Le Calcul de Primitives

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

22 mars 2010

Rappel : nous savons que :

1. On recherche des primitives sur un $\boxed{\text{intervalle } I}$.
2. Toute fonction f continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.
3. Les primitives d'une fonction continue sur un intervalle I diffèrent d'une constante sur cet intervalle.

Nous allons voir dans ce chapitre certaines méthodes usuelles de calcul de primitives. Bien que très utiles, ces méthodes ne nous permettront malheureusement pas de résoudre tous les problèmes de recherche de primitives.

Nous noterons $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ l'expression d'une primitive quelconque de la fonction f de variable x sur un intervalle I qu'on n'oubliera pas de préciser. Cette notation est abusive (car elle ne désigne pas un unique objet), mais elle nous sera utile pour la mise en oeuvre des méthodes usuelles. Malgré les apparences, cette notation ne représente pas une intégrale !! Il s'agit ici d'une fonction et non d'un réel. Pour représenter F, LA primitive de f qui s'annule en $a \in I$, nous utiliserons la notation $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Pour calculer une primitive d'une fonction, nous avons 3 outils principaux à notre disposition :

1. Les primitives usuelles à connaître par coeur !!
2. Le changement de variable.
3. L'intégration par partie.

Toute la difficulté consitera alors à :

1. Penser à utiliser au moment opportun les primitives connues
2. Faire un choix parmi l'une des deux méthodes précédentes
3. Transformer judicieusement la fonction étudiée pour faire apparaître une primitive connue
4. Choisir le bon changement de variable

Exercice : 1

Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à déterminer.

1. $\displaystyle\int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)\,\mathrm{argth}\,x}$
3. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$

1 Le changement de variables

Théorème 1 : **Changement de variables**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \mapsto I$ de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle J vers l'intervalle I.

$$\text{Si} \quad F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{sur } I, \quad \text{alors} \quad F\circ\varphi(t) = \int (f\circ\varphi)(t)\times\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{sur } J.$$

Preuve 1 : Montrons que $F \circ \varphi$ est une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ sur l'intervalle J.

1. φ étant définie de J dans I et F étant définie sur I, la fonction $F \circ \varphi$ est bien définie sur J.
2. φ étant dérivable de J dans I et F étant dérivable sur I, la fonction $F \circ \varphi$ est dérivable sur J et sa dérivée est : $(f \circ \varphi) \times \varphi'$.

$F \circ \varphi$ est donc bien une primitive de $(f \circ \varphi) \times \varphi'$ sur J.

Remarque 1. Comme le montre la méthode suivante, il sera souvent nécessaire de prouver aussi la bijectivité de φ.

Soit f une fonction continue sur I.
Pour déterminer une primitive de f, on pourra utiliser en pratique la démarche suivante :

Méthode 1 :
Pour calculer $F(x) = \displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ sur I, on pourra poser : $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ t \in (J) \end{cases}$ J sera déterminé à l'étape 1.

1. On transforme ce système par équivalences successives : $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ t \in (J) \end{cases} \iff \ldots \iff \begin{cases} t = \varphi^{-1}(x) \\ x \in I \end{cases}$

   On vérifie ainsi que la fonction φ est $\boxed{\text{bijective}}$ de J vers I puis on s'assure qu'elle est $\mathcal{C}^1$ sur J.
2. On écrit $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \end{cases}$ et on transforme la primitive initiale en remplaçant la variable x.
3. On calcule alors la nouvelle primitive obtenue. $(F \circ \varphi)$
4. Pour obtenir la primitive F cherchée, il suffit alors de remplacer t par $\varphi^{-1}(x)$.

Remarque 2.

1. La bijectivité de φ est bien indispensable car elle permet en fin de calcul, de "revenir" à la variable x.
2. En revanche, la recherche de l'intervalle J n'est pas toujours indispensable.

`Exemple 1.` Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ sur $[-1,1]$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}$ sur $\mathbb{R}$

Méthode 2 :
On peut aussi décider de poser $\begin{cases} t = \psi(x) \\ x \in I \end{cases}$. La méthode reste alors la même !!

`Exemple 2.` Calculer les primitives suivantes en choisissant un changement de variables approprié :

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ sur $I =]0,\pi[$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ sur $I =]-\pi/2, \pi/2[$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x}$ sur $I =]0,+\infty[$
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch} x}$ sur $I = \mathbb{R}$
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+a^2}$ sur $I = \mathbb{R}$ $(a > 0)$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}$ sur $I =]-a,a[$

2 L'intégration par partie

Théorème 2 : **Intégration par parties**
Soient u, $v : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.
Alors
$$\int u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve 2 : Soit $f = uv$. Les fonctions u et v étant dérivables sur I, f est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
Les fonctions u, u', v et v' étant continues, $u'v$ et uv' admettent des primitives et : $uv = \int u'v + \int uv'$.

Remarque 3. La formule précédente est vraie à une constante près.

Pour calculer $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ sur I :

1. on introduit deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que $f = u'v$
2. on applique la formule d'intégration par partie

Remarque 4. On n'oubliera pas d'indiquer que les fonctions u et v choisies sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I !!

`Exemple 3.` Calculer sur $\mathbb{R}$ les primitives suivantes sur des intervalles à préciser :

1. $\displaystyle\int x\ln(x^2+1)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int (x^2-x+3)e^{2x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int x^2e^x\cos 2x\,\mathrm{d}x$

3 Primitives usuelles à connaître par coeur

Toutes les primitives suivantes sont bien entendu données à une constante près et sont valables sur tout intervalle où les fonctions sont continues.

△ **Les classiques** ($\forall a\in\mathbb{R}$)

1. $\displaystyle\int (x-a)^\alpha\,\mathrm{d}x=\frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}\quad \left(\begin{cases}\forall\alpha\in\mathbb{C}\\ \alpha\neq -1\end{cases}\right)$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-a}=\ln|x-a|$
3. $\displaystyle\int e^{ax}\,\mathrm{d}x=\frac{e^{ax}}{a}\quad (a\in\mathbb{C}^*)$
4. $\displaystyle\int \sin(ax)\,\mathrm{d}x=-\frac{\cos ax}{a}\quad (a\neq 0)$
5. $\displaystyle\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\sin ax}{a}\quad (a\neq 0)$
6. $\displaystyle\int \mathrm{sh}(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{ch}\,ax}{a}\quad (a\neq 0)$
7. $\displaystyle\int \mathrm{ch}(ax)\,\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{sh}\,ax}{a}\quad (a\neq 0)$

△ **D'autres à connaître absolument**

• Primitives obtenues à partir des dérivées des fonctions circulaires réciproques :

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x$ sur $\mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x$ sur $]-1,1[$

Remarque 5. Soit un réel $a>0$.
On en déduit les primitives suivantes en factorisant a^2 et en faisant le changement de variables $u=x/a$.

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$ sur $\mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}$ sur $]-a,a[$

• Primitives obtenues à partir des dérivées des fonctions hyperboliques réciproques :

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}}=\mathrm{argsh}\,x$ sur $\mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}}=\mathrm{argch}\,x$ sur $]1,+\infty[$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\mathrm{argth}\,x$ sur $]-1,1[$

Remarque 6. On a aussi : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|$ sur $\left\{\begin{array}{l}]-\infty,\ -1[\\ ]-1,\ 1[\\ ]1,\ +\infty[\end{array}\right.$.

Remarque 7. On en déduit ainsi les expressions de : $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+h}}$ et $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$

`Exemple 4.` Calculer la dérivée de la fonction $f(x) = \ln\big(x+\sqrt{x^2+h}\big)$. Que pouvez-vous en déduire ?

• Les primitives suivantes sont immédiates (valables sur des intervalles à préciser !) :

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \tan x$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\tan x}$
3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}\, x$
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{sh}^2 x} = -\frac{1}{\mathrm{th}\, x}$
5. $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln|\cos x|$
6. $\displaystyle\int \mathrm{th}\, x\,\mathrm{d}x = \ln|\mathrm{ch}\, x|$

4 Exemples divers

4.1 Primitives de fractions rationnelles.

Pour déterminer les primitives d'une fonction rationnelle, on pourra (sauf cas immédiat) commencer par la décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.

4.1.1 Partie entière et éléments simples de première espèce

On trouve sans difficulté les primitives de la partie entière et les éléments simples de première espèce.

1.	Partie entière $E(x)$:	On obtient un polynôme
2.	Eléments de la forme $\dfrac{a}{x-b}$:	On obtient un logarithme
3.	Eléments de la forme $\dfrac{a}{(x-b)^n}$:	On obtient une nouvelle fraction rationnelle

`Exemple 5.` Déterminer une primitive des fonctions rationnelles suivantes sur un intervalle à déterminer :

1. $f(x) = \dfrac{3}{2x-5}$
2. $f(x) = \dfrac{2}{(4x+1)^5}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+x-3}$
4. $f(x) = \dfrac{2x^3-x+1}{(x-1)(x+2)^2}$
5. $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x^2(x-1)^2}$

4.1.2 Primitive des élements simples de deuxième espèce

Exercice : 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I_n(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$.

1. Rechercher une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$.
2. En déduire $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^n}$ pour $n \in \{1,\ 2,\ 3\}$.

Méthode
Pour déterminer les primitives d'un élément simple de la forme $\dfrac{ax+b}{(x^2+px+q)^n}$:

1. On commence par faire apparaître la dérivée de x^2+px+q au numérateur.
   Une partie de la fraction se primitive alors selon n, soit en un logarithme, soit en une fraction rationnelle.
2. On se ramène alors à une fonction rationnelle de la forme $\dfrac{1}{(x^2+px+q)^n}$.
   On réduit alors le trinôme sous la forme canonique et on effectue un changement de variables approprié.
3. On se ramène alors à une fonction rationnelle de la forme $\dfrac{1}{(x^2+a^2)^n}$.
   On se ramene alors à $I_n(x) = \dfrac{1}{(x^2+1)^n}$ et on recherche une relation entre $I_n(x)$ et $I_{n+1}(x)$ par IPP.

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\left[\frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)I_n\right] \qquad \text{(savoir retrouver cette formule !!)}$$

`Exemple 6.` Déterminez sur $\mathbb{R}$ une primitive de :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+3}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{(x^2+x+1)^2}$

Remarque 8. Lorque le dénominateur de la fonction rationnelle n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$, on peut commencer par effectuer une DES dans $\mathbb{C}[X]$ et regrouper judicieusement certains termes pour obtenir une décomposition dans $\mathbb{R}[X]$.

`Exemple 7.` Déterminez sur $\mathbb{R}$ une primitive de :

1. $f(x) = \dfrac{1}{x^3(x^2+1)}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x(x^6-1)}$

4.2 Primitives rationnelles en $\sin, \cos$

On s'intéresse aux primitives de la forme $\boxed{\displaystyle\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x}$ où f est une fonction rationnelle de 2 variables.

4.2.1 Cas où f est une fonction polynômiale p

On considère $\displaystyle\int p(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, où p est une fonction polynômiale de 2 variables (on dit que $p(\sin x, \cos x)$ est un polynôme trigonométrique).
On est ramené au calcul de $I = \displaystyle\int \sin^p x \cos^q x\,\mathrm{d}x$.

- Si p est impair on pourra poser le changement de variables $y = \cos x$
- Si q est impair, on pourra poser le changement de variables $y = \sin x$;
- Si p et q sont pairs, on linéarisera.

`Exemple 8.` Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^4 x\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^4 2x\,\mathrm{d}x$

4.2.2 Cas plus général

Pour déterminer le changement de variable approprié pour calculer $\displaystyle\int f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$, on utilise les règles de Bioche :

Règles de Bioche :
On étudie l'élément différentiel $\omega(x) = f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$.

1. Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto -x$, on pose $t = \cos x$
2. Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi - x$, on pose $t = \sin x$
3. Si $\omega(x)$ est invariant par la transformation $x \mapsto \pi + x$, on pose $t = \tan x$
4. Si aucune transformation ne marche, on pose $t = \tan \frac{x}{2}$.

`Exemple 9.` Calculer les primitives suivantes sur des intervalles à déterminer :

1. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin^2 x}$
3. $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x+\cos^5 x}{\sin^2 x+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{2+\cos x}$

Remarque 9. Dans le cas d'une fonction de la forme $\displaystyle\int f(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,\mathrm{d}x$ où f est rationnelle, on pourra aussi utiliser les règles de bioche avec le même élément différentiel $\omega(x) = f(\sin x, \cos x)\,\mathrm{d}x$ (Attention : on remplace les sh par des sin et les ch par des cos). Si les règles de Bioche ne donnent rien, on pourra poser $t = e^x$!

`Exemple 10.` Calculer les primitives suivantes sur des intervalles à déterminer :

1. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x}$
2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch} x(2+\operatorname{sh}^2 x)}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \operatorname{th}^3 x\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{\ln 2} \frac{\mathrm{d}x}{5\operatorname{sh} x - 4\operatorname{ch} x}$

4.3 Primitives avec des racines

Remarque 10. Il y a deux sortes de primitives avec racines que l'on sait traiter.
Soit $(\lambda, \mu) \mapsto f(\lambda, \mu)$ une fraction rationnelle de deux variables.

Pour calculer :

1. $\displaystyle\int f\left(x, \sqrt{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$ on posera $y = \sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$.
2. $\displaystyle\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$ on réduira le trinôme et on effectuera un changement de variable en sin, ch ou en sh.

`Exemple 11.` Calculer les primitives suivantes sur des intervalles à déterminer :

1. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int x\sqrt{1+x-x^2}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,\frac{\mathrm{d}x}{x}$

Exercice : 3
Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int \frac{\operatorname{ch} x}{\sqrt{2-e^{-x}}}\,\mathrm{d}x$