Les Suites réelles

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

7 décembre 2010

1 Définitions

Définition 1 : **Suite**
Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.
Au lieu de noter cette application sous la forme standard, on la note plutôt sous une forme indicielle :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ou encore} \quad (u_n) \quad \text{où} \quad u_n \text{ représente l'image de n}$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

Remarque 1. On dira qu'une application définie à partir d'un certain rang n_0 est aussi une suite.
Cependant, pour simplifier les notations, on considérera par la suite que les suites sont définies à partir de $n_0 = 0$.

⚠⚠⚠. Attention aux notations :
(u_n) désigne une suite , alors que u_n désigne un terme de la suite. Ainsi, $(u_n) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ tandis que $u_n \in \mathbb{R}$.

Remarque 2. Les deux graphes suivants permettent de visualiser les premiers termes d'une suite :

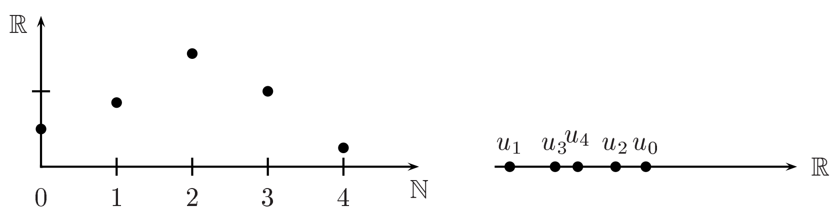

Fig. 1 – *Représentation d'une suite*

Définition 2 : **Opérations sur les suites**
On définit les lois suivantes sur l'ensemble des suites :

1. Addition de 2 suites : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$.
2. Multiplication d'une suite par un réel : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$.
3. Multiplication de deux suites : $(u_n).(v_n) = (u_n.v_n)$.

Définition 3 : **Suites bornées**

On dit qu'une suite (u_n) est majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
On dit qu'une suite (u_n) est minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.
On dit qu'une suite (u_n) est bornée ssi elle est majorée et minorée.

DÉFINITION 4 : Suites monotones

On dit qu'une suite (u_n) est	croissante	ssi	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq u_{n+1}$.
On dit qu'une suite (u_n) est	décroissante	ssi	$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} \leq u_n$.
On dit qu'une suite (u_n) est	monotone	ssi	elle est croissante ou décroissante.
On dit qu'une suite (u_n) est	stationnaire	ssi	elle constante à partir d'un certain rang.

Méthode 1 : Pour Déterminer le sens de variation d'une suite, on pourra donc étudier le signe de

$$u_{n+1} - u_n$$

Exemple 1. Déterminer le sens de variation de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

Méthode 2 : Lorsque (u_n) est strictement positive, on pourra étudier son sens de variation en comparant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{et } 1$$

⚠⚠⚠. Méthode valable uniquement si l'on est sûr que la suite (u_n) a tous ses termes strictement positifs !!

Exemple 2. Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

DÉFINITION 5 : Propriété définie à partir d'un certain rang
On dit qu'une propriété $p(n)$ est vérifiée *à partir d'un certain rang* si et seulement si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq n_0, \text{ la propriété } p(n) \text{ est vraie.}$$

Exemple 3. Traduire mathématiquement les propositions :
1. "La suite (u_n) est croissante à partir d'un certain rang"
2. "La suite (u_n) est bornée à partir d'un certain rang"

2 Limite d'une suite

2.1 Définition - exemples

DÉFINITION 6 : Limite finie d'une suite
On dit que la suite (u_n) converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq n_0,\ |u_n - l| \leq \varepsilon}$$

On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$ ou encore $u_n \to l$.

⚠⚠⚠. La limite d'une suite (u_n) est un nombre réel indépendant de l'indice n !!

Dessin

Limite d'une suite

Remarque 3.

1. S'il existe un réel l tel que la suite converge vers l, on dit que la suite est *convergente*.
2. S'il n'existe pas de réel l vérifiant la propriété ci-dessus, on dit que la suite *diverge*.

   ⚠ Ainsi, une suite divergente soit n'admet pas de limite, soit tend vers l'infini.
3. Démontrer que $u_n \mapsto l$ revient à démontrer que $u_n - l \mapsto 0$.

Remarque 4. Rappelons que les suites sont en particulier utilisées lors de :

1. La caractérisation séquentielle de la borne sup
2. La caractérisation séquentielle de la densité
3. La caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction

Pour montrer que $u_n \to l$ à l'aide de la définition, on commence par poser $\varepsilon > 0$ et on cherche un rang n_0 à partir duquel : $|u_n - l| \leq \varepsilon$. *On pourra envisager un raisonnement par analyse / synthèse*

`Exemple 4.` $(*)$ Montrer en utilisant la méthode précédente que la suite $(1/n)$ converge vers 0.

Remarque 5. Plus tard, pour étudier la limite d'une suite, nous utiliserons plutôt les théorèmes généraux de convergence ainsi que la convergence ou la divergence des suites élémentaires.
Cependant, dans certains cas, il sera néanmoins utile de revenir à la méthode issue de la définition (cf exercice suivant).

Exercice : 1

$(**)$ **Moyenne de Césaro**

Soit (u_n) une suite convergente vers une limite $L \in \mathbb{R}$.

Soit la suite (v_n) définie pour $n > 0$ par : $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}$.

1. Montrer que (v_n) converge vers L (commencer par le cas où $L = 0$).
2. Montrer que la réciproque est fausse

Définition 7 : On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$:

1. $u_n \mapsto +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \geq A$
2. $u_n \mapsto -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq A$

Dans ces deux cas, on dit que (u_n) *diverge* vers $+\infty$ ou $-\infty$.

Pour montrer que $u_n \to +\infty$ à l'aide de la définition, on commence par poser $A > 0$ et on cherche un rang n_0 à partir duquel : $A \leq u_n$. *On pourra envisager un raisonnement par analyse / synthèse*

`Exemple 5.` $(*)$ Montrez en utilisant la méthode précédente que la suite $(\sqrt{n})$ diverge vers $+\infty$.

`Exemple 6.` $(*)$

1. Trouver une suite convergente qui n'est pas monotone.
2. Trouver une suite divergente qui ne tend pas vers $\pm\infty$.
3. Trouver une suite bornée divergente.
4. Trouver une suite non-bornée qui ne diverge pas vers $\pm\infty$.

Exercice : 2

$(*)$ Ecrire à l'aide de quantificateurs les propriétés :

1. (u_n) ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$.
2. (u_n) ne diverge pas vers $+\infty$.
3. (u_n) diverge.

Théorème 1 : **Suite de rationnels convergeant vers un réel**

Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors :

1. Il exite une suite (a_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(a_n) \mapsto x$ avec $a_n \leq x$
2. Il exite une suite (b_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(b_n) \mapsto x$ avec $x \leq b_n$

Preuve 1 : On construit les suites (a_n) et (b_n) en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 6. De même tout réel x est limite d'une suite de nombres irrationnels.

2.2 Propriétés des suites convergentes

THÉORÈME 2 : **Unicité de la limite**
Si elle existe, la limite d'une suite est unique.

Preuve 2 : On peut procéder par l'absurde ... en faisant un dessin !

THÉORÈME 3 : **Une suite convergente est bornée.**
Toute suite réelle convergente est bornée.

Preuve 3 :
1. Prenons $\varepsilon = 1$.
   On sait qu'à partir d'un certain rang n_0 , $|u_n - l| \leq 1$. Donc (u_n) est bornée à partir de n_0.
2. D'autre part, $\{u_n, \quad n \in [\![0,n_0]\!]\}$ est fini. Cet ensemble est donc borné.
3. Globalement, (u_n) est donc bornée.

Remarque 7. Que dire alors d'une suite majorée par une suite convergente ?

THÉORÈME 4 : **Encadrement des termes d'une suite convergente**
Soit (u_n) convergeant vers un réel $l \in \mathbb{R}$.
Alors pour tous k, $k' \in \mathbb{R}$ tels que $k < l < k'$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; k < u_n < k'$$

Preuve 4 : C'est l'application de la définition de la convergence vers l en prenant $\varepsilon = min(|l - k'|,|l - k|)$.

Remarque 8. On en déduit que si une suite (u_n) converge vers une limite $l > 0$, alors cette suite est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.

THÉORÈME 5 : **Suites qui convergent vers 0**
1. L'ensemble des suites réelles convergeant vers 0 est stable par l'addition et par multiplication par un réel.
2. Le produit d'une suite qui tend vers 0 par une suite bornée est une suite qui tend vers 0

Preuve 5 : Méthode classique vue précédemment pour prouver la convergence d'une suite.

THÉORÈME 6 : **Passage à la limite dans les inégalités**
Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) :

$$\text{Si} \quad u_n \leq v_n \quad \text{à partir d'un certain rang et} \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l' \end{cases} \quad \text{alors :} \quad l \leq l'.$$

Preuve 6 : On procède par l'absurde en s'aidant d'un dessin.

⚠⚠⚠. Même si pour tout entier n on a $u_n < v_n$, on obtient une inégalité large après passage à la limite. Prenez par exemple les suites définies par $u_n = 1/n$ et $v_n = 2/n$

THÉORÈME 7 : **Théorème de majoration (Etude de convergence 1)**
Soit une suite (u_n) et un réel $l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si il existe une suite } (\alpha_n) \text{ et un rang } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tels que :} \begin{cases} \forall n \geq n_0,\ |u_n - l| \leq \alpha_n \\ \alpha_n \mapsto 0 \end{cases} \quad \text{alors } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

Preuve 7 : Facile : il suffit de traduire la convergence de (α_n) vers 0.

Remarque 9. Ce théorème est très utilisé en pratique pour montrer la convergence d'une suite lorsqu'on est capable de deviner sa limite.

`Exemple 7.` $(*)$ Montrer que la suite de terme général $u_n = 2^n/n!$ converge vers 0.

Exercice : 3
$(*)$ Etudier les limites des suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{n+(-1)^n}$ 2. $v_n = \dfrac{n!}{n^n}$ 3. $w_n = \dfrac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

THÉORÈME 8 : **Théorème des gendarmes (Etude de convergence 2)**
On considère trois suites (u_n), (v_n) et (w_n).

1. Si : $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ (v_n) \textit{ et } (w_n) \text{ convergent vers la même limite } l \end{cases}$ alors la suite (u_n) converge vers l.

2. Si : $\begin{cases} v_n \leq u_n \text{ (à partir d'un certain rang)} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Preuve 8 :
1. On commence par traduire que (u_n) et (v_n) convergent vers l. L'encadrement permet alors de conclure ...
2. On utilise la définition de la divergence vers $+\infty$.

Remarque 10. Ce théorème présente l'avantage de pouvoir étudier la convergence d'une suite lorsqu'on n'a aucune idée de sa limite éventuelle.

`Exemple 8.` $(*)$ Etudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

⚠⚠⚠.
1. Même si $\alpha_n \leq u_n \leq \beta_n$ à partir d'un certain rang et que $\alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_1$ et $\beta_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l_2$, on ne peut pas en conclure que (u_n) converge vers une limite l vérifiant : $l_1 \leq l \leq l_2$.
2. En revanche, si l'on sait que la suite (u_n) est convergente vers l, alors on a bien : $l_1 \leq l \leq l_2$. Il s'agit alors d'un simple passage à la limite dans les inégalités.

Exercice : 4

$(*)$ Etudier la suite de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2}$.

Exercice : 5

$(*)$ On considère la suite de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparer $\dfrac{1}{k}$ avec $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.
2. Montrer que $\dfrac{S_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. (on dira que S_n est équivalent à $\ln n$ en $+\infty$)

3 Théorèmes généraux sur les limites de suites

THÉORÈME 9 : **Théorèmes généraux**
Soit (u_n) une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) une suite convergeant vers $l' \in \mathbb{R}$. Alors

1. la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$
2. la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$
3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite(λu_n) converge vers λl
4. la suite $(u_n v_n)$ converge vers ll'
5. Si $l' \neq 0$, la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\dfrac{l}{l'}$.

Preuve 9 :
1. On utilise l'inégalité triangulaire pour majorer $||u_n| - |l||$ par ε.
2. On utilise l'inégalité triangulaire pour majorer $|(u_n + v_n) - (l + l')|$ par ε.
3. Facile.
4. On peut remarquer que $u_n v_n - ll' = u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)$ puis procéder aux majorations usuelles.
5. On commence par prouver que $\dfrac{1}{v_n} \mapsto \dfrac{1}{l'}$. Pour cela, on montre que $|v_n| \geq \dfrac{|l'|}{2}$ à partir d'un certain rang.

THÉORÈME 10 : **Cas des suites fonctionnelles (Etude de convergence 3)**
Soit (u_n) la suite de terme général $u_n = f(n)$ où $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$.

$$\text{Si} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{alors} \quad u_n \to l.$$

Preuve 10 : On traduit simplement la limite de f en $+\infty$. (cf le cours sur les fonctions !)

`Exemple 9.` $(*)$ Etudier les suites de termes généraux :

1. $u_n = \dfrac{2n^2+n-1}{3n^2+1}$.
2. $u_n = (1+\dfrac{1}{n})^n$
3. $u_n = \dfrac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$
4. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
6. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

Exercice : 6

$(*)$
1. Si (u_n) est bornée et (v_n) diverge vers $+\infty$, montrer que : $u_n + v_n \mapsto +\infty$
2. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, montrer que : $(u_n + v_n)$ diverge.

Exercice : 7

$(*)$ Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

4 Suites et séries géométriques

THÉORÈME 11 : **Convergence des suites géométriques**
Soit $k \in \mathbb{R}$. On appelle *suite géométrique* de raison k, la suite définie par : $\boxed{u_n = u_0.k^n}$ avec $u_0 \in \mathbb{R}$.
Ceci est équivalent à dire qu'elle vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = k.u_n$ pour tout $n \geq 0$.

1. Si $|k| < 1$, alors la suite (u_n) converge vers 0
2. Si $|k| > 1$, alors la suite (u_n) diverge ($|u_n| \to +\infty$)
3. Si $k = 1$, alors la suite (u_n) est constante et converge vers u_0
4. Si $k = -1$, alors la suite (u_n) diverge

Preuve 11 : Simples propriétés des fonctions exponentielles.

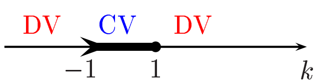

FIG. 2 – *Convergence des suites géométriques*

THÉORÈME 12 : **Convergence des suites à termes $\boxed{\textbf{strictement positifs}}$ (Etude de convergence 4)**
Si (u_n) est une suite à termes strictement positifs, alors :

1. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to l < 1 \quad \Rightarrow \quad u_n \to 0$
2. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to l > 1 \quad \Rightarrow \quad u_n \to +\infty$

⚠⚠⚠. L'étude de la limite de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ ne peut s'appliquer que pour des suites à termes strictement positifs !!

Preuve 12 :
1. On peut remarquer que $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < \dfrac{l+1}{2} < 1$ à partir d'un certain rang n_0.
   On peut alors majorer $|u_n|$ à partir de n_0 par une suite géométrique qui tend vers 0.
2. Méthode semblable.

Remarque 11. Que dire si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$?

`Exemple 10.` $(*)$ Soit $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$. Etudier la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$

Exercice : 8

$(**)$ Soit a un réel différent de -1. Etudier la suite définie pour tout n entier naturel par : $u_n = a^n \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+a^k}$

DÉFINITION 8 : Série géométrique
Soit un réel $k \in \mathbb{R}$.
On définit (S_n), la progression géométrique (ou série géométrique) de raison k par :

$$S_n = 1 + k + \cdots + k^n = \sum_{i=0}^{n} k^i$$

THÉORÈME 13 : Convergence d'une série géométrique

Le terme général S_n est donné par la formule : $\boxed{S_n = \begin{cases} \dfrac{1-k^{n+1}}{1-k} & \text{si } k \neq 1 \\ (n+1) & \text{si } k = 1 \end{cases}}$.

Si $|k| < 1$, alors la suite(S_n) converge vers le réel $\dfrac{1}{1-k}$.
Si $|k| \geq 1$, alors la suite (S_n) diverge.

Preuve 13 : L'expression de S_n se démontre facilement par récurrence.
L'étude de la convergence est alors immédiate.

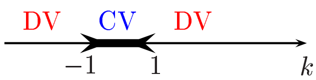

FIG. 3 – *Convergence des séries géométriques*

Remarque 12. Les suites et séries géométriques sont très utilisées en analyse. On essaie souvent de majorer des suites par des suites géométriques puisqu'on connaît bien leur comportement.

5 Suites extraites

DÉFINITION 9 : Suite extraite
On dit qu'une suite (v_n) est une suite extraite d'une suite (u_n) s'il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ *strictement croissante* telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = u_{\varphi(n)}$.

`Exemple 11.` les suites $\begin{cases} (v_n) \text{ telle que } v_n = u_{2n} \\ (w_n) \text{ telle que } w_n = u_{2n+1} \end{cases}$ sont extraites de la suite (u_n).

THÉORÈME 14 : Suite extraite d'une suite ayant une limite (Etude de convergence 5)
Soit $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Toute suite extraite d'une suite de limite a est une suite de limite a.

Preuve 14 :
1. On peut commencer par remarquer que si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geq n$.
2. La démonstration est alors immédiate.

Remarque 13. Cette propriété peut être très utile pour démontrer qu'une suite diverge.

Utilisation des suites extraites pour prouver la divergence d'une suite

cas 1 Si (u_n) est une suite dont on peut extraire deux suites (v_n) et (w_n) convergeant vers des limites différentes, alors (u_n) est divergente.

cas 2 Si de (u_n) on peut extraire une suite (v_n) divergente, alors (u_n) est divergente.

`Exemple 12.` $(*)$ Montrez que la suite de terme général $u_n = \cos\left(\frac{n^2-1}{n}\pi\right)$, est une suite divergente.

Exercice : 9

$(**)$ Soit la suite de terme général $u_n = \cos n$.
Prouver la divergence de (u_n) en calculant $\cos(n+2) + \cos n$ et $\cos 2n$.

Exercice : 10

$(**)$ Soit une suite (u_n) dont les deux suites extraites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$.
Montrer que la suite (u_n) converge vers l.

Exercice : 11

$(***)$ Si une suite n'est pas majorée, prouver qu'on peut en extraire une suite croissante qui divergent vers $+\infty$.

6 Suites monotones

Remarque 14. Les deux théorèmes qui suivent permettent, dans le cas des suites monotones, de montrer qu'une suite converge, sans avoir besoin de deviner sa limite !

Théorème Fondamental 15 : **Théorème de la limite monotone (Etude de convergence 6)**
Soit (u_n) une suite *croissante*. On a les deux possibilités suivantes :

- Si (u_n) est majorée alors (u_n) converge vers une limite finie.
- Si (u_n) n'est pas majorée alors (u_n) diverge vers $+\infty$.

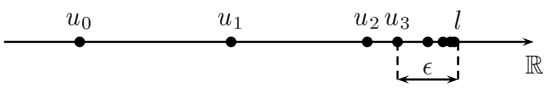

Fig. 4 – *Théorème de la limite monotone*

Preuve 15 :

1. Comme $\{u_n, n \in N\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée, elle admet une borne supérieur l.
   On démontre alors que $u_n \mapsto l$.
2. On considère $A > 0$. Comme (u_n) n'est pas majorée, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$.
   Mais comme (u_n) est croissante ...

`Exemple 13.` $(*)$ On suppose que (u_n) est une suite réelle croissante telle que (u_{2n}) converge.
Montrer que (u_n) converge.

Remarque 15.

1. Une suite décroissante minorée converge et une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.
2. Si (u_n) est croissante et majorée, elle converge vers la borne sup des valeurs de (u_n) : $l = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

`Exemple 14.` $(**)$ Soit la suite (S_n) de terme général : $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que (S_n) diverge vers $+\infty$

Exercice : 12

$(**)$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.

2. En déduire que la suite (u_n) de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

Exercice : 13

(∗∗) Etudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k}$

DÉFINITION 10 : **Suites adjacentes**
Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles. On dit qu'elles sont *adjacentes* ssi
1. les deux suites sont monotones de sens contraire.
2. La suite $(d_n) = (v_n - u_n)$ converge vers 0.

THÉORÈME 16 : **Convergence des suites adjacentes**
Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

Preuve 16 :
1. En remarquant que (d_n) est décroissante et tend vers 0, on en déduit que $d_n > 0$ puis que (u_n) (la suite croissante) est majorée et que (v_n) (la suite décroissante) est minorée.
2. On sait alors que $u_n \mapsto l_1 = \sup u_n$, que $v_n \mapsto l_2 = \inf v_n$. On démontre facilement que $l_1 = l_2$.

Remarque 16. Si $\begin{cases} (u_n) \text{ (croissante)} \\ (v_n) \text{ (décroissante)} \end{cases}$ sont adjacentes, alors leur limite commune l vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \leq v_n$.

On dit alors que u_n et v_n sont des approximations de l à $|u_n - v_n|$ près (faire un dessin) !

Exercice : 14

(∗∗) On définit la série alternée (S_n) par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}$
1. Calculer S_0, S_1, S_2, S_3.
2. Montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (S_n) converge.
3. Si l est la limite de (S_n), majorer l'erreur $e_n = |S_n - l|$ en fonction de n.
4. Comment choisir la valeur de n pour que S_n soit une valeur approchée de l à 10^{-2} près ?

Exercice : 15

(∗∗) Soit les suites de terme général : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.
1. Montrez que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
2. Montrez que leur limite commune est un nombre irrationnel (c'est le nombre de Neper $e = exp(1)$).

THÉORÈME 17 : **Théorème des segments emboîtés**
Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de segments : $I_n = [a_n, b_n]$ tels que
1. Ils sont emboîtés : $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \subset I_n$;
2. Leur diamètre tend vers 0 : $(b_n - a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Alors il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$$

Preuve 17 :
1. On montre facilement que (a_n) et (b_n) sont adjacentes. Elles convergent donc vers un réel l.
2. On montre alors que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{l\}$

THÉORÈME 18 : **Théorème de Bolzano-Weierstrass**
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

Preuve 18 : Théorème admis !
L'idée de la démonstration consiste à isoler par dichotomie une infinité de termes de la suite appartenant à une suite d'intervalles dont le diamètre tend vers 0. En utilisant le théorème des segments emboités, on construit ainsi une suite extraite qui converge.

COROLLAIRE 19 :
Soit un segment $[a,b]$ et une suite (x_n) de points de ce segments.
Il existe alors une suite extraite de la suite (x_n) qui converge vers un point $l \in [a,b]$.

Preuve 19 : Conséquence immédiate du théorème de Bolzano-Weierstrass.

Remarque 17. Le théorème de Bolzano-Weierstrass s'étend à la notion plus générale de partie *compacte* de $\mathbb{R}^n$ (vue en MP). Les segments de $\mathbb{R}$ sont des parties compactes car fermées et bornées.

7 Etude de suites récurrentes.

Soit une fonction **continue** $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.
On peut définir une suite (u_n) par la donnée de son premier terme u_0 et d'une relation de récurrence de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

7.1 Résultats préliminaires

On peut représenter la suite (u_n) dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en utilisant des *ricochets* sur la première bissectrice.

`Exemple 15.` Déterminez graphiquement les premiers termes de la suite (u_n) définie par les relations de récurrence suivantes.

$\begin{cases} u_{n+1} = -u_n^2 + 1 \\ u_0 = 0{,}1 \end{cases}$	$\begin{cases} u_{n+1} = e^{u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$

Remarque 18. Ces représentations graphiques permettent :
1. de prévoir le comportement de la suite (u_n) étudiée.
2. de mettre en place une stratégie d'étude :
   (a) Prévision du sens de variation
   (b) Prévision d'un éventuel majorant où minorant
   (c) Prévision du signe des éléments de la suite
   (d) Prévision de la limite éventuelle.

THÉORÈME 20 : **limite finie éventuelle**

Si la suite $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \end{cases}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ avec $\boxed{f \text{ continue en } l}$, alors : $\boxed{l = f(l)}$.

⚠⚠⚠. Vous ne pouvez affirmer que $l = f(l)$ qu'après avoir vérifié que la fonction f était continue en l.
En général, on ne connaît pas l, mais on sait que $l \in I$. On vérifie alors la continuité de f sur I.

Preuve 20 : Par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ en utilisant la continuité de f. (vu plus tard ...)

Remarque 19. Une solution de l'équation $x = f(x)$ est appelée un *point fixe* de f. On recherchera donc les limites possibles de (u_n) parmi les points fixes de f (graphiquement les intersections du graphe de f avec la première bissectrice). Si l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution, alors la suite (u_n) diverge !

`Exemple 16.` Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{x^2+1} \end{array}$ et (u_n) une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que si (u_n) converge, alors sa limite ne peut être que 0.

7.2 Exemples d'études

Pour étudier une suite récurrente de la forme $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \end{array} \right.$, on procèdera de la façon suivante :

1. On commence par faire un dessin pour conjecturer l'évolution des termes de la suites (sens de variation, encadrement, convergence ...)
2. Puis, on recherche les limites finies éventuelles en résolvant $l = f(l)$ (bien justifier cette relation !)
3. Enfin, on démontre les conjectures déduites de l'étude graphique.
   Pour cela, il est souvent utile d'étudier la fonction f pour encadrer la suite (u_n) et la fonction $f - \mathrm{id}$ afin de connaître son sens de variation.

Exercice : 16
Etudier la convergence de la suite définie par $\left\{ \begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{array} \right.$.

Exercice : 17
Soit un réel positif $u_0 \geq 0$.
Etudier en fonction de u_0 la suite récurrente définie par : $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$

Exercice : 18
Soit $0 \leq u_0 \leq 1$. Etudier la suite récurrente définie par : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{u_n^2 + 1}$

7.3 Approximation de la solution de l'équation $f(x) = 0$

Dans cette section, nous considèrerons $f \in \mathcal{F}([a, b], \mathbb{R})$ où $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ f \text{ est strictement croissante sur } [a, b] \\ f(a) < 0 \text{ et } f(b) > 0 \end{array} \right.$

Sauriez-vous justifier rigoureusement le fait que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[a, b]$?

Les deux méthodes usuelles d'approximation numérique de α sont les suivantes :

Par dichotomie	Méthode des tangentes (méthode de Newton)

1. Méthode par dichotomie :

On construit deux suites (a_n) et (b_n) telles que :

(a) $a_0 = a$ et $b_0 = b$

(b) $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$ si $f(\dfrac{a_n + b_n}{2}) < 0$ et $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$ sinon.

On démontre facilement que ces deux suites sont adjacentes et convergent vers α.
a_n et b_n sont alors deux approximations de α à $|b_n - a_n|$ près.

2. Méthode de Newton :

Dans ce cas, nous devons supposer de plus que la fonction f est convexe.
On construit une suites (u_n) telle que :

(a) $u_0 = b$

(b) u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe O_x avec la tangente à $\mathcal{C}$ passant par le point $M_n(u_n, f(u_n))$.

On démontre que cette suite (u_n) converge vers α.

Remarque 20. Quelle est la méthode qui vous semble la plus efficace?

7.4 Quelques relations de récurrence classiques

7.4.1 Suites arithmétiques

Théorème 21 : **Suites arithmétiques**
On considère une suite de réels (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + a}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + a.n$.

Preuve 21 : Récurrence évidente.

7.4.2 Suites géométriques

Théorème 22 : **Suites géométriques**
On considère une suite de réels (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = k.u_n}$ où $k \in \mathbb{R}$.
Alors, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0.k^n$.

Preuve 22 : Récurrence évidente.

7.4.3 Suites arithmético-géométriques

On considère une suite de réels (u_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = ku_n + a}$ où $\begin{cases} (a, k) \in \mathbb{R}^2 \\ k \neq 1 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Pour trouver la forme fonctionnelle d'une suite arithmético-géométrique, on peut utiliser la méthode suivante :

1. On commence par trouver le point fixe : $\alpha = k\alpha + a$
2. On montre que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison k
3. On en déduit l'expression fonctionnelle de u_n.

`Exemple 17.` On considère une suite (u_n) vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$
Déterminez l'expression de u_n en fonction de n.

7.4.4 Cas des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \\ u_1 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$ avec $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

On appelle *équation caractéristique de* (u_n) l'équation : $(C) \quad : \quad x^2 = ax + b$.
Plusieurs cas se produisent alors :

Théorème 23 :

1. Si $\Delta > 0$: on note r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de (C).
   Il existe alors deux constantes réelles A et B telles que : $u_n = A.r_1^n + Br_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. Si $\Delta = 0$: on note r la racine réelles de (C).
   Il existe alors deux constantes réelles A et B telles que : $u_n = (A.n + B)r^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. Si $\Delta < 0$: soit $z = \rho e^{i\theta}$ une des deux racines complexes de (C).
   Il existe alors deux constantes réelles A et B telles que : $u_n = \rho^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Preuve 23 : Voir le cours sur les espaces vectoriels de dimension finie.

⚠⚠⚠. Si les deux premiers cas sont analogues aux cas rencontrés dans la résolution de l'équation différentielle $y'' + ay' + by = 0$, en revanche on remarquera que lorsque $\Delta < 0$ on a :

Pour	$y'' + ay' + by = 0$	les solutions sont :	$y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$	où	$r = \alpha + i\beta$ est racine
Pour	$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$	les solutions sont :	$u_n = \rho^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta)$	où	$r = \rho e^{i\theta}$ est racine

Exercice : 19

Démonstration du cas 2 :
Soient a et b deux réels tels que $a^2 + 4b = 0$.
On considère l'ensemble E des suites complexes qui satisfont la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (avec $b \neq 0$) pour tout entier n.

1. Quelles sont les suites géométriques de E ?
2. Soit r la solution de $x^2 - ax - b = 0$. Montrer que la suite (nr^n) est dans E.
3. Décrire l'ensemble E.
   Aide : Vous pourrez rechercher les suites de E sous la forme $u_n = a_n.r^n$

Exercice : 20

Etudier les suites définies par :

1. $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \\ u_{n+2} = u_{n+1}u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$

8 Relations de comparaison

L'objectif de cette partie est l'étude du comportement d'une suite en $+\infty$ par comparaison à des suites plus simples.

8.1 La relation O : "est dominé par ..."

Définition 11 :
Soient deux suites (u_n) et (α_n).
On dit que la suite (u_n) est *dominée* par la suite (α_n) et l'on note $u_n = O(\alpha_n)$ lorsque

$$\exists M > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tels que} \quad \forall n \geq N, |u_n| \leq M.|\alpha_n|$$

Si la suite (α_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, c'est équivalent à dire que $(\frac{u_n}{\alpha_n})$ est bornée.

Remarque 21. $u_n = O(\alpha_n)$ se lit de la façon suivante : *u_n est un grand "O" de α_n.*

Pour prouver que $u_n = O(\alpha_n)$, on pourra si possible, étudier la limite de $\dfrac{u_n}{\alpha_n}$.
Si cette limite existe et est finie, alors on aura bien $u_n = O(\alpha_n)$.

Remarque 22. Ecrire que $u_n = O(1)$ est équivalent à dire que (u_n) est bornée.

⚠⚠⚠. $O(\alpha_n)$ désigne une suite qui est dominée par (α_n).
Elle est abusive dans le sens où deux suites dominées par (α_n) seront notées de la même façon.

⚠⚠⚠. Dire que (u_n) est *dominée* par la suite (α_n) ne signifie pas que $u_n \leq \alpha_n$ à partir d'un certain rang.

`Exemple 18.` Montrer que :

1. $\dfrac{2}{n(n+1)} = O(\dfrac{1}{n^2})$
2. $\dfrac{2}{n} = O(n)$
3. $n^2 + \sin n = O(n^2)$

8.2 La relation o : "est négligeable devant ..."

Définition 12 :
Soient deux suites (u_n) et (α_n).
On dit que la suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (α_n) et l'on note $u_n = o(\alpha_n)$ lorsque

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq N, |u_n| \leq \varepsilon |\alpha_n|$$

Si la suite (α_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, c'est équivalent à dire que : $\dfrac{u_n}{\alpha_n} \mapsto 0$

⚠⚠⚠. $u_n = o(\alpha_n)$ se lit de la façon suivante : *u_n est un petit "o" de α_n*.

⚠⚠⚠. $o(\alpha_n)$ désigne une suite négligeable devant (α_n).
Elle est abusive dans le sens où deux suites négligeables devant (α_n) seront notées de la même façon.

Remarque 23.
1. Ecrire que : $u_n = o(1)$ est équivalent à dire que (u_n) converge vers 0.
2. Si $\alpha_n \to l \in \mathbb{R}$ alors toute suite négligeable devant (α_n) converge vers 0 : $o(\alpha_n) \to 0$.

Proposition 24 : **Calculs avec o**

1. Une combinaison linéaire de deux suites négligeables devant (α_n) est négligeable devant (α_n) : $\lambda.o(\alpha_n) + \mu.o(\alpha_n) = o(\alpha_n)$
2. Une suite négligeable devant (α_n) est dominée par (α_n) : $o(\alpha_n) = O(\alpha_n)$ mais $O(\alpha_n) \neq o(\alpha_n)$
3. Le produit d'une suite (β_n) par une suite négligeable devant (α_n) est négligeable devant $(\beta_n.\alpha_n)$: $\beta_n.o(\alpha_n) = o(\beta_n.\alpha_n)$
4. La notation o est transitive : si $\begin{cases} a_n = o(b_n) \\ b_n = o(c_n) \end{cases}$ alors $a_n = o(c_n)$

Preuve 24 : Pas de difficulté particulière ...

⚠⚠⚠. Dans les égalités précédentes, le signe "=" signifie " ... est un ..." ou " ... peut s'écrire comme un ...".
Ainsi, $o(n) = o(n^2)$ est vrai alors que $o(n^2) = o(n)$ est faux !

⚠⚠⚠. Attention !! On évitera d'écrire des égalités du type : $u_n = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^2} + o(\dfrac{1}{n})$.
En effet, dans cette expression le terme $1/n^2$ est un $o(1/n)$ et n'apporte donc aucune information intéressante.
On écrira donc simplement $u_n = \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})$.

`Exemple 19.`
1. Si $u_n = \dfrac{n+1}{n^2+1}$ démontrer que $u_n = \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})$.

2. Si $u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$ et $v_n = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, que peut-on dire de $u_n + v_n$?

Exercice : 21

Soit $l \in \mathbb{R}$.
Que dire d'une suite (u_n) à termes non nuls vérifiant $u_n = l + o(u_n)$?

Théorème 25 : **Comparaisons de référence**

1. Si $0 < \alpha < \beta$ alors $n^\alpha = o(n^\beta)$ et $\frac{1}{n^\beta} = o(\frac{1}{n^\alpha})$
2. Si $0 < \alpha$ et $0 < \beta$ alors $(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$
3. Si $0 < \alpha$ et $0 < \beta$ alors $n^\beta = o(e^{\alpha n})$ et par transitivité : $(\ln n)^\beta = o(e^{\alpha n})$
4. Si $1 < a$ et $0 < \beta$ alors $n^\beta = o(a^n)$
5. Si $1 < a$ alors $a^n = o(n!)$
6. $n! = o(n^n)$

Preuve 25 :
1. Les 4 premiers résultats proviennent des comparaisons entre fonctions de référence.
2. Pour prouver que $a^n = o(n!)$, en pourra montrer que $u_n = \frac{a^n}{n!} \to 0$ en étudiant la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
3. Pour prouver que $n! = o(n^n)$, en pourra montrer que $u_n = \frac{n!}{n^n} \to 0$ en majorant $|u_n|$ par $\frac{1}{n}$.

Remarque 24. Bien retenir ces résultats car ils sont très utilisés en pratique !!

`Exemple 20.` Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité.

1. (a) $\frac{1}{n}$ (b) $\frac{1}{n^2}$ (c) $\frac{\ln n}{n}$ (d) $\frac{\ln n}{n^2}$ (e) $\frac{1}{n.\ln n}$
2. (a) n (b) n^2 (c) $n \ln n$ (d) $\sqrt{n}\ln n$ (e) $\frac{n^2}{\ln n}$

8.3 La relation $\sim$: "est équivalent à ..."

Définition 13 : **Suites équivalentes**
On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes (Notation : $u_n \sim v_n$) lorsque : $u_n - v_n = o(v_n)$
Lorsque la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, cela revient à dire que :

$$\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Remarque 25. La relation "$\sim$" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites.

⚠⚠⚠. $u_n \sim v_n$ n'implique pas que : $u_n - v_n \to 0$.

⚠⚠⚠. $u_n - v_n \to 0$ n'implique pas que : $u_n \sim v_n$.

Pour montrer que $u_n \sim v_n$, on peut utiliser l'une des 3 méthodes suivantes :
- soit on montre que : $\frac{u_n}{v_n} \to 1$,
- soit on montre que : $u_n = v_n(1 + \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$,
- soit on montre que : $u_n = v_n + \varepsilon_n$ avec $\varepsilon_n = o(v_n)$.

`Exemple 21.` Trouver un équivalent de la suite (u_n) vérifiant : $u_n + o(u_n) = n + o(n)$.

Remarque 26. Equivalent d'une suite convergente : Si $u_n \to l \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim l$

⚠⚠⚠. En revanche, si $u_n \to 0$ il ne faudra pas écrire $u_n \sim 0$!!
En effet, d'après la définition, $u_n \sim 0$ signifie que u_n est nulle à partir d'un certain rang, ce qui n'est en général pas le cas d'une suite qui tend vers 0.

Exemple 22.

- Si P est une fonction polynomiale alors P(n) est équivalent au terme de plus haut degré
- Si F est une fonction rationnelle alors F(n) est équivalent au rapport des termes de plus haut degré
- Si $u_n = \alpha_n + o(\alpha_n)$ alors $u_n \sim \alpha_n$. Ainsi : $\begin{cases} n + \ln n \sim n \\ n^2 + n + \frac{1}{n} \sim n^2 \end{cases}$

Théorème Fondamental 26 : Un équivalent permet d'obtenir la limite d'une suite
Si $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \mapsto l \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$, alors $u_n \mapsto l$.

Preuve 26 : On a $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$.

Théorème 27 : Un équivalent simple permet d'obtenir le signe d'une suite
Si deux suites sont équivalentes : $u_n \sim v_n$ alors elles sont de même signe à partir d'un certain rang.

Preuve 27 : Dans le cas où $v_n \neq 0$, on a : $\frac{u_n}{v_n} = 1 + o(1)$. Par conséquent, $\frac{u_n}{v_n} \geq 0$ à partir d'un certain rang.

Remarque 27. Lorsqu'une suite (u_n) admet pour limite 0 ou l'∞, un équivalent de u_n donne la "vitesse" à laquelle u_n tend vers cette limite.
Ainsi :

1. si $u_n \sim \frac{1}{n}$ et $v_n \sim \frac{1}{n^2}$, comme $\frac{1}{n^2} = o(\frac{1}{n})$, alors $v_n = o(u_n)$ et donc (v_n) tend plus rapidement vers 0 que (u_n).
2. si $u_n \sim n^2$ et $v_n \sim e^n$, comme $n^2 = o(e^n)$, alors $u_n = o(v_n)$ et donc (v_n) tend plus rapidement vers $+\infty$ que (u_n).

9 Recherche pratique d'équivalents

Pour rechercher la limite d'une suite (u_n), il est très utile de commencer par en rechercher un équivalent !!

9.1 Les équivalents usuels

Nous admettrons pour l'instant les équivalents classiques suivants :

Théorème 28 : Equivalents usuels
Soit (u_n) une suite telle que $\boxed{u_n \mapsto 0}$.
Alors :

1. $\sin u_n \sim u_n$
2. $\tan u_n \sim u_n$
3. $\mathrm{sh}\, u_n \sim u_n$
4. $\mathrm{th}\, u_n \sim u_n$
5. $\arcsin u_n \sim u_n$
6. $\arctan u_n \sim u_n$
7. $\mathrm{argsh}\, u_n \sim u_n$
8. $\mathrm{argth}\, u_n \sim u_n$
9. $[1 - \cos u_n] \sim u_n^2/2$
10. $[1 - \mathrm{ch}\, u_n] \sim -u_n^2/2$
11. $\ln(1 + u_n) \sim u_n$
12. $[e^{u_n} - 1] \sim u_n$
13. $[(1 + u_n)^\alpha - 1] \sim \alpha u_n$ lorsque $\alpha \in \mathbb{R}^*$

Exemple 23. Donner des équivalents des suites suivantes :

1. $u_n = \sqrt{1 - \frac{\sin \frac{1}{n}}{n^2}} - 1$
2. $v_n = e^{n^2 e^{-n} + 1} - e$
3. $w_n = \ln(n \sin \frac{1}{n})$

9.2 Produit, quotient et puissance d'équivalents

Théorème 29 : Produit, quotient, puissance d'équivalents
Soient quatre suites (u_n), (a_n) et (v_n), (b_n) vérifiant $\boxed{u_n \sim a_n \text{ et } v_n \sim b_n}$ alors :

1. $u_n v_n \sim a_n b_n$
2. $\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{a_n}{b_n}$ (si v_n et b_n ne s'annulent pas)
3. $u_n^\alpha \sim a_n^\alpha$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (uniquement pour des suites à termes positifs lorsque $\alpha \notin \mathbb{Z}$).
   ⚠⚠⚠. Ici α est un réel qui ne doit pas dépendre de n.

Preuve 29 : On se place dans le cas où les suites (a_n) et (b_n) ne s'annulent pas et on utilise la définition par la limite.

⚠⚠⚠. On peut multiplier ou diviser des équivalents, mais nous allons voir qu'on ne peut pas les additionner ou prendre leur image par une fonction quelconque (exponentielle, logarithme etc ...) sans prendre certaines précautions.

`Exemple 24.`

1. Somme : Soit $\begin{cases} u_n = n^3+n \\ v_n = -n^3+n^2 \end{cases}$. On a alors $\begin{cases} u_n \sim n^3 \\ v_n \sim -n^3 \end{cases}$ et pourtant $(u_n+v_n) \not\sim 0$
2. Exponentielle : Soit $u_n = n^2+n$. On a alors $u_n \sim n^2$ et pourtant $e^{u_n} \not\sim e^{n^2}$
3. Logarithme : Soit $u_n = 1+1/n$. On a alors $u_n \sim 1$ et pourtant $\ln u_n \not\sim \ln 1$.

9.3 Logarithme et exponentielle d'équivalents

THÉORÈME 30 : **Logarithme et Exponentielle d'équivalents**

Soient $(u_n), (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telles que : $u_n \sim a_n$:

- Si $u_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{1\}$ alors $\ln u_n \sim \ln a_n$
- Si $u_n \to 1$ alors $\ln u_n = \ln(1+(u_n-1)) \sim u_n - 1$
- Si $u_n - a_n \to 0$ alors $e^{u_n} \sim e^{a_n}$

Preuve 30 : Pas de difficulté.

`Exemple 25.` Déterminer un équivalent simple des suites de terme général :

1. $u_n = \ln(\sin \frac{1}{n})$.
2. $v_n = e^{(\sin \frac{1}{n})}$.

Remarque 28.

Un *équivalent simple* d'une suite est un produit-quotient de suites de références. Par exemple : $\dfrac{\sqrt{2\pi n}}{2^{n^2}}$, $\dfrac{n^3.\ln^2 n}{3^n}$ ...
En particulier, un équivalent simple ne sera jamais une somme de suites.

`Exemple 26.` Prouver que :

1. $\dfrac{1}{\pi(n+1)} \sim \dfrac{1}{\pi n}$
2. $e^{n^2+n+\frac{1}{n}} \sim e^{n^2}.e^n$
3. $\ln(n^2+n+1) \sim 2\ln n$
4. $\dfrac{\pi n^2+3n}{4.3^n - 2^{n+1}} \sim \dfrac{\pi n^2}{4.3^n}$
5. $\sqrt{\ln(n+1)-\ln n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
6. $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1} \sim \dfrac{2\ln n}{n}$
7. $\dfrac{e^n+n!}{n+1} \sim (n-1)!$
8. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
9. $\dfrac{e^n+e^{-n}+n}{\sqrt{n^2+n}-n} \sim 2e^n$
10. $e^{n^2+n!+\frac{1}{n}} \sim e^{n^2+n!}$
11. $\ln(n^2+3^n)-\ln(n^2+4^n) \sim n\ln\dfrac{3}{4}$
12. $\dfrac{\ln n + n!}{n^2+(n+1)!} \sim \dfrac{1}{n+1}$

⚠⚠⚠. Contrairement aux "o" et aux "O", on ne peut supprimer les constantes multiplicatives dans les équivalents.

Cas des suites de la forme $u_n = a_n^{b_n}$
Lorsqu'une suite se présente sous la forme $u_n = a_n^{b_n}$, il faut commencer par l'exprimer sous la forme

$$u_n = e^{b_n.\ln(a_n)}$$

On essaie alors de faire apparaître les équivalents connus pour le logarithme et l'exponentielle ...

⚠⚠⚠. Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{cases}$, alors $u_n^{v_n}$ ne tend pas forcément vers 1 : c'est une forme indéterminée 1^∞ !

`Exemple 27.` Trouvez la limite des suites de terme général : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

9.4 Recherche d'un équivalent d'une somme

Si $u_n = a_n + b_n$.

1. Chercher un équivalent simple des suites (a_n) et (b_n) : $\left\{\begin{array}{l} a_n = \alpha_n + o(\alpha_n) \\ b_n = \beta_n + o(\beta_n) \end{array}\right.$.
2. (a) Si les deux équivalents ne sont pas du même ordre de grandeur :
   Si par exemple $\beta_n = o(\alpha_n)$, alors $u_n = \alpha_n + o(\alpha_n)$ et donc $u_n \sim \alpha_n$.
   (b) Si $\alpha_n + \beta_n \neq 0$:
   Alors $\beta_n = \lambda\alpha_n$ avec $\lambda \neq -1$ et on a $u_n = (\lambda+1)\alpha_n + o(\alpha_n)$ et donc $u_n \sim (\lambda+1)\alpha_n$
   (c) Si $\beta_n + \alpha_n = 0$:
   Alors on re-transforme u_n en essayant de faire apparaître les équivalents usuels ou en utilisant les développements Limités.

Remarque 29. Les résultats précédents doivent être systématiquement rédémontrés à chaque fois qu'ils sont utilisés.

`Exemple 28.` Montrer que :

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
2. $\ln(1+1/n^2) + \sin(1/n) \sim \dfrac{1}{n}$
3. $\ln(1+1/n) + \sin(2/n) \sim \dfrac{3}{n}$
4. $\sqrt{\cos(1/n)} - e^{\sin(1/n^2)} \sim \dfrac{-5}{4n^2}$
5. $\ln(n^2+3) - \ln(n^2+1/n) \sim \dfrac{3}{n^2}$
6. $\cos\Big(\ln\big(1+\sin(1/n)\big)\Big) - e^{\sin(1/n)} \sim -\dfrac{1}{n}$
7. $e^{\sin\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1+e^{-n}} \sim \dfrac{1}{n^2}$
8. $\ln(n^2+2^n) \sim n\ln 2$
9. $\ln\left(\dfrac{en^2+1}{n^2+n}\right) - \cos(1/n) \sim \dfrac{-1}{n}$

9.5 Application à l'étude de la convergence des suites fonctionnelles

Lorsqu'une suite fonctionnelle fait apparaître une forme indéterminée, on pourra la lever en utilisant les équivalents plutôt que les limites usuelles.

`Exemple 29.` Rechercher la limite des suites suivantes et en donner un équivalent.:

1. $u_n = \sin[\tan(\ln(n+1) - \ln n)]$
2. $v_n = \dfrac{\sqrt{\cos\frac{1}{n}} - 1}{\ln(n+1) - \ln n}$
3. $w_n = \dfrac{\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{1 - \cos e^{-n}}$

⚠⚠⚠. Inutile de s'acharner à trouver un équivalent de u_n lorsque l'objectif est simplement de rechercher sa limite !

`Exemple 30.` Trouvez les limites des suites de terme général : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ et $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Exercice : 22

Etudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^4 \sin\frac{1}{n^2}}$

Remarque 30. Lorsqu'une suite converge vers un réel l, on pourra étudier la vitesse de convergence vers l en recherchant un équivalent de $v_n = u_n - l$.

`Exemple 31.` Vitesse de convergence de (u_n) définie par : $u_n = \ln\dfrac{en}{n+1}$.