelles de géométrie euclidienne. Pour développer des géométries *non-euclidiennes*, il suffit de remettre en cause l'un des 5 axiomes d'Euclide.

**Les axiomes d'Euclide :**
1. Tout segment peut se prolonger indéfiniment des deux côtés.
2. Par deux points du plan, il ne passent qu'une seule droite.
3. Par un point du plan, il ne passe qu'une seule droite parallèle à une autre.
4. Tous les angles droits ont la même mesure.
5. On peut construire des cercles de rayon aussi grand que l'on veut et dont le centre est un point du plan donné.

*Les démonstrations permettant de découvrir la valeur de vérité (vrai ou faux) d'une proposition donnée reposent sur des règles de logique abordées dans la partie suivante.*

## 1.2 Règles de logique

Une façon simple de construire de nouvelles propositions à l'aide de propositions initiales est d'utiliser les 5 connecteurs logiques :

"non", "et", "ou", "$\Rightarrow$" et "$\Longleftrightarrow$".

Les valeurs logiques des nouvelles propositions obtenues dépendent des valeurs logiques des propositions initiales de la façon suivante :

Définition 2 : **Règles de logique**
Soient 2 propositions données $A$ et $B$ :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1) | On dira que | "non$A$" | est VRAIE | si | $A$ est FAUSSE. |
| 2) | On dira que | "$A$ et $B$" | est VRAIE | si | $A$ et $B$ sont VRAIES simultanéement. |
| 3) | On dira que | "$A$ ou $B$" | est VRAIE | si | l'une des 2 propositions est VRAIE. |
| 4) | On dira que | "$A \Rightarrow B$" | est VRAIE | si | $A$ est fausse |
| | | | | ou si | $B$ est VRAIE lorsque $A$ est VRAIE. |
| 5) | On dira que | "$A \Longleftrightarrow B$" | est VRAIE | si | $A$ et $B$ ont la même valeur de vérité. |

*Remarque* 4. Dans le cas où la condition n'est pas vérifiée, les 5 propositions précédentes sont bien entendu, FAUSSES.

Une "table de vérité" résume cela :

| **A** | **B** | non $A$ | $A$ et $B$ | $A$ ou $B$ | $A \Rightarrow B$ | $A \Longleftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **V** | **V** | F | V | V | V | V |
| **V** | **F** | F | F | V | F | F |
| **F** | **V** | V | F | V | V | F |
| **F** | **F** | V | F | F | V | V |

*Remarque* 5. Commentaires sur $A \Rightarrow B$.
1. Pour prouver que $A \Rightarrow B$ est VRAIE, comme la valeur de vérité de $A$ n'est en général pas connue, on montrera que si $A$ est vraie, alors $B$ l'est aussi.
   Ainsi, le raisonnement sera le suivant : "Supposons que $A$ est vraie et montrons que $B$ l'est aussi ..."
2. Que dire de la proposition : "pour $x \in \mathbb{R}$, $e^x < 0 \Rightarrow x > 0$" ?

**Exemple 4.** ($*$) La valeur de vérité de "($A$ et $B$) $\Longleftrightarrow$ ($A \Rightarrow B$)" dépend-elle des valeurs de vérité de $A$ et $B$ ?

*Remarque* 6.
Les problèmes de mathématiques se présentent sous la forme : << Démontrer que "*proposition*" >>.
Il faut en fait comprendre la question de la façon suivante : << Démontrer que "*proposition*" est vraie >>.

Exemple : "démontrer que $A \iff B$" signifie, "démontrer que la proposition $A \iff B$ est VRAIE". Pour cela, il suffit d'après la table de vérité de démontrer que $A$ et $B$ ne peuvent pas être l'une VRAIE et l'autre FAUSSE.

DÉFINITION 3 : **Propositions logiquement équivalentes**
On dira que deux propositions sont logiquement équivalentes lorsqu'elles ont la même table de vérité.

*Remarque* 7. Dans le cas de deux propositions logiquement équivalentes, on pourra montrer que l'une est vraie (ou fausse) en prouvant que l'autre l'est.

THÉORÈME 1 : **Quelques propositions logiquement équivalentes**

1. "$A \iff B$" est logiquement équivalente à "$(A \Rightarrow B)$ et $(B \Rightarrow A)$"
2. "non$(A$ et $B)$" est logiquement équivalente à "(non$A$ ou non$B$)"
3. "non$(A$ ou $B)$" est logiquement équivalente à "(non$A$ et non$B$)"
4. "$(A \Rightarrow B)$" est logiquement équivalente à "(non$B \Rightarrow$ non$A$)"

*Preuve 1 :* On construit les tables de vérité de chacune des deux propositions.

*Remarque* 8. On dispose ainsi d'une grande diversité de méthodes pour déterminer la valeur de vérité d'une proposition mathématique.

## 2 La logique des prédicats

Dans cette section, nous nous intéressons aux propositions dont la formulation fait apparaître les symboles $\forall$ (signifiant "Quel que soit") et $\exists$ (signifiant "il existe"). On trouve aussi le symbole $\exists!$ qui signifie "il existe un unique". Ces symboles sont appelés des *quantificateurs*.

1. << $\forall x \in A,\ P(x)$ >> se lit "Pour tout élément $x$ de l'ensemble $A$, ON A la propriété $P(x)$"
2. << $\exists x \in A \mid P(x)$ >> se lit "Il existe un élément $x$ de l'ensemble $A$ TEL QUE la propriété $P(x)$ est vraie"

**Exemple 5.** $(*)$ Comprendre et donner la valeur de vérité des propositions suivantes :

1. $\forall x \in A,\ x \geq 0$
2. $\exists z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1$
3. $\forall y \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} \mid y = \ln x$
4. $\forall x, y \in \mathbb{R},\ \exists z \in \mathbb{C} \mid z > x + y$
5. $\exists N \mid \forall n \in \mathbb{N},\ n \leq N$
6. $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$

*Exercice : 1*

$(*)$ Soit $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Ecrire à l'aide des quantificateurs, les propositions suivantes :

1. $f$ est croissante.
2. $f$ est périodique
3. $f(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$.
4. $f$ prend au moins une fois deux valeurs distantes de 1

*Remarque* 9. ATTENTION à l'ordre des quantificateurs !!

1. $\forall x \in A, \forall y \in B, \ \ldots$ a le même sens que $\forall y \in B, \forall x \in A, \ \ldots$
2. $\exists x \in A, \exists y \in B, \ \ldots$ a le même sens que $\exists y \in B, \exists x \in A, \ \ldots$
3. Mais attention :
   La proposition change de sens lorsque l'on échange l'ordre les quantificateurs $\forall$ et $\exists$.
   Expl : on considère $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Donnez le sens des deux propositions suivantes :
   (a) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R},\ y = f(x)$
   (b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \mid y = f(x)$

**Méthode IMPORTANTE:** Pour démontrer une proposition formulée à l'aide de quantificateurs :

1. << $\forall x \in A,\ P(x)$ >> se démontre toujours en commençant par prendre un $x$ quelconque dans $A$.
   La rédaction est alors la suivante :

   "Soit $x \in A$, prouvons la propriété $P(x)$"

2. Prouver que << $\exists x \in A,\ P(x)$ >> consiste à trouver ou à justifier à l'aide d'un théorème l'existence d'un élément $x$ de $A$ tel que la propriété $P(x)$ est vraie.
   La rédaction est alors la suivante :

   "Prouvons qu'il existe $x \in A$ tel que $P(x)$"

**Exemple 6.** $(*)$ Prouver les propositions suivantes :

1. $\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 + (1-m)x - m = 0$
2. $\exists !\ x \in \mathbb{R}^+ \mid \ln x = 3$

*Remarque* 10. Négation d'une proposition formulée à l'aide de quantificateurs :
1. le contraire de $\forall x \in A,\ P(x)$ est :
2. le contraire de $\exists x \in A,\ P(x)$ est :
3. le contraire de $\forall x \in A,\ \exists y \in B \mid P(x, y)$ est :
4. le contraire de $\exists x \in A,\ \forall y \in B \mid P(x, y)$ est :

Plus généralement, on nie une proposition formulée à l'aide de quantificateurs :
1. en remplaçant tous les $\forall$ par des $\exists$
2. en remplaçant tous les $\exists$ par des $\forall$
3. en prenant le contraire de la proposition finale

**Exemple 7.** $(*)$ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Formuler le contraire des propositions suivantes :

1. $\exists M \in \mathbb{R} \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leq M$
2. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 1$ *ou* $f(x) \leq -1$
3. $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

*Exercice : 2*

$(*)$ Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouver que : $\forall \varepsilon > 0,\ |z| < \varepsilon \Rightarrow z = 0$

# 3 Les méthodes usuelles de raisonnement

Nous allons maintenant présenter les techniques de raisonnement les plus usuelles.

## 3.1 Utilisation d'un théorème

Définition 4 : **Théorème**
Un théorème est une proposition mathématique VRAIE qui se présente sous la forme d'une implication :

$$"A \Rightarrow B"$$

Il se lit de la façon suivante : << Si A est VRAIE alors B l'est aussi >>.
- $A$ correspond aux hypothèses du théorème
- $B$ correspond à la conclusion du théorème

Ce théorème permet donc de prouver que la proposition $B$ est vraie en vérifiant simplement que la proposition $A$ l'est aussi. En d'autres termes, si les hypothèses $A$ sont vérifiées alors la proposition $B$ est VRAIE.

**Exemple 8.** Reformuler sous la forme "Si... alors..." les théorèmes suivants :
1. "Toute fonction réelle dérivable sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est continue sur cet intervalle"

2. "Les médianes d'un triangle sont concourantes"
3. "Une fonction réelle continue sur un intervalle $I$ admet des primitives sur $I$"

Avec les règles de logique, les théorèmes sont les outils les plus utilisés lors des démonstrations mathématiques. L'essentiel du cours consistera donc à démontrer les théorèmes susceptibles de générer le plus grand nombre de résultats nouveaux.

**Méthode : montrer qu'une proposition $B$ est VRAIE à l'aide d'un théorème**

Si l'on dispose d'un théorème de la forme $A \Rightarrow B$, on peut montrer que $B$ est VRAIE en prouvant que la proposition $A$ (plus simple à prouver) est VRAIE.
La rédaction est alors la suivante :
1. Montrons $A$ : ...
2. D'après le thèorème "$A \Rightarrow B$", on en déduit que $B$ est vraie.

*Remarque* 11. N'oubliez pas de citer le nom des théorèmes que vous utilisez !!

**Exemple 9.** Dans le cas des fonctions dérivables, on dispose du théorème suivant :

*"La dérivée d'une fonction $f$ dérivable est positive sur l'intervalle $I \Rightarrow$ la fonction $f$ est croissante sur $I$".*

Ainsi, pour montrer que la fonction $f$ définie par $f(x) = x^3$ est croissante sur $\mathbb{R}$, on peut procéder ainsi :
- Etape 1 : On commence par montrer que "la fonction $f$ est dérivable, puis que "sa dérivée est positive sur $\mathbb{R}$"
- Etape 2 : On cite le théorème utilisé
- Etape 3 : On conclut que "$f$ est croissante sur $\mathbb{R}$"

## 3.2 Montrer une proposition $A$ par équivalences successives

L'idée est de transformer la proposition $A$ en une proposition équivalente dont on sait qu'elle est vraie.

**Raisonnement par équivalences successives**

Pour prouver que la proposition $A$ est vraie :
1. Remarquons que : $A \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow B$ (Attention à bien justifier TOUTES les équivalences !)
2. Or, la proposition $B$ est vraie.
3. Donc la proposition $A$ est elle aussi vraie.

**Exemple 10.** $(*)$ Prouver que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité suivante : $|a| \leq \sqrt{a^2+b^2}$.

**Exemple 11.** $(*)$ Comparer $\dfrac{8}{\sqrt{14}}$ et $\sqrt{19}$.

*Remarque* 12. ATTENTION : On a "$x \leq y \Longleftrightarrow x^2 \leq y^2$" uniquement si $x$ et $y$ sont POSITIFS !!

*Exercice : 3*

$(*)$ Prouver que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité suivante : $\dfrac{1}{2}(x+y)^2 \leq x^2+y^2$.

## 3.3 Pour montrer qu'une proposition de la forme "$A \Rightarrow B$" est VRAIE

On dira plutôt : "pour montrer que $A \Rightarrow B$".
Dans 99,9% des cas, on ne connaît pas la valeur de vérité de la proposition $A$.

**Méthode pour montrer que :** $A \Rightarrow B$
On peut utiliser l'un des deux raisonnements suivants :

| | |
|---|---|
| *Raisonnement direct* : | Supposons $A$ VRAI, et montrons qu'alors $B$ est VRAI. |
| *Raisonnement par contraposée* : | Supposons $B$ FAUX et montrons que $A$ est FAUX. |

**Preuve**
1. Par définition
2. Car nous savons que $(A \Rightarrow B)$ et $(\text{non}B \Rightarrow \text{non}A)$ sont logiquement équivalentes

**Exemple 12.** (∗) Montrer que : $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

*Remarque* 13. TRES IMPORTANT !!!
Dans vos rédactions, faites attention à l'utilisation du mot "DONC" et du symbole "$\Rightarrow$" :

- "$A$ donc $B$" signifie :
  COMME $A$ est VRAI alors $B$ est aussi VRAI (ici on SAIT que $A$ est vraie)

- "$A \Rightarrow B$" signifie :
  SI $A$ est VRAI alors $B$ le sera aussi (ici on ne sait RIEN sur la valeur de vérité de $A$)

En général, les démonstrations mathématiques utilisent des raisonnements par déduction : on part de propositions que l'on sait être VRAIES et on en déduit des propositions vraies jusqu'à aboutir à la conclusion souhaitée. Par conséquent, on utilisera le mot "Donc" et non l'implication "$\Rightarrow$".

*Exercice : 4*
(∗) Prouver que : "$n$ impair $\Rightarrow n^2$ impair"

## 3.4 Autour de l'équivalence $A \Longleftrightarrow B$

### 3.4.1 Pour montrer que $A \Longleftrightarrow B$

**Méthode pour montrer que :** $A \Longleftrightarrow B$
Méthode 1 : On procède souvent en deux temps : $\begin{cases} 1) & \text{On montre que } A \Rightarrow B \text{ est VRAIE} \\ 2) & \text{On montre que } B \Rightarrow A \text{ est VRAIE} \end{cases}$.

Méthode 2 : On peut aussi parfoit raisonner par "équivalences successives' : $A \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow B$

**Preuve**
Méthode 1 : ($A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$) et ($A \Longleftrightarrow B$) sont logiquement équivalentes.
Méthode 2 : Cela provient de la transitivité de la relation "$\Longleftrightarrow$"

**Exemple 13.**
(∗) On considère une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et les deux propositions $\begin{cases} A : f \text{ est une fonction paire et impaire} \\ B : f \text{ est la fonction nulle} \end{cases}$.
Montrer que $A \Longleftrightarrow B$.

### 3.4.2 Attention à l'utilisation du signe $\Longleftrightarrow$

1. **Dans les raisonnements par équivalences successives :**
   Le signe $\Longleftrightarrow$ est une double implication !!
   En écrivant $A \Longleftrightarrow B$, demandez-vous toujours si $A$ implique bien $B$ et si $B$ implique bien $A$.

   Ex : Peut-on écrire : $a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = b$ ?

2. **Dans les raisonnements par équivalences successives pour prouver une proposition $A$:**
   Si votre raisonnement montre que la proposition $A \Longleftrightarrow B$ est vraie, vous ne pourrez conclure que $A$ est VRAIE qu'après avoir vérifié que $B$ l'était. Cette remarque est particulièrement valable lors de la résolution de systèmes ou d'équations.

   Ex : Résoudre $(x+1)^2 = 2x - 1$.

3. **Dans les raisonnements par équivalences successives :**
   Si la méthode par "équivalences successives" n'aboutit pas, (car votre "$\Longleftrightarrow$" se transforme en "$\Rightarrow$"), il faut reprendre le raisonnement en procédant par "double implication" ou par Analyse / Synthèse.

   Ex : Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $\sqrt{-2x-1} = x$

4. **Dans les raisonnements déductifs :** (par exemple pour prouver que "$A \Rightarrow C$")
   Ce type de raisonnement part d'une proposition $A$ que l'on sait être VRAIE pour prouver qu'une autre $C$ l'est aussi. Même si l'on a $A \Longleftrightarrow B$, on n'écrira jamais cette équivalence !! Le raisonnement se rédigera de la façon suivante : "Comme $A$ est vraie ALORS on a $B$ ..." et ainsi de suite jusqu'à prouver que $C$ est vraie.

Ex : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(x-1) = 3$. Prouver que $x \geq 1$

### 3.4.3 Reformuler plus simplement un énoncé

*Remarque* 14. Une démarche classique des mathématiques, consiste à modifier l'énoncé (et/ou la conclusion) du problème par équivalences successives afin d'obtenir une formulation plus simple et plus explicite de la question.

**Modification de l'énoncé**

**Exemple 14.** $(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Prouver que si $x^2 - x - 2 \geq 0$ alors $x^2 - 1 > 0$.

### 3.4.4 Condition Nécessaire et Condition Suffisante

DÉFINITION 5 : **Condition Nécessaire et Suffisante :**
Supposons qu'une proposition $A \Rightarrow B$ soit VRAIE.
Alors :

- $*$ Il est nécessaire que B soit VRAI pour que A le soit. B est une *Condition Nécessaire* (CN) pour avoir A
- $*$ Il suffit que A soit VRAI pour que B le soit. A est une *Condition Suffisante* (CS) pour avoir B

*Remarque* 15.

1. Si l'on a : $A \iff B$, alors B est une *Condition Nécessaire et Suffisante* (CNS) pour avoir A.
2. Dans un théorème, la conclusion est une condition nécessaire pour que les hypothèses soient vérifiées.
3. La recherche de Conditions Nécessaires pour avoir une proposition $A$ se fait par un raisonnement déductif : on part de la proposition $A$ et tout ce que l'on peut en déduire constitue des CN.

**Exemple 15.** $(*)$ Complétez la phrase suivante : "a+b est pair" est une condition ........ pour que "ab soit impair"

*Exercice : 5*

$(*)$ On s'intéresse aux fonctions réelles $f$ solutions de l'équation fonctionnelle : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x).f(y)$.

1. Déterminer une condition nécessaire portant sur la valeur de $f(0)$ pour que $f$ convienne.
2. Déterminer une condition suffisante sur $f$ pour que $f$ convienne.

**Méthode pour trouver une CNS pour avoir A.**

1. Meth 1 : On transforme $A$ par équivalences successives : $A \iff \ldots \iff \ldots \iff B$
2. Meth 2 :
   (a) On suppose que la proposition A est vraie et on en déduit des propositions nécessaires par un raisonnement déductif. Parmi ces propositions, on sélectionne une proposition $B$ qui semble convenir. On dira ici qu'on effectue une *analyse* du problème.
   (b) Il s'agit alors de démontrer que B est aussi une condition suffisante.
   Pour cela, on montre que si B est vraie alors $A$ l'est aussi.
      i. Cas 1 : B est bien une CS. CQFD
      ii. Cas 2 : B n'est pas une CS.
      Alors le raisonnement fait apparaître une nouvelle CN que l'on inclut dans la proposition $B$.

**Exemple 16.** $(*)$

1. Déterminer une CNS sur $a, b, c \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f$ définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ soit paire.

2. Déterminer une CNS sur $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$ pour que la fonction $f$ définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ soit impaire.

#### 3.4.5 Triple équivalence

**Méthode pour montrer l'équivalence de trois propositions** $A \Longleftrightarrow B \Longleftrightarrow C$ :

Il suffit de montrer trois implications convenablement choisies, par exemple $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$ et $C \Rightarrow A$.

**Exemple 17.** Démontrer la validité de la méthode précédente.

### 3.5 Raisonnement par l'absurde

Ce mode de raisonnement a été proposé par Euclide 330 avant JC.

**Méthode pour montrer par l'absurde qu'une proposition** $A$ **est VRAIE :**

On suppose que la proposition $A$ est FAUSSE et on en déduit un certain nombre de résultats.
Si, parmi les résultats obtenus, on aboutit à une contradiction avec une proposition que l'on sait être VRAIE (une hypothèse, un axiome ou un résultat précédemment démontré), alors $A$ ne peut être FAUSSE. On a donc ainsi montré que $A$ était VRAIE.

*Exercice : 6*

($**$) Soit $f$ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ croissante vérifiant $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
Montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

*Exercice : 7*

($**$) Sauriez-vous prouver, comme Euclide, que le réel $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.

### 3.6 Unicité d'un élément

**Méthodes pour montrer l'unicité d'un élément :**

1. On peut supposer qu'il existe 2 éléments $a$ et $a'$ répondant à la question et on prouve alors que $a = a'$.
2. On peut directement déterminer l'élément dont on veut prouver l'unicité.
3. On peut utiliser un théorème (dit "théorème d'unicité").
4. On peut utiliser une fonction bijective.

**Exemple 18.** ($*$)

1. Montrer l'unicité de la décomposition d'un vecteur du plan comme combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires donnés.
2. Prouver l'unicité de la solution de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$.
3. Prouver l'existence et l'unicité de la solution du système $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = -1 \\ -3x + y = 2 \end{array}\right.$.

### 3.7 Utilisation d'un contre-exemple

Définition 6 : Un contre-exemple est un exemple qui permet de montrer qu'une proposition de la fome "Pour tout $x$ vérifiant une condition, on a $P(x)$" est FAUSSE.

**Exemple 19.** ($*$) Soit f est une application continue de $[-1;1]$ dans $\mathbb{R}$.
Prouvez que l'implication suivante est FAUSSE : "Si $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ alors $f = 0$ sur $[-1;1]$ "

### 3.8 Raisonnement par disjonction de cas

Ce mode de raisonnement repose sur le fait que : "$(A \Rightarrow B)$ ET $(nonA \Rightarrow B)$" est logiquement équivalente à "$B$".

**Méthode pour prouver qu'une proposition $B$ est vraie :**

1. On suppose qu'une situation donnée est vérifiée (proposition $A$ vraie).
   On démontre alors que $B$ est vraie.
2. On suppose que la situation précédente n'est pas vérifiée (proposition $A$ fausse).
   On démontre alors que $B$ reste vraie.

**Exemple 20.** Prouver en considérant le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ qu'il existe deux irrationnels $a$ et $b$ tels que $a^b \in \mathbb{Q}$.

### 3.9 Raisonnement par Analyse/Synthèse :

**Exemple 21.**
$(*)$ Démontrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

On pourra utiliser ce type de raisonnement dès lors que la question demande de déterminer des éléments.

1. L'**analyse** du problème consiste à supposer VRAI le résultat à démontrer POUR rechercher des conditions nécessairement vérifiées par les éléments inconnus. Dans beaucoup de cas, l'analyse se conclut par la détermination exacte et unique de ces éléments.

2. La **synthèse** consiste alors à prouver qu'en prenant les éléments déterminés dans la partie analyse, la propriété à démontrer est alors VRAIE.

*Remarque* 16. Cette méthode s'apparente à la méthode de recherche d'une CNS.

*Exercice : 8*
$(*)$ Prouver l'existence et l'unicité du cercle circonscrit à un triangle non applati.

*Exercice : 9*
$(**)$ Déterminez l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient la proposition suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) - f(xy) = x + y$$

### 3.10 Le raisonnement par récurrence

Ce type de raisonnement peut s'utiliser lorsqu'il s'agit de montrer qu'une propriété $P(n)$ est VRAIE pour tous les entiers $n$ supérieurs à un entier $n_0$ ($\forall n \geq n_0$) donné. On procèdera de la façon suivante :

**Méthode : récurrence simple**

On commence par bien définir la propriété $P(n)$ que l'on souhaite démontrer.
ATTENTION : le "$\forall n \in \mathbb{N}$" ne fait pas partie de la propriété $P(n)$ !!

1. **Initialisation :** (amorçage)
   On prouve que la propriété $P(n_0)$ est VRAIE.
2. **Construction du moteur :** (hérédité)
   On considère un entier $n \geq n_0$. (Ce qui se rédige sous la forme "Soit $n \geq n_0$")
   On suppose que $P(n)$ est VRAIE et l'on démontre alors que $P(n+1)$ est VRAIE.
3. **Conclusion :**
   Les résultats précédents prouvent que $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

**Raisonnement par récurrence**

*Remarque* 17. Il existe d'autres types de raisonnements par récurrence ("récurrence forte" et "récurrence avec prédécesseurs") que l'on rencontrera lors du cours sur les entiers naturels.

**Exemple 22.** Prouver que pour tout $a \geq 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $1 + (a-1)n \leq a^n$.

*Exercice : 10*

Soit $n \in \mathbb{N}$. La propriété : << $2^n \leq n! \leq n^n$ >> est-elle vraie à partir d'un certain rang ?

### 3.11 Comment montrer l'égalité de deux ensembles ?

Montrer que deux sous-ensembles $A$ et $B$ d'un ensemble $E$ sont identiques est une question fréquente en mathématiques. Pour prouver que $A = B$ on dispose de deux méthodes :

1. **Méthode 1 :** Par équivalences successives.
   On rédige le raisonnement de la façon suivante :

   *Soit $x \in E$.*
   *On a :* $x \in A \Longleftrightarrow \ldots \Longleftrightarrow x \in B$.
   *Par conséquent, $A = B$*

2. **Méthode 2 :** Par double inclusion
   (a) On commence par montrer que $A \subset B$.
   Pour cela, on peut rédiger le raisonnement de la façon suivante :

   *Soit $x \in A$, prouvons que $x \in B$ : ...*

   (b) Puis on démontre d'une façon équivalente que $B \subset A$.

**Exemple 23.** Prouver que les sous-ensembles $A$ et $B$ du plan affine $\mathcal{P}$ suivants sont identiques :

1. $A = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid 2x + y = 1\}$
2. $B = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid \text{il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = -\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases} \}$

*Exercice : 11*

($*$) Prouver que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists t \in \mathbb{R}^{+*} \text{ tel que } x = \ln t \text{ et } y = t - 1\} \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$

## 4 Qu'attend-t-on d'un élève de MPSI ?

CONVAINCRE son lecteur (ou son auditeur) qu'une proposition mathématique est VRAIE

par la RIGUEUR et la LISIBILITE de son raisonnement

Cette année, outre la découverte de nouvelles notions mathématiques, vous allez surtout apprendre à FAIRE des mathématiques. Nous insisterons sur les méthodes de résolution de problème, sur la pratique rigoureuse du raisonnement mais aussi sur les techniques de rédaction et de présentation nécessaires à sa compréhension.