Les fonctions de deux variables

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

2 juin 2010

L'ensemble de ce chapitre a pour objectif principal l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
Une fonction de ce type est appelée un *champ de potentiel* ou un *champ scalaire*.

1 Continuité d'une fonction de deux variables

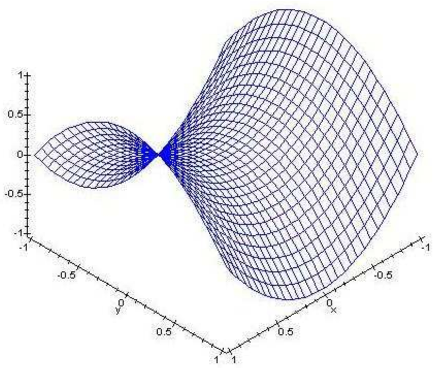
On considère dans ce paragraphe une partie $U \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction de deux variables réelles

$$f : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

On considèrera $\mathbb{R}^2$ muni de sa norme euclidienne usuelle.
Les couples de $\mathbb{R}^2$ seront notés $X = (x, y)$. La notation X permettant de ne pas confondre le vecteur avec son abscisse.

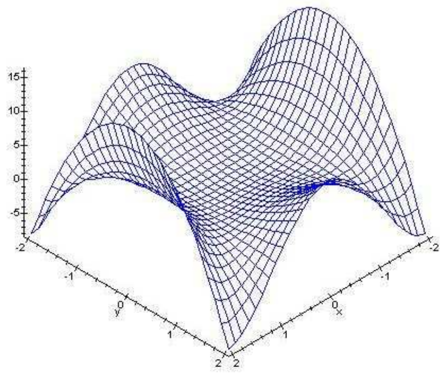
Définition 1 : On appelle *graphe* d'une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$G = \{M(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } (x, y) \in U\}$$



Graphe de $f(x, y) = x^2 - y^2$

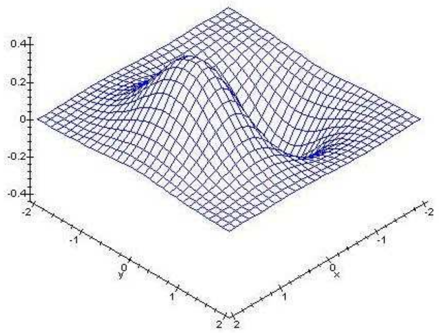
Maple
```
> plot3d(x^2-y^2,x=-1..1,y=-1..1,color=blue,grid=[30,30],axes=frame);
```



Graphe de $f(x,\, y) = x^4 - 2.x^2.y^2 + 2.y^2$

Maple

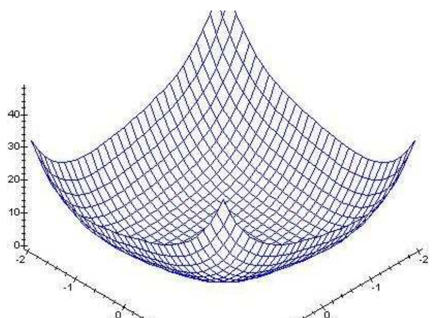
```
> plot3d(x^4-2.x^2.y^2+2.y^2,x=-2..2,y=-2..2,color=blue,grid=[30,30],axes=frame);
```



Graphe de $f(x,\, y) = x.e^{-(x^2+y^2)}$

Maple

```
> plot3d(x.exp(-(x^2+y^2)),x=-2..2,y=-2..2,color=blue,grid=[30,30],axes=frame);
```



Graphe de $f(x,\, y) = (x+y)^2 + x^4 + y^4$

Maple

```
> plot3d((x+y)^2+x^4+y^4,x=-2..2,y=-2..2,color=blue,grid=[30,30],axes=frame);
```

Remarque 1. L'étude de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ correspond donc à l'étude de la surface d'équation cartésienne $y = f(x,\, y)$.

THÉORÈME 1 : **Algèbre** $\mathcal{F}(U,\mathbb{R})$
Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$.
L'ensemble $(\mathcal{F}(U,\, \mathbb{R}), +\, ,\, .\, ,\times)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative.

Preuve 1 : Méthode usuelle.

DÉFINITION 2 : **Limite - Continuité**
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ où U est une partie de $\mathbb{R}^2$.
Soit un point $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ et un réel $l \in \mathbb{R}$.

1. **Limite en un point** $a \in \overline{U}$
   On dit que f tend vers la limite l lorsque $X = (x_1, x_2)$ tend vers $a = (a_1, a_2)$ si et seulement si :
   $$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall X \in U, \quad \|X - a\| \leq \alpha \Rightarrow |f(X) - l| \leq \varepsilon$$
2. **Continuité en un point** a
   On dit que la fonction f est continue au point $a \in U$ si et seulement si : $\lim\limits_{X \to a} f(X) = f(a)$.
3. **Continuité sur** U
   On dit que la fonction f est continue sur U si et seulement si elle est continue en tout point de U.

Remarque 2. On montre que la définition précédente ne dépend pas de la norme choisie sur $\mathbb{R}^2$ (elles sont équivalentes).

`Exemple 1.` Les fonctions $\left\{\begin{array}{l}(x_1, x_2) \mapsto x_1 \\ (x_1, x_2) \mapsto x_2\end{array}\right.$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

PROPOSITION 2 : **Théorèmes généraux sur les limites**

Soient $U \subset \mathbb{R}^2$, $a \in \overline{U}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $l_f, l_g \in \mathbb{R}$.

1. Si $f, g : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\left\{\begin{array}{l} f(x, y) \xrightarrow[(x,\, y)\to a]{} l_f \\ g(x, y) \xrightarrow[(x,\, y)\to a]{} l_g \end{array}\right.$, alors :

   (a) $\lambda f(x, y) \xrightarrow[(x,\, y)\to a]{} \lambda l_f$
   (b) $f(x, y) + g(x, y) \xrightarrow[(x,\, y)\to a]{} l_f + l_g$
   (c) $f(x, y) g(x, y) \xrightarrow[(x,\, y)\to a]{} l_f l_g$
   (d) $f(x, y)/g(x,y) \xrightarrow[(x,\, y)\to a]{} l_f/l_g$ si $l_g \neq 0$.

2. Si $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\left\{\begin{array}{l} f(x, y) \xrightarrow[(x,\, y)\to a]{} l_f \\ g(t) \xrightarrow[t\to l_f]{} l_g \end{array}\right.$ alors : $g \circ f(x, y) \xrightarrow[(x,\, y)\to a]{} l_g$

Preuve 2 : Démonstrations qui ne posent pas de réelles difficultés mais que l'on admettra ...

Remarque 3. En pratique :
Si $(x, y) \to (a, b)$ alors on pourra passer à la limite dans $f(x, y)$ en considérant que $\left\{\begin{array}{l} x \to a \\ y \to b \end{array}\right.$

`Exemple 2.` Quelle est la limite en $a = (1, -2)$ de la fonction f définie par $f(x, y) = \dfrac{\cos x . e^{x+y}}{1 + x^2}$?

PROPOSITION 3 : **Théorèmes généraux sur la continuité**

1. Soient deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ continues au point a et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Alors :

   (a) λf, $f + g$ et fg sont continues au point a.
   (b) f/g est continue en a si $g(a) \neq 0$.

2. Soient $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{g} \mathbb{R}$. Si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est continue en } a \in \mathbb{R}^2 \\ g \text{ est continue en } f(a) \end{array}\right.$, alors : $g \circ f$ est continue en a

Preuve 3 : Immédiat compte-tenu de la proposition précédente !

Remarque 4. $\mathcal{C}(U \subset \mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ muni de $\begin{cases} \text{l'addition usuelle} \\ \text{la multiplication par } \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$ est un $\mathbb{R}$-ev.

`Exemple 3.`

1. Ainsi, les fonctions polynômiales à deux variables sont continues sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que les fonctions suivantes sont continues sur leur ensemble de définition :

   (a) $f(x, y) = x^2y^2.\ln(x^2 + y^2)$. (b) $g(x, y) = \cos(x).\operatorname{sh}(y)$

Remarque 5. Malheureusement, les théorèmes généraux ne permettent pas d'étudier toutes les situations...
Pour des études de continuité en des points particuliers, on pourra s'inspirer des méthodes utilisées pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (continuité à droite et à gauche).

Exercice : 1

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par : $\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{x^2}{y} & \text{si } |x| < |y| \\ f(x, y) = y & \text{sinon} \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Théorème 4 : **Théorème de majoration (Très utile pour prouver une limite)**

Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}^2$ et $l \in \mathbb{R}$.

S'il existe $\theta : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tels que sur un voisinage de a, on ait : $\begin{cases} |f(x, y) - l| \leq \theta(x, y) \\ \theta(x, y) \xrightarrow[(x,\ y)\to a]{} 0 \end{cases}$

Alors : $f(x, y) \xrightarrow[(x,\ y)\to a]{} l$

Preuve 4 : Pas de difficulté.

`Exemple 4.` Peut-on prolonger par continuité en $(0, 0)$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ par :

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^4) + \sin(y^4)}{\sqrt{x^4 + y^4}}$$

Exercice : 2

Soit une forme linéaire $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est continue au point $(0, 0)$.
2. En déduire qu'une forme linéaire est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Lorsque $(x, y) \to 0$ (cas auquel on peut toujours se ramené par changement de variables!), il est souvent avantageux d'exprimer x et y en coordonnées polaires afin de majorer $f(x, y)$ par une fonction de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

`Exemple 5.` Etudier la continuité en $(0, 0)$ de la fonction de $\mathbb{R}^2$ définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0, 0) \end{cases}$.

Exercice : 3

Montrer que la fonction f définie par $\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + xy + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On pourra également déterminer une limite en utilisant les équivalents sur les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

`Exemple 6.` Déterminer la limite en $(0, 0)$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$ par $f(x, y) = \dfrac{1 - \cos xy}{xy^2}$.

Exercice : 4

Montrer que f définie par $\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{\sin(x + y)}{\ln(1 + x + y)} & \text{si } x + y \neq 0 \\ f(x, -x) = 1 \end{cases}$ est continue sur $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1+x+y > 1\}$.

Définition 3 : Applications partielles
Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$.
On définit pour f $\boxed{\text{au point } a}$ les deux fonctions réelles suivantes :

- $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t, a_2) \end{array}$
- $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a_1, t) \end{array}$

Ces applications sont appelées les *applications partielles* de f en a.

Les deux applications partielles de f

Remarque 6.
1. Le graphe de f_1 est l'intersection du graphe de f avec le plan d'équation $y = a_2$
2. Le graphe de f_2 est l'intersection du graphe de f avec le plan d'équation $x = a_1$

Théorème 5 : Continuité des applications partielles
Si la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ est continue au point $a = (a_1, a_2)$, alors :
1. la première fonction partielle f_1 est continue au point a_1.
2. la deuxième fonction partielle f_2 est continue au point a_2.

Attention : la réciproque est fausse.

Preuve 5 : Pas de difficulté avec les définitions des limites ...

Illustration du théorème	Réciproque fausse

Exercice : 5
Etudier la continuité en (0,0) et la continuité des applications partielles de la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

THÉORÈME 6 : **Limite le long d'un chemin**
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\boxed{\lim_{X\to a} f(X) = l}$. Alors :

Pour tout chemin $\gamma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2$ tel que $\lim_{t\to t_0} \gamma(t) = a$, on a : $\boxed{\lim_{t\to t_0\ (t\neq t_0)} fo\gamma(t) = l}$

Preuve 6 : Pas de difficulté avec les définitions des limites ...

Limite le long d'un chemin :

Remarque 7.
1. Ainsi, si $f(X) \mapsto l$ en a, alors $f(X) \mapsto l$ quelque soit le chemin pris par X pour approcher a.
2. Remarquons que les deux applications partielle f_1 et f_2 sont les restrictions de f aux droites passant par a et parallèles aux axes O_y et O_x.

Remarque 8. Ce théorème est très utile pour montrer qu'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas continue en a.

`Exemple 7.` Prouver ainsi que $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$ ne peut pas être prolongée par continuité en $O(0, 0)$.

Exercice : 6

Montrer que les applications suivantes n'admettent pas de limite lorsque $(x, y) \to (0, 0)$:

1. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$
2. $f(x, y) = \dfrac{x^3}{y}$
3. $f(x, y) = \dfrac{\operatorname{sh} x \operatorname{sh} y}{x + y}$

Exercice : 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ f(0, 0) = 0 \end{cases}$.

1. Etudier la continuité en $(0, 0)$ des restrictions de f aux droites passant par $(0, 0)$.
2. Etudier la continuité en $(0, 0)$ de la restriction de f à la parabole d'équation $y = x^2$.
3. f est-elle continue en $(0, 0)$?

2 Cas des fonctions de R^2 dans R^2

Soit une fonction $\vec{f} : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ et $\begin{cases} \text{un point } a = (a_1, a_2) \in U \\ \text{un point } l = (l_1, l_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$.

Notons :

$$\vec{f} : \begin{array}{ccc} U \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ X = (x, y) & \mapsto & \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{cases} f_1 : U \mapsto \mathbb{R} \\ f_2 : U \mapsto \mathbb{R} \end{cases}$$ sont appelées les *fonctions coordonnées* de f

Remarque 9. Une telle application est appelée un *champ de vecteurs* du plan (voir le cours d'analyse vectorielle).

Champ de vecteurs $\overrightarrow{f}$

Définition 4 : **Limite et continuité**
On note $\|.\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ (ce pourrait être une norme quelconque), $\begin{cases} a \in U \\ l \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$.

1. On dit que f tend vers l lorsque X tend vers a si et seulement si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \alpha > 0, \quad \forall X \in U, \quad \|X - a\| \leq \alpha \Rightarrow \|\overrightarrow{f}(X) - l\| \leq \varepsilon$$

2. On dit que la fonction $\overrightarrow{f}$ est continue au point a lorsque : $\lim_{X \to a} \overrightarrow{f}(X) = \overrightarrow{f}(a)$.

Théorème 7 : **Caractérisation d'une limite**

$$\overrightarrow{f}(X) \xrightarrow[X \to a]{} l \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} f_1(X) \xrightarrow[X \to a]{} l_1 \\ f_2(X) \xrightarrow[X \to a]{} l_2 \end{cases}$$

Preuve 7 : Pas de difficulté.

Remarque 10. Pour étudier la limite en a d'une fonction $\overrightarrow{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, on étudiera donc la limite en a des 2 fonctions composantes.

Théorème 8 : **Continuité d'une fonction composée**

1. Soit $\begin{cases} \overrightarrow{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \text{ continue en } a \\ \overrightarrow{g} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \text{ continue en } \overrightarrow{f}(a) \end{cases}$. La fonction $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$ est alors continue en a. $(\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2)$
2. Soit $\begin{cases} \overrightarrow{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \text{ continue en } a \\ g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R} \text{ continue en } \overrightarrow{f}(a) \end{cases}$. La fonction $g \circ \overrightarrow{f}$ est alors continue en a. $(\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R})$
3. Soit $\begin{cases} \overrightarrow{f} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2 \text{ continue en } a \\ \overrightarrow{g} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2 \text{ continue en } f(a) \end{cases}$. La fonction $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$ est alors continue en a. $(\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2)$

Preuve 8 : Pas de difficulté en considérant les fonctions coordonnées.

3 Dérivées partielles

3.1 Ouvert de $\mathbb{R}^2$

Définition 5 : **Boule ouverte de $\mathbb{R}^2$**
Soit $x_0 \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.
On appelle *boule ouverte* de $\mathbb{R}^2$ $\begin{cases} \text{de centre } x_0 \\ \text{de rayon } r \end{cases}$ l'ensemble : $\mathcal{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - x_0\| < r\}$.

Remarque 11. La forme des boules de $\mathbb{R}^2$ varie selon la norme utilisée.

Définition 6 : **Partie ouverte de $\mathbb{R}^2$**
Soit U une partie de $\mathbb{R}^2$.
On dira que U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ssi : $\forall x \in U, \quad \exists r > 0 \quad$ tel que $\quad \mathcal{B}(x, r) \subset U$.

Boules ouvertes de $\mathbb{R}^2$:	Ouvert de $\mathbb{R}^2$

3.2 Dérivées partielles en un point

On considère une fonction $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 7 : **Dérivée selon un vecteur**
Soit un point $a \in U$ et un vecteur $h \in \mathbb{R}^2$ non nul.
On dit que la fonction f admet une dérivée selon le vecteur h en a si et seulement si :

1. Il existe $\delta > 0$ tel que $\forall t \in [-\delta, \delta]$, $a + th \in U$
2. l'application φ_h définie sur $[-\delta, \delta]$ par $\varphi_h(t) = f(a + th)$ est dérivable en 0.

On note alors cette limite :

$$\boxed{D_h f(a) = \varphi_h'(0)}$$

Dérivée de f en a selon un vecteur h :

Remarque 12. On considère dans cette définition la restriction de f à la droite passant par a dirigée par le vecteur h.

Exercice : 8

On considère la fonction de deux variables définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Soit un vecteur $h = (a, b)$ unitaire.
Etudier la dérivée de f selon le vecteur h au point $(0, 0)$.

DÉFINITION 8 : **Dérivées partielles**
On appelle dérivées partielles de f au point a lorsqu'elles existent, les dérivées de f selon les vecteur $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Il s'agit donc des dérivées en a_1 et a_2 des deux applications partielles f_1 et f_2 en a.
On a donc :

1. $$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t\to a_1} \frac{f(t, a_2) - f(a_1, a_2)}{t}$$ $$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = f_1'(a_1)$$
2. $$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{t\to a_2} \frac{f(a_1, t) - f(a_1, a_2)}{t}$$ $$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = f_2'(a_2)$$

Remarque 13.
1. Comme f, les dérivées partielles sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
2. On les note aussi : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = D_x f(a)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = D_y f(a)$.

Remarque 14. IMPORTANT !!
Déterminer l'existence de dérivées partielles revient à étudier la dérivabilité des applications partielles de f.
Pour le calcul pratique, on dérive par rapport à une variable en considérant l'autre comme un paramètre.

`Exemple 8.` Etudier les dérivées partielles des fonctions f et g définies par : $\begin{cases} f(x, y) = x\cos(xy^2) + ye^x \\ g(x, y) = x.\ln(x^2 + y^2) \end{cases}$.

Exercice : 9

Etudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles de la fonction : $f(x, y) = \begin{cases} x^2 \text{ si } |x| > y \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

Exercice : 10

Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ dérivable et $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par : $f(x, y) = \varphi(y/x)$.

Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$

THÉORÈME FONDAMENTAL 9 : **DL à l'ordre 1 d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ en a**

Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ dont les dérivées partielles premières $\begin{cases} \text{existent} \\ \text{sont continues} \end{cases}$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.

Alors : $\begin{cases} \forall a \in U \\ \forall h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$, tels que $a + h \in U$:

le *développement limité de f à l'ordre* 1 au point a est alors : $\boxed{f(a + h) = f(a) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 + o(\|h\|)}$

Preuve 9 : Démonstration hors-programme ...

Exercice : 11

Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x + y}$ en $(0, 0)$.

Exercice : 12

Sans utiliser la calculatrice, donner une approximation de $1{,}02^{1{,}99}$.

Remarque 15.
1. En posant $X = (x, y) = a + h \in U$ le DL1(a) s'écrit aussi :
$$\boxed{f(X) = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2) + o(\|X - a\|)}$$
La partie régulière de ce DL est la meilleur approximation de f au voisinage de a par une fonctions polynomiale de degré 1.
2. Le plan de l'espace d'équation $z = f(a) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2)$ est appelé le *plan tangent* à la surface $\mathcal{C}_f$ en $A(a,f(a))$.

Représentation graphique du plan d'équation : $z = f(a) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2)$

Théorème Fondamental 10 : **Expression de la dérivée selon h en a**

Soit une fonction $f\ :\ U \mapsto \mathbb{R}$ dont les dérivées premières $\begin{cases} \text{existent} \\ \text{sont continues} \end{cases}$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.

Alors : $\begin{cases} \forall a \in U \\ \forall h = (h_1,\, h_2) \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$, tels que $a + h \in U$:

On a :
$$\boxed{D_h f(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a)h_2}$$

Preuve 10 : C'est une conséquence du DL1.
On écrit que pour t suffisamment petit, on a : $f(a + th) = f(a) + \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)th_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)th_2 + o(\|th\|)$.

Remarque 16. Cette formule est cohérente avec le fait que : $D_x f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)$ et $D_y f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)$.

`Exemple 9.` Vérifier la validité de la formule précédente sur la fonction $f(x,\, y) = 2x^3y^2$.

Corollaire 11 : Le DL1(a) de f s'écrit alors :
$$\boxed{f(a + h) = f(a) + D_h f(a) + o(\|h\|)}$$

3.3 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition 9 : **Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$**
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U si et seulement si :
$$\forall h \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,\, 0)\}, \quad D_h f\ :\ (x,\, y) \mapsto D_h f(x,\, y) \quad \text{est} \begin{cases} \text{définie} \\ \text{continue} \end{cases} \text{sur } U.$$

Remarque 17. On remarquera que l'on ne définie pas la notion $\mathcal{C}^1$ localement en un point, mais sur un ouvert U.

Corollaire 12 : **Caractérisation des fonctions $\mathcal{C}^1$.**
Soit u un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f\ :\ U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.
$$f \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \iff \text{les fonctions} \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{cases} \text{existent et sont continues sur } U.$$

Preuve 12 : Pas de difficulté compte-tenu du théorème précédent.

Remarque 18. Ainsi, pour montrer qu'une fonction f est $\mathcal{C}^1$ au $\mathcal{V}(a)$, on pourra vérifier que sur un voisinage U de a, les dérivées partielles de f existent et sont continues.

`Exemple 10.` Montrer que la fonction définie par $f(x, y) = \sin(xy)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

`Exemple 11.` Montrer que f définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ sauf en $(0, 0)$.

Exercice : 13

Soit : $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue et $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \displaystyle\int_x^y \varphi(t)\, dt$.

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.

Corollaire 13 : **Une fonction $\mathcal{C}^1$ est continue**
Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Si : f est $\mathcal{C}^1$ sur U alors : f est continue sur U.

Preuve 13 : Pas de difficulté à l'aide du DL1.

Remarque 19. Ce théorème permet dans certains cas, de montrer rapidement qu'une fonction n'est pas $\mathcal{C}^1$.

`Exemple 12.` Montrer que f définie par : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ n'est pas $\mathcal{C}^1$ au $\mathcal{V}(0, 0)$.

Remarque 20. Attention : comme le montre l'exercice suivant, contrairement au cas des fonctions réelles, l'existence d'une dérivée selon tout vecteur h en un point a n'implique pas la continuité de la fonction en a.

Exercice : 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\begin{cases} f(x, y) = \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x, y) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f admet une dérivée au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$.
2. Observer que néanmoins f n'est pas continue en $(0, 0)$.

Théorème 14 : **L'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U**
On note $\mathcal{C}^1(U)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
Alors :

$$(\mathcal{C}^1(U),\ +\ ,\ .) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev.}$$

Preuve 14 : Pas de difficulté.

Remarque 21. On montre aussi que si $f, g \in \mathcal{C}^1(U)$ alors $\begin{cases} f \times g \\ f/g \text{ avec } g \text{ ne s'annulant pas sur } U \end{cases}$ sont aussi $\mathcal{C}^1$ sur U

`Exemple 13.` Ainsi :

1. les fonctions polynômiales à deux variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. les fonctions rationnelles à deux variables sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur leur ensemble de définition.

Remarque 22. On peut vérifier que l'ensemble $\mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U est une $\mathbb{R}$-algèbre associative et unitaire.

3.4 Notion de différentielle

Définition 10 : **Différentielle (Notion HP)**
Soit une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U et $a \in U$. on note :

$$df_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h_1, h_2) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(a)h_1 + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)h_2 \end{array}$$

df_a est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^2$ qui s'appelle la *différentielle* de f au point $a \in U$.
On l'appelle aussi parfois l'*application linéaire tangente* à f en a.

Remarque 23.
L'image de h par la différentielle de f en a ($df_a(h)$) n'est autre que la dérivée de f en a selon le vecteur h ($D_h f(a)$).

Remarque 24. Le DL à l'odre 1 de f en a s'écrit donc : $f(a+h) = f(a) + df_a(h) + o(\|h\|)$.

1. $df_a(h)$ est donc la partie linéaire de la variation de f en a.
2. le plan vectoriel d'équation $z = df_a(x,y)$ est la direction du plan affine passant par le point $A(a,\, f(a))$.
3. En physique, on considère $df_a(h)$ comme LA variation de f en a. Il ne s'agit en fait que de l'approximation au premier ordre de cette variation.

Remarque 25. **Notation :** Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $U \subset \mathbb{R}^2$, on définit la fonction : $df \;:\; \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\, \mathbb{R}) \\ a & \mapsto & df_a \end{array}$.

On notera $\boxed{df = \dfrac{\partial f}{\partial x}.dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}.dy}$ et $\boxed{df_a = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a).dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}(a).dy}$ où : $\left\{ \begin{array}{l} dx \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h_1,\, h_2) & \mapsto & h_1 \end{array} \\ \\ dy \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (h_1,\, h_2) & \mapsto & h_2 \end{array} \end{array} \right.$.

DÉFINITION 11 : **Gradient**
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^1$ en $a \in U$.

On définit alors le *vecteur gradient* de f et a par : $\boxed{\overrightarrow{\nabla} f(a) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(a),\, \dfrac{\partial f}{\partial y}(a)\right)}$ ou $\overrightarrow{\text{grad}}\, f(a)$

Remarque 26. En utilisant la notation du gradient, on a dans $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel : $D_h f(a) = \langle \overrightarrow{\nabla} f(a), h \rangle$.
Le DL_1 de f en a s'écrit donc :

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + \langle \overrightarrow{\nabla} f(a), h \rangle + o(\|h\|)}$$

Exercice : 15
Soit $f(x,\, y) = x^2 e^y + \sin(xy)$, e la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $a = (-1,\, 2)$.
Calculer :

1. df_a
2. $Mat_e(df_a)$
3. $\overrightarrow{\nabla} f(a)$
4. $D_h f(a)$ où $h = (1,2)$

Exercice : 16
Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\nabla} f(a)$ donne la ligne de plus grande pente de la surface $z = f(x,\, y)$ en a et que la ligne de niveaux passant par $(a, f(a))$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{\nabla} f(a)$.

3.5 Dérivées de composées

THÉORÈME 15 : **Dérivée d'une composée du type :** $g(t) = f(x(t),\, y(t))$ $\quad (\mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R})$

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de variable $(x,\, y)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
Soit $\varphi \;: t \mapsto (x(t),\, y(t))$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ de U défini sur un intervalle I.

Soit $g = f o \varphi$ la restriction de f à ce chemin : $g \;:\; \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f\big(x(t),\, y(t)\big) \end{array}$

Cette fonction g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I et

$$\forall t \in I, \quad \boxed{g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t),\, y(t)\big) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t),\, y(t)\big) \times y'(t)}$$

Preuve 15 :

1. On commence par exprimer les DL_1 de u et v au voisinage de t.
2. Puis on calcule $g(t+h)$ en utilisant le DL_1 de f au voisinage de $(x(t),\, y(t))$.

`Exemple 14.` Soit les fonctions f et g définies par $\begin{cases} f(x,\, y) = x^2 + xy + e^{x-y} \\ g(t) = f(e^t,\, t^2) \end{cases}$. Calculer $g'(0)$.

Exercice : 17

Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et un segment $[a,\, b]$ ($\begin{cases} a = (a_1,\, a_2) \\ b = (b_1,\, b_2) \end{cases}$) inclus dans l'ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.

On considère la restriction de la fonction f à ce segment : $g : \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(a + t(b-a)) \end{array}$

1. Montrer la formule de Taylor intégrale à l'ordre 1 :

$$f(b) = f(a) + (b_1 - a_1)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(a + t(b-a))dt + (b_2 - a_2)\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(a + t(b-a))dt$$

2. En déduire l'inégalité des accroissements finis :

$$\text{Si} \quad M = \sup_{x\in[a,b]} \left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right|,\, \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x)\right| \right) \quad \text{alors} \quad \left|f(b) - f(a)\right| \leq M\|b-a\|_1$$

DÉFINITION 12 :

Une fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\, y) & \mapsto & (u(x,\, y),\, v(x,\, y)) \end{array}$ est dite $\mathcal{C}^1$ en a lorsque les fonctions $\begin{cases} u \\ v \end{cases}$ sont $\mathcal{C}^1$ en a.

THÉORÈME 16 : **Dérivées partielles d'une composée** $(\mathbb{R}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R})$

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de variable $(x,\, y)$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
Soit $\varphi\ : (u,\, v) \mapsto (x(u,\, v),\, y(u,\, v))$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $V \subset \mathbb{R}^2$ dans U.
Alors, l'application $g = fo\varphi$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur V et

$$\forall (u,\, v) \in V, \quad \boxed{\frac{\partial g}{\partial u}(u,\, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,\, v),\, y(u,\, v)).\times \frac{\partial x}{\partial u}(u,\, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,\, v),\, y(u,\, v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u,\, v)}$$

et

$$\forall (u,\, v) \in V, \quad \boxed{\frac{\partial g}{\partial v}(u,\, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,\, v),\, y(u,\, v)).\times \frac{\partial x}{\partial v}(u,\, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,\, v),\, y(u,\, v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u,\, v)}$$

Preuve 16 : Démontrons l'expression de la dérivée partielle de g par rapport à u.
On fixe v et on dérive $F(u) = g(u,\, v) = f(x(u,\, v),\, y(u,\, v))$ en appliquant la formule du théorème précédent.

Exercice : 18

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g\ :\ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que : $\forall (u,\, v) \in \mathbb{R}^2$, $g(v,\, v) = f(u^2 + v^2,\, uv)$.

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction f.

Exercice : 19

Soit $f\ :\ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $g\ :\ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par : $g(\rho,\, \theta) = f(\rho.\cos\theta,\, \rho.\sin\theta)$.

1. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Exprimer $\dfrac{\partial g}{\partial \rho}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ en fonction des dérivées partielles de la fonction f.

Exercice : 20

En réalisant un changement de variables de type linéaire, déterminer les fonctions $f\ :\ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ solutions de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{3\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

4 Extremas d'une fonction de deux variables

DÉFINITION 13 : **Extremum**
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in U$. On dit que f admet en a :

1. un *maximum global* si et seulement si $\forall x \in U,\ f(x) \leq f(a)$.
2. un *minimum global* si et seulement si $\forall x \in U,\ f(x) \geq f(a))$.
3. un *maximum local* de f si et seulement si $\exists r > 0$, tel que $\forall x \in B(a,r) \cap U, \quad f(x) \leq f(a)$.
4. un *minimum local* de f si et seulement si $\exists r > 0$ tel que $\forall x \in B(a,r) \cap U, \quad f(x) \geq f(a)$

THÉORÈME FONDAMENTAL 17 : **La différentielle s'annule en un extremum local**
Soit une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert U.

Si f admet un extremum local en a alors : $\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0 \end{cases}}$.

Dans ce cas, on a alors $df_a = 0$

Preuve 17 : Un extremum local de f est en particulier un extremum local des deux applications partielles.

Extremum local

Remarque 27. Les points $a \in U$ tels que $df_a = 0$ s'appellent des *points critiques* de f.
On recherchera donc les extrema locaux parmi les points critiques.

Recherche d'extrema locaux

1. On commence par déterminer les points critiques de f. Il s'agit donc de résoudre : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(X) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(X) = 0$.
2. Mais un point critique ne donne pas toujours un extremum : une fois tous les points critiques a déterminés, il faut faire une étude plus précise en étudiant le signe de $\Delta(X) = f(x, y) - f(a)$ au voisinage de a.
   (a) Pour étudier le signe de cette différence, il pourra être utile de :
      i. se ramener en $(0, 0)$ en effectuant un changement de variables (u, v) adapté.
      ii. penser à utiliser les coordonnées polaires.
      iii. penser à utiliser les développements limités.
   (b) Pour prouver que le point a déterminé n'est pas un extremum local, on pourra considérer la restriction de f à un chemin bien choisi.

`Exemple 15.` Etudier les extréma locaux de la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$.

Exercice : 21
Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = (x+y)^2 + x^4 + y^4$.
2. $f(x, y) = x^3 + y^3$.
3. $f(x, y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$.
4. $f(x, y) = x^2 - y^2$
5. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
6. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 5$.

Exercice : 22

Soit $F : I \mapsto \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que F est une *courbe de niveau* de f, c'est à dire que $\exists c \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in I$, $f\big(F(t)\big) = c$.

1. On considère la fonction d'une variable $g(t) = f\big(F(t)\big)$. Calculer pour $t \in I$, $g'(t)$.
2. En déduire qu'en un point a d'une courbe de niveau C_c de f, $\overrightarrow{\nabla} f(a)$ est orthogonal à C_c.
3. Une application importante.
   (a) Soit $\mathcal{C}$ une courbe de $\mathbb{R}^2$ définie par une équation $f(x, y) = 0$ où f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
   On admet que $\mathcal{C}$ admet un paramétrage $(I, \overrightarrow{F})$.
   Montrer que l'équation de la tangente en un point (x_0, y_0) de cette courbe est

$$\boxed{(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0} \quad \text{ou} \quad \langle X - X_0, \overrightarrow{\nabla} f(X_0)\rangle = 0$$

   (b) Déterminer l'équation de la tangente en un point (x_0, y_0) d'une ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

5 Dérivées partielles d'ordre deux

Définition 14 : **Dérivées partielles secondes**

Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U.
On définit les deux fonctions : $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continues sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$.

1. Si $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$ existe, on le note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$
2. Si $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$ existe, on le note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$
3. Si $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(a)$ existe, on le note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$
4. Si $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(a)$ existe, on le note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$

Remarque 28. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$ sont appelées les *dérivées partielles d'ordre 2* de f en a.

`Exemple 16.` Calculer si elles existent, les dérivées partielles d'ordre 2 des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2$:

1. $f(x, y) = xy.e^{x^2+y^2}$.
2. $f(x, y) = x^2(x+y)$.
3. $f(x, y) = \cos(xy)$.

Exercice : 23

Soient les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par :

1. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
2. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Etudier l'existence de dérivées partielles secondes de f en $O = (0, 0)$. Comparer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(O)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(O)$

Théorème 18 : **Théorème de Schwarz (ADMIS !)**
Soit $f : U \mapsto \mathbb{R}$ et $a \in U$.

On suppose que : $\begin{cases} 1) \ f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } U \\ 2) \text{ Les fonctions } \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \text{ et } \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) \text{ existent sur un voisinage de } a \\ 3) \text{ Ces deux fonctions sont continues au point } a \end{cases}$

Alors $\boxed{\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)(a) = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)(a)}$ On note alors $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a)$ cette valeur commune.

Définition 15 : **Fonctions de classe $\mathcal{C}^2$**

Soit une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$.
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U ssi : $\begin{cases} f \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \\ \text{ses dérivées partielles sont de classe } \mathcal{C}^1 \end{cases}$.

Remarque 29. D'après le théorème de Schwarz, si une fonction est $\mathcal{C}^2$ sur U, alors $\forall X \in U$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X)$.

`Exemple 17.` Les 2 fonctions de l'exercice précédent sont-elles $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice : 24
Soit f et φ : $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ deux applications de classe $\mathcal{C}^2$ et F : $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par $F(x, y) = f(x + \varphi(y))$.

1. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Vérifier l'égalité : $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}.\dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$

Théorème 19 : **L'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur U**
On note $\mathcal{C}^2(U)$ l'ensemble des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$.
Alors :

$$(\mathcal{C}^2(U),\ +\ ,\ .) \text{ est un } \mathbb{R}\text{-ev.}$$

Preuve 19 : Pas de difficulté.

Remarque 30.
1. Lorsque f et g sont $\mathcal{C}^2$ en a alors $f \times g$ et f/g (si de plus $g(a) \neq 0$) sont $\mathcal{C}^2$ en a.
2. Les composées de fonctions $\mathcal{C}^2$ sur des ensembles adaptés sont $\mathcal{C}^2$.

`Exemple 18.` Les fonctions polynomiales à deux variables sont de class $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice : 25
Soit $[a, a+h] \subset U \subset \mathbb{R}^2$ un segment et f : $U \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert U. On note $\begin{cases} a = (a_1, a_2) \\ h = (h_1, h_2) \end{cases}$.

1. En écrivant la formule de Taylor avec reste intégrale pour la restriction de f au segment $[a, a+h]$, déterminer la formule de Taylor avec reste intégrale pour f :

$$f(a+h) = f(a)+\langle \nabla f(a), h\rangle + h_1^2 \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a+th)\ \mathrm{d}t + 2h_1h_2 \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a+th)\ \mathrm{d}t + h_2^2 \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a+th)\ \mathrm{d}t$$

2. Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et telles que g est positive.
   Prouver qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que : $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(x_0)\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

3. Utiliser les deux résultats précédents pour en déduire la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage de a.

$$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a), h\rangle + \frac{1}{2}\left[h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right] + o(\|h\|^2)$$

où $\|h\|^2$ représente la norme infinie de h.

Rem : Cette formule peut être utilisée pour l'étude des points critiques.

Exercice : 26

En réalisant le changement de variables $\begin{cases} u = x \\ v = x + y \end{cases}$, déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

Exercice : 27

Soit $U = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < t < x\}$.
Trouver une fonction $u : U \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ de la forme $u(x, t) = f(x/t)$ vérifiant l'équation des ondes :

$$\forall (x, t) \in U, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = 0$$