Leçon Coniques : Etude d'une courbe d'équation cartésienne : $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

On note :

$Q(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2$

$f(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f$

Si b=0

Décomposition canonique

CONCLUSION

Sinon

Détermination du type de la conique

Si	Type
det Q =0	parabole
det Q > 0	ellipse
det Q < 0	hyperbole

Elimination des termes de degré 1 — Par changement de centre

Résolution du système

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0 \end{cases}$$

cas où det Q > 0 ou det Q < 0

Unique solution K

En centrant le repère en K, on obtient l'EC :

$aX^2+2bXY+cY^2+f(x_k, y_k)=0$

Elimination du terme en XY — Par rotation du repère

Angle de la rotation

Si a = c	$\varphi=\dfrac{\pi}{4}$
Si a <> c	$\tan 2\varphi=\dfrac{2b}{a-c}$, $\varphi\in\left]-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right[$

On obtient la nvelle équation par changement de repère

Nouvelle Eq Cartésienne

$AX'^2+CY'^2+f(x_k, y_k)=0$

Avec :

$$\begin{cases} AC=ac-b^2 & \text{(det Q)} \\ A+C=a+c & \text{(tr Q)} \\ A-C \text{ du signe de } a-c \end{cases}$$

CONCLUSION

cas où det Q = 0

Infinité de solutions K

En centrant le repère en K, puis en factorisant on obtient l'EC :

$a(X+b/a.Y)^2+f(x_k, y_k)=0$

Changement de repère (pas ron)

$$\begin{cases} X'=X+\dfrac{b}{a}Y \\ Y'=-\dfrac{b}{a}X+Y \end{cases}$$

Nelle EC : $a.X'^2+f(x_k, y_k)=0$

CONCLUSION

Aucune solution

En factorisant, on obtient l'EC :

$a(x+b/a.y)^2+dx+ey+f=0$

Changement de repère (pas ron)

$$\begin{cases} X=x+\dfrac{b}{a}y \\ Y=-\dfrac{b}{a}x+y \end{cases}$$

Nelle EC : $a.X^2+gX+hY+f=0$

CONCLUSION