Les Développements Limités

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

18 février 2011

1 Définitions

DÉFINITION 1 : **DL**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un intervalle (ou réunion d'intervalles) I et un point $x_0 \in I$.
On dit que la fonction f admet un *développement limité* en x_0 à l'ordre n (que l'on notera $DL(x_0,n)$)
si $\forall x \in I$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o\big((x-x_0)^n\big) \quad \text{au voisinage de } x_0$$

Le polynôme $F(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n$ est la *partie régulière* du DL.
La différence $R(x) = o\big((x-x_0)^n\big) = f(x) - F(x)$ est le *reste* du DL.

Remarque 1. On peut interpréter $F(x)$ comme le polynôme de degré n qui donne la *meilleure* approximation de $f(x)$ au voisinage de x_0.

Remarque 2. Par un changement de variables $h = x - x_0$, on peut toujours se ramener au cas où $x_0 = 0$.
Dorénavant, nous nous intéresserons donc essentiellement aux DL en 0.

Remarque 3. Pour obtenir des développement limités sous Maple, vous pourrez utiliser les fonctions *taylor() ou series()*.
Mais attention : Maple donne le reste du DL sous la forme d'un $O((x-x_0)^n)$ et non d'un $o((x-x_0)^n)$.

PROPOSITION 1 : **DL de** $\dfrac{1}{1-x}$

La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x} \end{array}$ admet un DL(0, n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\boxed{\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}}$ avec $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$

Pour cette fonction, on connaît *explicitement* le reste du DL.

Preuve 1 : Il s'agit d'une formule bien connue ...

Remarque 4. En remplaçant x par $-x$ ou x^2 dans l'expression précédente, on en déduit les DL(0, n) des fonctions suivantes :

2. $\boxed{\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$

3. $\boxed{\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})}$

3. (bis) $\boxed{\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})}$

Théorème 2 : **Unicité d'un DL et applications**
Soit une fonction f admettant un $DL(0, n)$. Alors :

1. la partie principale est unique
2. Pour tout $k \leq n$, f admet un $DL(0, k)$ obtenu en tronquant la partie principale du $DL(0,n)$ à l'ordre k
3. Si f est paire (resp. impaire) sur un voisinage de 0, alors F est un polynôme pair (resp. impair).

Preuve 2 :

1. Immédiat par l'absurde !
2. En effet, le reste obtenu ainsi est bien un $o(x^k)$.
3. Facile par l'absurde !

Remarque 5. Soit f une fonction qui admet un DL à l'ordre $(2n + 2)$, alors son DL s'écrit :

1. Si la fonction f est paire : $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + o(x^{2n+1})$
2. Si la fonction f est impaire : $f(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1} + o(x^{2n+2})$

Théorème 3 : **Continuité et dérivabilité en x_0**
Soit f une fonction définie sur I contenant x_0.

1. f est continue en x_0 ssi f admet un $DL(x_0, 0)$. Dans ce cas, $f(x) = f(x_0) + o(1)$
2. f est dérivable en x_0 ssi f admet un $DL(x_0, 1)$. Dans ce cas, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + o(x - x_0)$

Preuve 3 : Les deux équivalences proviennent de la traduction des limites sous forme d'égalités.

Remarque 6. Attention, ces deux propriétés ne se généralisent pas !...
Nous verrons en effet, qu'une fonction peut admettre un $DL(x_0, 2)$ sans pour autant être deux fois dérivable en x_0.

Théorème 4 : **Combinaison linéaire de DL**
Soient deux fonctions f et g qui admettent des $DL(0, n)$ de partie régulière respectives $F(x)$ et $G(x)$.
Soient deux scalaires $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}2$.
La fonction $\lambda f + \mu g$ admet alors un $DL(0, n)$ de partie régulière $\lambda F(x) + \mu G(x)$.

Preuve 4 : Pas de difficulté.

`Exemple 1.` $(*)$ Déterminer un DL(0, n) de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$.

2 Développements limités classiques.

2.1 Obtention par primitivation

Théorème 5 : **Primitivation d'un DL**
Soit un intervalle I contenant 0 et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
On suppose que la fonction f' admet un $DL(0, n)$ de la forme

$$f'(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$$

Alors f admet un $DL(0, n + 1)$ obtenu en primitivant la partie régulière et en ajoutant $f(0)$:

$$f(x) = \boxed{\text{f}(0)} + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Preuve 5 : Il s'agit de prouver que $g(x) = f(x) - (f(0) + a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + a_n\frac{x^{n+1}}{n+1})$ est un $o(x^{n+1})$.
On a en évidence $g'(x) = o(x^n)$, c'est à dire $\dfrac{g'(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un voisinage $V_u =]-u\ ;\ u[$ de 0 sur lequel $-\varepsilon.t^n \leq g'(t) \leq \varepsilon.t^n$.
En intégrant cette inégalité entre 0 et $x \in V_u$, on montre facilement que $\dfrac{g(x)}{x^{n+1}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. CQFD ...

Ainsi, on obtient :

4. $\boxed{\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1}\dfrac{x^n}{n} + o(x^n)}$

5. $\boxed{\arctan x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})}$

2.2 Obtention par Taylor-Young

Théorème 6 : **Taylor-Young au voisinage de** 0
Si une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I avec $0 \in I$, alors f possède un $DL(0, n)$ donné par la formule de Taylor-Young :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

Preuve 6 : On démontre ce résultat par récurrence en utilisant le théorème de primitivation d'un DL.

On obtient alors les $DL(0, n)$ suivants valables pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

6. $\boxed{e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n)}$

7. $\boxed{\operatorname{sh} x = x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots + \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$

8. $\boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$

9. $\boxed{\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$

10. $\boxed{\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$

11. $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}}$

Deux cas particuliers lorsque $\alpha = \dfrac{1}{2}$ et $\alpha = -\dfrac{1}{2}$:

12. $\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + o(x^2)}$

13. $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{8}x^2 + o(x^2)}$

Par primitivation on obtient aussi les deux DL au $\mathcal{V}(0)$ suivants :

14. $\boxed{\arcsin x = x + \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}$

15 . $\boxed{\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x = \dfrac{\pi}{2} - x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)}$

Exercice : 1

($*$) Déterminer un DL à l'ordre 4 en $x_0 = 2$ de la fonction exp.

Exercice : 2

($**$) Démontrer que : $\arctan(\frac{1}{x}) = \varepsilon\frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ où $\begin{cases} \varepsilon = 1 \text{ si } x > 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Exercice : 3

Exemple de fonction non nulle dont tous les DL en 0 sont nuls

($**$) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité et 0 en une fonction $\mathcal{C}^\infty$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire un $DL(0, n)$ de f.

Réciproquement :
Un développement limité en x_0 à l'ordre n **d'une application $\mathcal{C}^n$ sur I** (avec $x_0 \in I$) permet de déterminer les valeurs de $f(x_0)$, $f'(x_0) \dots f^{(n)}(x_0)$.
D'après la formule de Taylor-Young et l'unicité du $DL(0, n)$ on obtient :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \qquad f^{(k)}(x_0) = k!a_k$$

`Exemple 2.` ($*$) L'application f définie par $f(x) = \mathrm{ch}(\ln(1+x))$ admet pour $DL(0,3)$: $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$.
Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

2.3 Dérivation d'un DL

Remarque 7. On a vu qu'on pouvait primitiver sans soucis les développements limités. En revanche, il faudra être très prudent avant de dériver un DL.

THÉORÈME 7 : Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0.
$\boxed{\text{Si}}$ $\begin{cases} f \text{ admet un } DL(0, n) \\ f' \text{ admet un } DL(0, n-1) \end{cases}$, $\boxed{\text{alors}}$ le DL de f' s'obtient en dérivant celui de f.

Preuve 7 : On exprime le DL(0, n-1) de f' est on lui applique le théorème de primitivation.

Remarque 8. Le théorème précédent pourra par exemple s'appliquer dans le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque 9. Le théorème précédent sous-entend que f peut admettre un $DL(0, n)$ sans que f' admette un $DL(0, n-1)$.
Vérifiez cela en considérant la fonction définie par : $f(x) = x^2 + x^4.\cos(\frac{1}{x})$.

2.4 Somme de DL

THÉORÈME 8 : **Somme de DL**
Si deux fonctions f et g admettent respectivement un $DL(0, n)$ et un $DL(0, m)$ alors la fonction $f + g$ admet un DL à l'ordre $\min(n,m)$ obtenu en ajoutant les DL de f et de g.

Preuve 8 : Pas de difficulté !

`Exemple 3.` ($*$) Soit $n \in \mathbb{N}$. Retrouver les $DL(0, 2n)$ des fonctions ch et sh.

2.5 Produit de DL

THÉORÈME 9 : **Produit de DL**
Si deux fonctions f et g admettent des $DL(0, n)$ de parties régulières $F(x)$ et $G(x)$, alors la fonction fg admet un $DL(0, n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $F(x)G(x)$.

Preuve 9 : Il suffit de l'écrire ...

Remarque 10. Dans un produit de DL d'ordre n, les termes de degré $> n$ n'ont aucune signification !

Exercice : 4

($*$) Prouver qu'au voisinage de 0 on a les DL suivants :

1. $\cos(x)\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)$
2. $\sin(x)\exp(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
3. $\frac{\ln(1+x)}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$
4. $\frac{\sin x \operatorname{sh} x}{\sqrt{1-x^2}} = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)$

Remarque 11.
Pour obtenir un $DL(0, n)$ d'un produit $f.g$, il n'est par toujours nécessaire de rechercher un $DL(0, n)$ de f et de g. En effet, si par exemple le DL de f peut se factoriser par x^k, on pourra se contenter pour g d'un DL à l'ordre $n-k$.

`Exemple 4.` $(*)$ DL(0,5) de $f(x) = \sin^2 x. \arcsin(2x)$

2.6 Composition de DL

Théorème 10 : **Composée de DL**

Si $\begin{cases} \text{la fonction } f \text{ admet un } DL(0, n) \text{ de partie régulière } F \\ \text{la fonction } u \text{ admet un } DL(0, n) \text{ de partie régulière } U \text{ avec } \boxed{u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0} \end{cases}$

alors $\boxed{f \circ u}$ admet un $DL(0, n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le polynôme $F \circ U(x)$.

Preuve 10 : Là encore, il suffit de l'écrire ...

`Exemple 5.` $(*)$ Trouver les DL(0, 3) des fonctions :

1. $f(x) = \ln(1 + \sin x)$
2. $g(x) = \sin(\operatorname{sh} x)$
3. $h(x) = e^{\sqrt{1+x}}$
4. $i(x) = \operatorname{ch}(\ln(1+x))$

Remarque 12. Un conseil : pour éviter de faire des erreurs, commencer le calcul en remplaçant $u(x)$ par son DL.

Exercice : 5
$(*)$ Prouver qu'au voisinage de 0 on a les DL suivants :

1. $\ln(1 + x + \sqrt{1+x}) = \ln 2 + \frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2 + o(x^2)$
2. $\arctan\left(\frac{2+x}{1+x}\right) = \arctan 2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{25}x^2 + o(x^2)$
3. $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2}x - \frac{5}{128}\sqrt{2}x^2 + o(x^2)$
4. $\ln(1 + \sin^2 x) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$

2.7 Inverse d'un Développement Limité

Théorème 11 : Si f admet un DL(0, n) et si $\boxed{f(0) \neq 0}$, alors $\frac{1}{f}$ admet un DL(0, n).

Preuve 11 : On commence par écrire f sous la forme : $f(x) = f(0)(1 + u(x))$.
La fonction u admet un DL(0, n) et $u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On peut donc appliquer le théorème de composition des DL.

Pour déterminer le DL(0, n) de $\frac{1}{f}$

1. On remplace f par son DL, puis on factorise le terme de plus bas degré pour obtenir la forme : $\frac{1}{1+\dots}$
2. On trouve alors un DL(0, n) de $\frac{1}{f}$ en utilisant le DL de $\frac{1}{1+x}$

Remarque 13. On pourra utiliser cette méthode pour rechercher un DL(0, n) d'un quotient $\frac{f}{g}$.

`Exemple 6.` $(*)$ Déterminer le DL(0, 5) de $f(x) = \frac{1}{2 - x + x^2}$.

Exercice : 6

($*$) Déterminer le DL(0, 5) de la fonction tangente, en utilisant :

1. $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
2. la relation $\forall x \in]-\pi/2,\pi/2[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.

Retenir le DL suivant au moins jusqu'à l'ordre 3 : 16. $\boxed{\tan x = x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + \dfrac{17}{315}x^7 + o(x^7)}$

Exercice : 7

($*$) Déterminer un DL(0, 2) de $f(x) = \dfrac{\sin x - x}{\tan x - x}$.

Remarque 14. Et si $f(0) = 0$?

A défaut de pouvoir trouver un DL(0, n), on pourra déterminer un *développement asymptotique* de $\dfrac{1}{f}$ au $\mathcal{V}(0)$.

`Exemple 7.` ($*$) Déterminer un développement symptotique de $\dfrac{1}{\sin x}$ au $\mathcal{V}(0)$.

2.8 Développement limité de la bijection réciproque d'une application

Soit $f\ :\ I \mapsto f(I)$ une bijection telle que $\boxed{f(0) = 0}$.

Si l'on sait que la bijection réciproque d'une application f admet un DL(0, n), alors on peut trouver celui-ci en procédant de la façon suivante :

1. On cherche un DL(0, n) de la fonction f.
2. On écrit que le DL(0, n) de f^{-1} est de la forme $f^{-1}(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + o(x^n)$.
3. On trouve les coefficients $a_0, \ldots a_n$ en remarquant que $fof^{-1}(x) = x$ pour tout x au voisinage de 0.

`Exemple 8.` ($*$) Retrouver le DL(0, 5) de la fonction $f(x) = \tan x$.

Remarque 15. L'existence d'un DL(0, n) de f^{-1} est assurée lorsque f est un $\mathcal{C}^n$-difféomorphisme au $\mathcal{V}(0)$.

Exercice : 8

($*$)

1. Montrer que l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x.e^{x^2}$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. En admettant que f^{-1} est alors aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$, déterminer un $DL(0,5)$ de f^{-1}.

2.9 Méthode mnémotechnique pour retenir certains DL(0, 2 ou 3)

Comment se souvenir du DL(0, 2) ou DL(0, 3) d'une fonction ?

1. Les deux premiers termes de ce DL correspondent à l'équation de la tangente : $f(0) + f'(0)x$
2. Le signe du terme suivant s'obtient en comparant la position de la courbe par rapport à sa tangente.
   Pour la valeur de ce terme, il vous faudra tout de même faire un petit effort de mémoire... On pourra cependant retenir le tableau suivant :

Fonction	sin - sh - arcsin - arccos - argsh	cos - ch	tan - arctan - th - argth
Valeur du "3ième" terme du DL(0, n)	$\pm\dfrac{x^3}{6}$	$\pm\dfrac{x^2}{2}$	$\pm\dfrac{x^3}{3}$

3 Applications des développements limités

3.1 Recherche de limites et d'équivalents

Méthode pour rechercher la limite de $f(x)$ en x_0 lorsque celle-ci n'est pas évidente :

1. On effectue un changement de variables : $h = (x - x_0)$ ou $h = \dfrac{1}{x}$ pour se ramener à une limite en 0
2. On recherche un équivalent de f ou d'une partie de f en utilisant si nécessaire des DL.

Remarque 16. On ne peut pas sommer des équivalents, mais sommer des DL ne présente aucun problème.
Les DL seront donc particulièrement utiles dans la recherche de l'équivalent d'une somme.

Exercice : 9

$(*)$ Rechercher les limites en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{\sin x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x^2}$
2. $g(x) = \dfrac{\sin x - \operatorname{sh} x}{x^3}$
3. $h(x) = \dfrac{\ln(\cos x) + \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{2}}{\sin^4 x}$

Exercice : 10

$(*)$ Trouver la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\dfrac{\cos\frac{1}{n} + \operatorname{ch}\frac{1}{n}}{2}\right)^{n^4}$.

Exercice : 11

$(*)$ (CCP MP) Déterminer le signe au voisinage de $+\infty$ de : $u_n = \operatorname{sh}\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n}$.

3.2 Prolongement d'une fonction

Grâce à un DL(0, 1), on peut immédiatement dire si une fonction est prolongeable par continuité en 0 et si son prolongement est dérivable en 0.

Théorème 12 : **DL et prolongement**
Soit une fonction f définie sur l'intervalle $]0,a[$ admettant un DL(0, n) en 0 avec $n \geq 1$: $f(x) = a_0 + a_1 x + o(x)$
Alors

1. la fonction f se prolonge par continuité en 0 en posant $f(0) = a_0$
2. le prolongement de f est dérivable en 0 et $f'(0) = a_1$

Preuve 12 : Ce théorème a déjà été démontré dans le cours sur la dérivation.

`Exemple 9.` $(*)$ Etudier le prolongement en 0 (continuité et dérivabilité) de $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ et de $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice : 12

$(*)$ Prouver que la fonction f définie sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2 - 1}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Remarque 17. ATTENTION !!! Le théorème précédent ne peut pas se généraliser.
L'existence d'un DL à l'ordre n pour $n \geq 2$ ne permet pas d'affirmer que la fonction est n fois dérivable.

`Exemple 10.` $(*)$ En effet, considérons l'exemple suivant : $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Nous avons $f(x) = 0 + 0.x + 0.x^2 + o(x^2)$.

D'après le théorème précédent, cette fonction est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.
En revanche, on ne peut pas affirmer que $f''(0) = 0$.
En effet, le taux de variation $\dfrac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = 3x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ n'a pas de limite lorsque $x \to 0$.
Par conséquent, f n'est pas deux fois dérivable au voisinage de 0.
En d'autres termes, le coefficient a_2 d'un $DL(0{,}2)$ ne permet pas de conclure à l'existence de $f''(0)$!

Remarque 18. On utilisera en particulier cette méthode lors du raccordement de solutions d'une équation différentielle.

3.3 Tangente à une courbe

Théorème 13 : **Position locale par rapport à la tangente**
Si une fonction f définie en x_0, admet un DL en x_0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_k(x - x_0)^k + o\big((x - x_0)^k\big), \quad a_k \neq 0$$

Alors
1. l'équation de la tangente en x_0 est $y = a_0 + a_1(x - x_0)$
2. $f(x) - [a_0 + a_1(x - x_0)] \sim a_k(x - x_0)^k$, et en fonction du signe de a_k et de la parité de k, on en déduit la position locale de la courbe par rapport à sa tangente

Preuve 13 :
1. On a en effet $a_0 = f(0)$ et $a_1 = f'(0)$.
2. Cela provient du fait qu'une fonction est du signe de son équivalent au voisinage du point considéré.

Exercice : 13
(∗) Etude locale en 0 des fonctions définies par :

1. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$
2. $g(x) = \dfrac{\sin^2 x}{x}$
3. $h(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}$
4. $i(x) = \dfrac{(e^{\operatorname{sh} x} - \cos x)^2}{\ln \cos x}$

3.4 Utilisation de DL pour l'étude des branches infinies

Pour étudier une branche infinie d'une courbe $y = f(x)$ en $\pm\infty$:
1. On fait le changement de variables $h = \dfrac{1}{x}$ pour se ramener à une étude en 0.
   On obtient alors une fonction $\widetilde{f}(h)$
2. On effectue un DL de $\widetilde{f}(h)$ en 0 avec au moins un terme significatif qui tend vers 0
3. On revient à $f(x)$.
   On obtient alors un "développement asymptotique" que l'on interprète pour trouver l'équation d'une asymptote (ou d'une fonction polynômiale asymptote) et la position locale de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exercice : 14
(∗) Etudier les branches infinies des courbes représentatives des fonctions :

1. $f(x) = (x + 2)e^{1/x}$
2. $g(x) = x^2 e^{\frac{x}{x^2-1}}$

Exercice : 15
(∗) Rechercher la limite en $+\infty$ de la fonction suivante : $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ et déterminer un équivalent de $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x - e$.

3.5 Etude des points singuliers d'un arc paramétré

Dans le cours sur les courbes paramétrées, nous avons laissé de côté l'étude locale d'une courbe en un point stationnaire. Nous allons voir ici comment les DL peuvent nous aider à étudier la forme de la courbe en ces points.

Données :

Soit la courbe paramétrée définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ par $F \ : \ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t),\, y(t)) \end{array}$

Soit $t_0 \in I$: supposons que $M(t_0)$ est un point singulier, c'est à dire tel que : $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$.

Méthode

1. On commence par effectuer un DL de $x(t)$ et de $y(t)$ au voisinage de t_0 avec globalement deux termes significatifs qui tendent vers 0 lorsque $t \mapsto t_0$.

   On obtient ainsi : $\left\{ \begin{array}{l} x(t) = x_0 + a_p.(t-t_0)^p + a_q.(t-t_0)^q + o((t-t_0)^q) \\ y(t) = y_0 + b_p.(t-t_0)^p + b_q.(t-t_0)^q + o((t-t_0)^q) \end{array} \right.$.

2. On écrit alors ces résultats sous la forme : $\boxed{\overrightarrow{M_0M(t)} = (t-t_0)^p.\overrightarrow{T}_p(t_0) + (t-t_0)^q.\overrightarrow{T}_q(t_0) + \overrightarrow{o}((t-t_0)^q)}$

Remarque 19. $\overrightarrow{o}((t-t_0)^q)$ est un vecteur dont les deux composantes sont négligeables devant $(t-t_0)^q$ au $\mathcal{V}(t_0)$.

PROPOSITION 14 : Le vecteur $\overrightarrow{T}_p(t_0)$ indique la direction de la tangente à la courbe au point $M(t_0)$.

Preuve 14 : En effet, le vecteur $\dfrac{1}{(t-t_0)^p}.\overrightarrow{M_0M(t)}$ tend vers $\overrightarrow{T}_p(t_0)$ lorsque $t \mapsto t_0$.

Si les vecteurs $\overrightarrow{T}_p(t_0)$ et $\overrightarrow{T}_q(t_0)$ forment une famille libre, on peut alors en déduit la position locale de la courbe par rapport à sa tangente en $M(t_0)$, selon la parité de p et q.

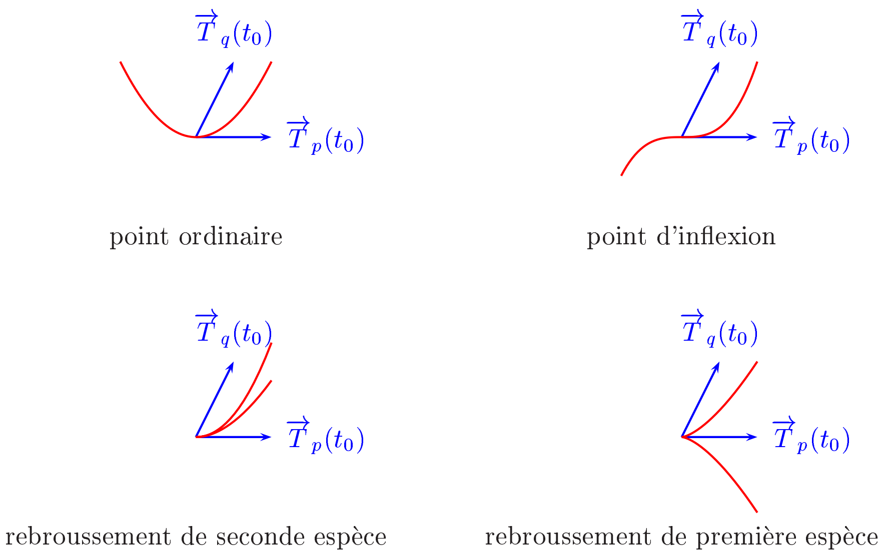

FIG. 1 – *Étude locale d'une courbe paramétrée*

PROPOSITION 15 : Si $\overrightarrow{T}_p$ et $\overrightarrow{T}_q$ sont linéairement indépendants, alors $M(t_0)$ est un :

	q pair	**q impair**
p pair	Point de rebroussement de 2nde espèce	Point de rebroussement de 1ère espèce
p impair	Point ordinaire	Point d'inflexion

Remarque 20.

1. Si les vecteurs $\overrightarrow{T}_p(t_0)$ et $\overrightarrow{T}_q(t_0)$ sont liés, on recherche des DL de $x(t)$ et $y(t)$ à un ordre suffisant afin d'obtenir un vecteur $\overrightarrow{T}_r(t_0)$ indépendant des précédents. La recherche de la nature du point singulier se fait alors en raisonnant sur le couple (p, r).
2. Si x et y sont $\mathcal{C}^\infty$, les vecteurs $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{T}_p(t_0)\\ \overrightarrow{T}_q(t_0)\end{array}\right.$ sont colinéaires aux vecteurs $\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{u}_p(t_0)(x^{(p)}(t_0)),\, y^{(p)}(t_0))\\ \overrightarrow{u}_q(t_0)(x^{(q)}(t_0)),\, y^{(q)}(t_0))\end{array}\right.$.
   Ainsi, si les dérivées successives de x et y sont simples à calculer, il sera parfois plus rapide de déterminer le couple (p, q) sans passer par les développements limités, mais en recherchant directement les vecteurs $\overrightarrow{u}_p(t_0)$ et $\overrightarrow{u}_q(t_0)$.

Exercice : 16

$(*)$ Etudier les points stationnaires des courbes paramétrées suivantes :

1. $\left\{\begin{array}{l}x(t) = t^3 - 3t\\ y(t) = t^3 - t^2 - t + 1\end{array}\right.$ $(\mathbb{R})$
2. $\left\{\begin{array}{l}x(t) = \cos(3t)\\ y(t) = \sin(\frac{3}{2}t)\end{array}\right.$ $([0, \frac{\pi}{2}])$
3. $\left\{\begin{array}{l}x(t) = t^2 + t^4\\ y(t) = t^2 + t^5\end{array}\right.$ $(\mathbb{R})$

3.6 Raccordement de solutions d'une équation différentielle non normalisée

Pour étudier la prolongeabilité par continuité et la dérivabilité des solutions aux points de raccordement, on peut utiliser avantageusement les développements limités.

`Exemple 11.` $(**)$ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Exercice : 17

$(**)$ Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $x(x^2+1)y' + y + x = 0$
2. $2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$
3. $(x+1)y' = y + 1$

3.7 Etude des branches infinies d'une courbe paramétrée (COMPLEMENT)

Une méthode pour rechercher les courbes asymptotes à une courbe paramétrée et préciser la position relative de la courbe par rapport à cette asymptote consiste à :

Méthode

1. Déterminer des développements asymptotiques de $x(t)$ et $y(t)$ avec un terme significatif qui tend vers 0.
2. Effectuer une combinaison linéaire de $x(t)$ et $y(t)$ afin d'éliminer les termes qui tendent vers l'infini.
3. Si on trouve une relation de la forme : $y(t) = a.x(t) + b + c.(t-t_0)^k + o((t-t_0)^k)$, alors la courbe admet la droite $y = ax + b$ pour asymptote et on détermine la position relative de la courbe en examinant le terme $c.(t-t_0)^k$.

`Exemple 12.` $(**)$ Etudier les branches infinies de la courbe de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l}x(t) = \dfrac{t}{\ln t}\\ y(t) = \dfrac{t^2}{(t-1)}\end{array}\right.$

Exercice : 18

$(**)$ Etudier la branche infinie lorsque $t \to 0$ de la courbe de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l}x(t) = \dfrac{t^2+1}{2t}\\ y(t) = \dfrac{2t-1}{t^2}\end{array}\right.$