Les systèmes d'équations linéaires

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

10 avril 2011

1 Diverses interprétations d'un système

1.1 Vocabulaire

On considère le système de n équations à p inconnues : $(S) \quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$

On appelle alors $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Définition 1 : **Vocabulaire lié aux systèmes**

1. *Résoudre* le système consiste à trouver l'ensemble $\mathbb{S}$ de **tous** les p-uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant (S).
2. Le vecteur $B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ s'appelle le *vecteur second membre* du système.
3. On appelle *système homogène* (S_0) associé à (S), le système obtenu en prenant $B = 0$.
   On note S_0 l'ensemble des solutions du système homogène.
4. La matrice A s'appelle la *matrice* du système.
5. $\text{rg}(A)$ s'appelle le *rang* du système. Il s'agit du nombre d'équations indépendantes du système (S_0) !
6. On dit que le système est *compatible* si l'ensemble des solutions est non-vide.

Remarque 1. Dans ce cours, on reprend les conventions utilisées dans le chapitre sur les matrices.

1.2 Interprétation vectorielle

Théorème 1 : Soient $C_1, \dots, C_p \in \mathbb{K}^n$ les vecteurs colonnes de A.

$$\boxed{(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de (S)} \iff x_1C_1 + \cdots + x_pC_p = B}$$

Ainsi : le système (S) est compatible si et seulement si $B \in \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.

Remarque 2. Le rang du système est le rang du système de vecteurs $(C_1, \dots, C_p)$ dans $\mathbb{K}^n$.

1.3 Interprétation matricielle

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p1}(\mathbb{K})$.

$$\boxed{(x_1,\ \dots,\ x_p) \text{ est solution de (S)} \iff AX = B}$$

1.4 Interprétation à l'aide d'une application linéaire

Soit E un ev de dimension p et F un ev de dimension n, munis des bases $e = (e_1,\ \dots,\ e_p)$ et $f = (f_1,\ \dots,\ f_n)$.

1. Soit b le vecteur de F tel que $Mat_f(b) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.
2. Soit l'unique application linéaire $u \in L(E,F)$ telle que $Mat_{e,f}(u) = A$.
3. Soit x l'unique vecteur de E tel que $Mat_e(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Alors :

$$\boxed{(x_1,\ \dots,\ x_p) \text{ est solution de (S)} \iff u(x) = b}$$

Théorème 2 : Avec les notations précédentes :

Le système S est compatible ssi $b \in \operatorname{Im} u$.

Preuve 2 : Immédiat !

Remarque 3. Le plus simple est souvent de choisir $E = \mathbb{R}^p$ et $F = \mathbb{R}^n$ munis de leurs bases canoniques.
u est alors *l'application linéaire canonique* associée au système S.

1.5 Interprétation duale

Considérons les n formes linéaires de $\mathbb{K}^{p\star}$: $f_i : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\ \dots,\ x_p) & \mapsto & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p \end{array}$

Alors

$$\boxed{x = (x_1,\ \dots,\ x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de (S)} \iff \begin{cases} f_1(x) = b_1 \\ \vdots \\ f_n(x) = b_n \end{cases}}$$

Remarque 4. L'ensemble des solutions du système homogène est alors $\mathbb{S}_0 = \ker f_1 \cap \cdots \cap \ker f_n$.

2 Structure de l'ensemble des solutions

Soit un système linéaire (S) à n équations et p inconnues.

Théorème 3 : **Structure de S_0**
L'ensemble des solutions du système homogène (S_0) est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $\boxed{\text{nombre d'inconnues} - \operatorname{rg}(S)}$

Preuve 3 : On utilise l'interprétation à l'aide d'une application linéaire et la formule du rang.

Remarque 5. $\dim \mathbb{S}_0$ est donc la différence entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations indépendantes.

Exercice : 1
Déterminez la dimension du sev de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont la somme des coefficients de chaque colonne est identique.

Théorème 4 : **Structure de l'ensemble des solutions de** (S)

1. Si le système est incompatible, $\mathbb{S} = \emptyset$.
2. Si le système est compatible, alors il existe une solution particulière x_0.

   Dans ce cas, $\boxed{\mathbb{S} = \{x_0 + x \mid x \in \mathbb{S}_0\}}$ et $\mathbb{S}$ est un espace affine de dimension $\boxed{p - \text{rg}(S)}$.

Preuve 4 : Soit u l'application linéaire canonique associée au système S.
On a alors : x solution de $S \iff u(x) = b \iff u(x) = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0 \iff x - x_0 \in \ker u$

`Exemple 1.`

Déterminer la structure de l'ensemble des solutions de $\begin{cases} x - y + z - 3t & = 1 \\ 2y + z - t & = -1 \\ x - y + t & = 3 \end{cases}$ sachant que $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution.

Corollaire 5 :
1. Si $\text{rg}(S) = p$ (le nombre d'inconnues) alors S admet au plus une solution
2. Si $\text{rg}(S) = n$ (le nombre d'équations) alors S est compatible

Preuve 5 : Soit u l'application linéaire canonique associée à S.
1. Si $\mathcal{S}$ admet une solution alors $\mathbb{S}$ est un sous espace affine de dimension 0.
2. Si $\text{rg}(S) = n$ alors $\text{Im}(u) = \mathbb{R}^n$ et donc $b \in \text{Im}(u)$.

3 Systèmes de Cramer

Définition 2 : **Système de Cramer**
Un système de Cramer est un système de n équations à n inconnues de rang n.

Remarque 6. Matriciellement, un système de Cramer s'écrit $AX = B$ avec $\begin{cases} A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \text{ une matrice carrée inversible} \\ B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K}) \end{cases}$

Théorème 6 : **Unicité de la solution**
Un système de Cramer possède une unique solution $\boxed{X = A^{-1}B}$.

Preuve 6 : L'écriture matricielle le prouve !

Théorème 7 : **Formules de Cramer**
Soient $(C_1, \ldots, C_n)$ les n vecteurs colonnes de la matrice A d'un système de Cramer, $B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ le vecteur second membre et $(x_1, \ldots, x_n)$ l'unique solution de (S).
Alors, $\forall j \in [1,n]$:

$$\boxed{x_j = \frac{\det(C_1, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n)}{\det A}}$$

Preuve 7 : Il suffit de calculer $\det(C_1, \ldots, C_{j-1}, B, C_{j+1}, \ldots, C_n)$ en remplaçant B par $\sum_{k=1}^{n} x_k.C_k$.

`Exemple 2.` Résoudre en utilisant les formules de Cramer, les 2 systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x + 2y + z & = 1 \\ x + y - z & = 2 \\ x + 3y + z & = -1 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x - my + m^2 z & = m \\ mx - m^2 y + mz & = 1 \\ mx + y - m^3 z & = 1 \end{cases}$ avec $m \in \mathbb{R}$

Remarque 7.

1. Pour la résolution de systèmes non paramétrés, on préférera la méthode de gauss vue dans la suite du chapitre.
2. En revanche, on choisira plutôt les formules de Cramer pour la résolution des systèmes paramétrés.
3. Les formules de Cramer sont aussi parfois utiles pour démontrer des résultats théoriques.

Application au calcul de l'inverse d'une matrice
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.
Alors :

$$\boxed{AX = Y \iff X = A^{-1}Y}$$

Pour déterminer A^{-1} il suffit donc de résoudre le système $AX = Y$ avec Y un matrice colonne quelconque.

`Exemple 3.` Inverser la matrice suivante après avoir prouvé qu'elle était inversible : $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 2i \\ i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$.

Proposition 8 :

1. Un système triangulaire est un système de Cramer ssi tous ses termes diagonaux sont non nuls.
   Un tel système se résout facilement pas à pas.
2. Un système de cramer homogène n'admet que le vecteur nul pour solution.

Preuve 8 :

1. Le déterminant d'un système triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux. Par conséquent, ce déterminant est non nul si et seulement si tous les coefficients diagonaux sont non nuls.
2. Le vecteur nul est une solution évidente d'un système homogème. Or un système de cramer n'admet qu'une unique solution. CQFD ...

`Exemple 4.` Prouver que la famille $\{x \mapsto \cos x,\ x \mapsto \sin x,\ x \mapsto e^x\}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ est libre.

4 Résolution pratique d'un système quelconque

4.1 Méthode de Gauss

Définition 3 : On appelle << opération élémentaire sur les lignes >> l'une des 3 opérations suivantes :

1. Echanger deux lignes
2. Remplacer une ligne L_i par $\lambda.L_i$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$
3. Remplacer une ligne L_i par $L_i + \lambda.L_j$

Théorème Fondamental 9 :
On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système en effectuant une opération élémentaire sur les lignes

Preuve 9 :

1. Les solutions d'un système sont indépendantes de l'ordre des équations.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. X vérifie $L_i \iff X$ vérifie $\lambda.L_i$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. X vérifie L_i et $L_j \iff X$ vérifie $L_i + \lambda.L_j$ et L_j.

Remarque 8.

1. On utilisera le théorème précédent pour transformer le système $AX = B$ en un système simple à résoudre. Le plus souvent, on transformera (S) en un système triangulaire (ou presque). Cette technique s'appelle la méthode de Gauss.
2. On pourra simplifier un peu les calculs en présentant le système sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} \quad A \quad & B \end{array}\right)$.

`Exemple 5.` Résoudre le système suivant : $(S)\quad \begin{cases} -2x + y + z - t & = 1 \\ x - 2y + z & = 0 \\ x - 2z + t & = -1 \\ y - z + 2t & = 1 \end{cases}$

Méthode
Si, après avoir triangularisé le système, le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, on décide alors d'attribuer aux inconnues supplémentaires le statut de paramètres.
On recherche alors les autres inconnues en fonction de ces paramètres.

`Exemple 6.` Résoudre les systèmes suivants :

1. $(S1)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 & = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 & = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = 3 \end{cases}$

2. $(S2)\quad \begin{cases} mx + y + z + t & = 1 \\ x + my + z + t & = m \\ x + y + mz + t & = m + 1 \end{cases}$

Méthode
Dans certains cas, la triangularisation aboutit à une équation impossible.
Dans ce cas le système n'admet pas de solutions.

`Exemple 7.` Résoudre le système suivant : $(S)\quad \begin{cases} x + 2y - z & = -4 \\ 2x + y + z & = 1 \\ x - y + z & = 4 \\ 2x - 2y + 7z & = 3 \end{cases}$

4.2 Exercices

Exercice : 2

Discuter et résoudre les systèmes suivants où a, b, c, α, β, γ sont des réels :

$$S_1 \begin{cases} x + y + z & = a \\ x + y - 2z & = b \\ x + y - 3z & = c \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} ax + y + z & = \alpha \\ x + ay + z & = \beta \\ x + y + az & = \gamma \end{cases} \qquad S_3 \begin{cases} x + ay + a^2z & = 1 \\ x + by + b^2z & = 0 \\ x + cy + c^2z & = 1 \end{cases} \qquad S_4 \begin{cases} -x + y + z & = 1 \\ x - y + z & = b \\ x + y - z & = b^2 \end{cases}$$

Exercice : 3

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale D.
2. Déterminer $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}DP$.
3. A quoi peut servir le travail précédent ?