Les nombres réels

—

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal DELAHAYE : D'après le cours d'Alain Soyeur

18 novembre 2010

L'objectif de ce chapitre n'est pas de présenter une construction de l'ensemble de réels (Hors-programme) mais d'évoquer les propriétés les plus importantes de cet ensemble.
En munissant $\mathbb{R}$ des opérations $+$ et $\times$ (lois de composition internes) et de la relation d'ordre usuelle $\leq$, $\mathbb{R}$ prend la structure de *CORPS totalement ordonné* (Voir le cours sur les structures algébriques). Nous n'utiliserons les inégalités strictes que lorsqu'elles sont réellement nécessaires.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Si $x \in \mathbb{Q}$ on dira que x est un *rationnel*
2. Si $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ alors on dira que x est un *irrationnel*.

1 Propriété de la borne supérieure

Dans les définitions suivantes, con considère A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1 : **Majorants, minorants d'une partie**

1. Un réel $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de la partie A ssi tout élément de A est inférieur à M : $\forall x \in A,\ x \leq M$
2. Un réel $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de la partie A ssi tout élément de A est supérieur à m : $\forall x \in A,\ x \geq m$

Remarque 1. Existence et unicité?

Définition 2 : **Parties bornées**
On dit que A est bornée si et seulement si : $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, \quad m \leq x \leq M$.

Définition 3 : **Plus grand (maximum), plus petit élément (minimum) d'une partie**

1. Un réel $a \in \mathbb{R}$ est un *plus grand élément* de A ssi : $a \in A$ et $\forall x \in A,\ x \leq a$
   S'il existe, le plus grand élément est unique et on le note $\boxed{a = \max A}$
2. Un réel $b \in \mathbb{R}$ est un *plus petit élément* de A ssi : $b \in A$ et $\forall x \in A,\ x \geq b$
   S'il existe, le plus petit élément est unique et on le note : $\boxed{b = \min A}$

Remarque 2.

1. Le maximum de A est un majorant qui appartient à A tandis que le minimum de A est ...
2. Existence et unicité?

Définition 4 : **Borne supérieure (ou inférieure) d'une partie**

1. Si l'ensemble des majorants de A admet un plus petit élément M, alors on dit que M est la *borne supérieure* de A. Dans ce cas, M est unique et l'on note $\boxed{M = \sup A}$
2. Si l'ensemble des minorants de A admet un plus grand élément m, alors on dit que m est la *borne inférieure* de A. Dans ce cas, m est unique et l'on note $\boxed{m = \inf A}$

Remarque 3. Existence et unicité?

Remarque 4.
Lorsqu'il existe, le plus grand élément d'un ensemble est aussi la borne supérieure de l'ensemble.
En revanche, la réciproque est fausse : $A = [0,\ 1[$.

Théorème Fondamental 1 : **Propriété FONDAMENTALE de la borne supérieure**

Si A vérifie $\begin{cases} A \subset \mathbb{R} \\ A \neq \emptyset \\ A \text{ majorée par } M \in \mathbb{R} \end{cases}$, alors : A admet une borne supérieure et $\sup A \leq M$.

Preuve 1 : Cette propriété fait partie des axiomes de définition de $\mathbb{R}$.

Remarque 5. De même, toute partie A non-vide de $\mathbb{R}$ et minorée par m possède une borne inférieure telle que $m \leq \inf A$.

Pour prouver que $\begin{cases} \sup A \text{ existe} \\ \sup A \leq M \end{cases}$, on vérifiera simplement que : $\begin{cases} A \subset \mathbb{R} \\ A \neq \emptyset \\ \forall x \in A,\ x \leq M \end{cases}$.

Remarque 6. Le théorème de la borne supérieure sera en particulier utilisé plus tard pour :

1. définir la notion d'intégrale de Riemann.
2. démontrer le théorème de la limite monotone (suites et fonctions).
3. démontrer le théorème de convergence des suites adjacentes
4. démontrer le théorème des valeurs intermédiaires
5. démontrer l'existence du PPCM et du PGCD de deux nombres entiers

Théorème 2 : **Caractérisation de la borne sup par ε**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$a = \sup A \iff \begin{cases} a \text{ est un majorant de la partie } A \quad (\forall x \in A,\ x \leq a) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A \cap [a-\varepsilon,\ a] \end{cases}$$

Caractérisation par ε de la borne supérieure

Preuve 2 :
$\Rightarrow$: C'est la traduction de la définition.
$\Leftarrow$: On montre facilement par l'absurde de a est le plus petit des majorants.

Remarque 7. Sauriez-vous énoncer et démontrer un théorème équivalent pour la borne inférieure?

Corollaire 3 : **Caractérisation séquentielle de la borne sup**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et $a \in \mathbb{R}$.

$$a = \sup A \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} a \text{ est un majorant} \\ \text{il existe une suite } (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } (x_n) \to a \end{cases}.$$

Caractérisation séquentielle de la borne supérieure

Preuve 3 : On construit la suite recherchée en prenant pour tout $n \geq 1$, $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$

`Exemple 1.` Trouver s'ils existent, les inf, sup ainsi que les max, min de :

1. $E_1 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
2. $E_2 = \{1/n + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $E_3 = \{x^2 + y^2 | xy = 1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$

Corollaire 4 : Si A vérifie $\begin{cases} \boxed{A \subset \mathbb{Z}} \\ A \neq \emptyset \\ A \text{ majorée} \end{cases}$, alors : A admet un élément maximal.

Preuve 4 :

1. Les hypothèses montrent que A admet une borne supérieure : $\sup A$.
2. Il existe alors une suite (a_n) d'éléments de A et donc de $\mathbb{Z}$ convergeant vers $\sup A$.
   En supposant tour à tour que $\sup A \in \mathbb{Z}$ puis que $\sup A \notin \mathbb{Z}$, on montre que si tous les éléments de A sont strictement inférieurs à $\sup A$ alors (a_n) ne peut pas converger vers $\sup A$.

Exercice : 1

($*$) Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}$.
Montrez que : $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$

Exercice : 2

($**$) Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.
On note : $A + B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \exists (a, b) \in A \times B,\ x = a + b\}$
Montrez que $A + B$ possède une borne supérieure et que : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

2 Borne supérieure d'une fonction

Définition 5 : **Borne sup. d'une fonction**
Soit $D \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une application.
On considère la partie de $\mathbb{R}$ définie par $f(D)$.

- On dit que f possède une borne supérieure ssi $f(D)$ en possède une. On note : $\boxed{\sup f = \sup_{x \in D} f(x)}$
- On dit que f est bornée ssi $f(D)$ est bornée.

Remarque 8.

1. Idem pour la borne inférieure.
2. Une fonction bornée admet une borne supérieure et une borne inférieure.

`Exemple 2.` ($*$) Prouver l'existence et calculer la borne supérieure de la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = 2-e^{-x^2}$.

Exercice : 3

($*$) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = x^n(1 - x)$. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} \sup\limits_{x \in [0,1]} f_n(x)$.

Théorème 5 : **Caractérisation de la borne sup. d'une fonction** $f : D \mapsto \mathbb{R}$

On a : $a = \sup\limits_{x \in D} f(x) \iff \begin{cases} f \text{ est majorée par } a \\ \text{il existe une suite } (x_n) \in D^{\mathbb{N}} \text{ telle que } f(x_n) \mapsto a \end{cases}$.

Preuve 5 : Conséquence immédiate du corollaire 2.

Exercice : 4

($*$) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f, g : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions bornées.

1. Montrez que : $\sup\limits_{x \in I} |(f + g)(x)| \leq \sup\limits_{x \in I} |f(x)| + \sup\limits_{x \in I} |g(x)|$
2. A-t-on égalité en général ?

PROPOSITION 6 : Soient f et g deux fonctions réelles définies sur un ensemble $B \subset \mathbb{R}$.
Lorsque les grandeurs suivantes existent, on a :

- $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \sup_{x\in A} f(x) \leq \sup_{x\in B} f(x)$
- $A \subset B \quad \Rightarrow \quad \inf_{x\in A} f(x) \geq \inf_{x\in B} f(x)$

Preuve 6 : Voir un exercice traité précédemment.

3 Rappels sur les inégalités

THÉORÈME 7 : **Opérations sur les inégalités**

1.	Si $a \leq b$	alors	$-a \geq -b$	
2.	Si $a \leq b$ et $c \leq d$	alors	$a + c \leq b + d$.	(on ne peut pas soustraire 2 inégalités)
3.	Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$	alors	$0 \leq ac \leq bd$	(bien effectuer la vérification avant de multiplier)
4.	Si $a \leq b$ et $c \geq 0$	alors	$ac \leq bc$.	(bien effectuer la vérification avant de multiplier)

Remarque 9. On retiendra donc que :

1. On ne peut pas soustraire ni diviser membre à membre deux inégalités.
2. Il faut vérifier que tous les termes sont positifs avant de multiplier membre à membre deux inégalités.
3. Lorsqu'on multiplie une inégalité par une quantité c, il faut :
   – soit vérifier que $c \geq 0$ ou que $c \leq 0$
   – soit distinguer différents cas selon le signe de c.
4. Evitez si possible les inégalités strictes : elles sont source d'erreurs ....

PROPOSITION 8 : Soit $f : I \to \mathbb{R}$.

1. Si $\begin{cases} f \text{ est croissante sur } I \\ a, b \in I \end{cases}$ alors $a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) \leq f(b)$
2. Si $\begin{cases} f \text{ est strictement croissante sur } I \\ a, b \in I \end{cases}$ alors $a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b)$

Preuve 8 : Par définition des fonctions croissantes et strictement croissantes.

Remarque 10. On a, bien entendu, une proposition équivalente pour les fonctions (strictement) décroissantes.

Remarque 11. **Quelques méthodes permettant de prouver une inégalité :**

	Méthodes	Exemples	
1.	A l'aide d'une étude de fonction	$\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x > -1,$ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$	$(1 + x)^n \geq 1 + nx$ $\ln(1 + x) \leq x$ $a + b \leq a^2 + b^2 + 1.$
3.	Par équivalences successives	$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$ $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,$	$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ $a + b \leq a^2 + b^2 + 1.$
4.	A l'aide de la convexité	$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}],$ $\forall x \in \mathbb{R},$	$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x$ $e^x \geq x + 1$

4 Valeur absolue

DÉFINITION 6 : **Valeur absolue, distance de deux points**
On définit la valeur absolue d'un réel x quelconque de la façon suivante : $|x| = \max(x, -x)$
La quantité $\mathrm{d}(x, y) = |x - y|$ mesure la distance entre deux réels x et y.

Remarque 12. En particulier, nous avons l'équivalence importante suivante :

$$\boxed{|x - x_0| \leq \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon}$$

Théorème 9 : Propriétés immédiates.
Soit $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $|x| \geq 0$ et $|-x| = |x|$
2. $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -|x| \leq x \leq |x|$
4. $|xy| = |x||y|$ et $|\dfrac{1}{x}| = \dfrac{1}{|x|}$ $(x \neq 0)$
5. $\forall n \in \mathbb{Z}, |x^n| = |x|^n$
6. $\sqrt{x^2} = |x|$
7. $|x| \leq M \Longleftrightarrow -M \leq x \leq M$
8. $(|x|)^2 = x^2$
9. $x^2 \leq y^2 \Longleftrightarrow |x| \leq |y|$
10. $|\sin x| \leq |x|$

Preuve 9 : Petites démonstrations qui ne posent pas de réel problème.

Remarque 13. La propriété 8 implique en particulier que $x \leq y \Longleftrightarrow x^2 \leq y^2$ dès lors que x et y sont positifs.

Théorème 10 : Inégalités triangulaires
Pour tout réels x et y, on a :

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

Preuve 10 :
M1 : On constate que c'est un cas particulier des inégalités triangulaires sur les complexes.
M2 : Pour chacune des deux inégalités, on procède par équivalences successives en élevant au carré.

Remarque 14. La généralisation $|\sum_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ de l'inégalité triangulaire s'obtient facilement par récurrence.

Exercice : 5
$(*)$ Majorer pour $x \in \mathbb{R}$, la quantité $A = \left|\dfrac{\sin x - 2\cos x}{e^{\sin x}}\right|$.

Proposition 11 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Si $a \leq x \leq b$ alors $|x| \leq \max(|a|, |b|)$

Preuve 11 : Pas de difficulté en traitant séparément les 3 cas : $0 \leq a$, $b \leq 0$ et $a \leq 0 \leq b$.

Corollaire 12 : Caractérisation d'une partie bornée

Une partie non vide $A \subset \mathbb{R}$ est bornée ssi $\exists M > 0$ tel que $\forall x \in A, \quad |x| \leq M$

Exercice : 6
Pour $x \in [2, 3]$, encadrer par différentes méthodes $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x + 1}$.

Remarque 15. L'exemple précédent nous a permis de mettre en évidence différentes méthodes possibles d'encadrement :

	Méthodes	Commentaires
1.	Par une étude de fonction	Méthode très précise mais qui n'aboutit pas forcément
2.	Par encadrements successifs	Méthode assez rapide et moyennement précise
3.	Par majoration en valeur absolue	Méthode rapide mais très imprécise

5 Les intervalles de $\mathbb{R}$

DÉFINITION 7 : **Droite réelle achevée**
On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et on étend la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty$

DÉFINITION 8 : **Intervalles de $\mathbb{R}$**
Soient deux réels $a < b$.
- On appelle *segment* $[a, b]$, la partie de $\mathbb{R}$ définie par $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- De même on définit les parties : $[a, b[$, $]a, b]$, $]a, b[$, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$, $]a, +\infty[$, $]-\infty, b[$, $\mathbb{R}$

Une partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des 9 formes précédentes est appelée *un intervalle de* $\mathbb{R}$

Remarque 16.
1. Il est important de ne pas confondre les notions de *segment*, d'*intervalle* et de *partie* de $\mathbb{R}$.
   Certains théorèmes ne sont valables sur des segments et d'autres sur des intervalles quelconques.
2. Un intervalle sera dit *ouvert* s'il est de la forme $]a, b[$, $]a, +\infty[$ ou $]-\infty, b[$.

PROPOSITION 13 : **Caractérisation d'un intervalle**
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non vide.
$$I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \iff \forall x_1, x_2 \in I, [x_1, x_2] \subset I$$

Exercice : 7
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
Montrer que $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est un intervalle.

6 Partie entière d'un réel

THÉORÈME 14 : **Définition de la Partie Entière d'un réel**
Soit un réel $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n \leq x < n+1$
n est appelé la *partie entière* de x et est le plus souvent notée : $n = E(x)$.

Preuve 14 :
1. Dans le cas où $x \in \mathbb{R}^+$, l'existence et l'unicité se démontrent en considérant : $\max\{p \in \mathbb{N} \mid p \leq x\}$
2. Dans le cas où $x \in \mathbb{R}^-$, l'existence et l'unicité se démontrent en considérant : $\min\{p \in \mathbb{N} \mid -p \geq -x\}$

`Exemple 3.` On a : E(6,34) = 6 et E(-23,56) = -24

Maple
```
> floor(6.34);
```

PROPOSITION 15 : **Encadrements**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les encadrements suivants :
$$E(x) \leq x < E(x) + 1 \quad \text{et} \quad x - 1 < E(x) \leq x$$

Preuve 15 : Immédiat !

Remarque 17. Dans les exercices, on pourra penser à écrire $x = E(x) + r$ avec $r \in [0, 1[$.

Exercice : 8

$(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$.

Prouver que pour tout $p \in]1, +\infty[$, la suite définie par $u_n = \dfrac{E(p^n x)}{p^n}$ converge vers x.

PROPOSITION 16 : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}$: $E(x+n) = E(x) + n$

Preuve 16 : Il suffit d'encadrer $x + n$ par deux entiers...

Remarque 18. En revanche, la proposition "$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad E(x+y) = E(x) + E(y)$" est FAUSSE !!
Trouvez un contre-exemple !!

Graphe de la fonction Partie Entière

Exercice : 9

$(*)$ Prouver par deux méthodes différentes que : $E(\dfrac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

COROLLAIRE 17 : $\mathbb{R}$ **est archimédien**
Si α est un réel strictement positif, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists!\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad k\alpha \leq x < (k+1)\alpha$$

Preuve 17 : On applique le théorème précédent à la quantité $\dfrac{x}{\alpha}$.

$\mathbb{R}$ **est archimédien**

Remarque 19. Ce résultat s'écrit aussi de la façon suivante :
Tout nombre réel x s'écrit de manière unique sous la forme $x = k\alpha + y$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq y < \alpha$.

COROLLAIRE 18 : **Valeurs décimales approchées**
Soit un réel x, et un entier naturel $n \geq 1$.
Alors, il existe un unique entier relatif p tel que : $\boxed{p.10^{-n} \leq x < (p+1).10^{-n}}$ avec $p = E(x.10^n)$.
On dit que :

1. $p.10^{-n}$ est *une valeur décimale approchée de x par défaut* à la précision 10^{-n}.
2. $(p+1).10^{-n}$ est *une valeur décimale approchée de x par excès* à la précision 10^{-n}.

Preuve 18 : C'est une application immédiate du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien en prenant $\alpha = \dfrac{1}{10^n}$.

`Exemple 4.`
3.14159 est une valeur décimale approchée par défaut de π à la précision 10^{-5}
3.14160 est une valeur décimale approchée par excès de π à la précision 10^{-5}

7 Densité

Définition 9 : Densité
Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que la partie A est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_1 \neq x_2$, $A \cap [x_1; x_2] \neq \emptyset$
Cela signifie qu'entre 2 éléments quelconques de $\mathbb{R}$, on pourra toujours trouver un élément de A.

Remarque 20. En fait, cette définition implique que si entre deux réels x_1 et x_2 quelconques, on trouve un $a \in A$, alors on en trouve une infinité.

A dense dans $\mathbb{R}$

Proposition 19 : Caractérisation par ε de la densité
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

$$\boxed{A \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists a \in A \text{ tel que } |x - a| \leq \varepsilon}.$$

Cela signifie que l'on peut trouver un élément de A aussi proche que l'on veut de n'importe quel réel x.

Preuve 19 : Pas de difficulté.

Caractérisation de la densité de A dans $\mathbb{R}$ par ε

`Exemple 5.`
1. $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$
2. Si Δ est une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal fini, $\mathbb{R} \backslash \Delta$ est dense dans $\mathbb{R}$

Proposition 20 : Caractérisation par les suites de la densité
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

$$\boxed{A \text{ est dense dans } \mathbb{R} \iff \forall x \in \mathbb{R}, \text{ il existe une suite } (r_n) \text{ d'éléments de } A \text{ telle que } (r_n) \to x}$$

Preuve 20 : Pas de difficulté en prenant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$

Caractérisation de la densité de A dans $\mathbb{R}$ par les suites

Remarque 21. Important !
On peut adapter la démonstration précédente pour prouver que l'on peut choisir (r_n) majorée ou minorée par x.

Théorème Fondamental 21 : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve 21 : On utilise la caractérisation par ε et on montre que l'on peut approcher tout réel aussi près que l'on souhaite par un nombre décimal.

Remarque 22. Comme le montre la démonstration précédente, l'ensemble des nombres décimaux relatifs est lui-aussi dense dans $\mathbb{R}$

`Exemple 6.` ($*$) Trouver s'ils existent, les inf, sup ainsi que les max, min de : $E = \{\sin x \mid x \in \mathbb{Q}\}$.

Théorème 22 : $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

Preuve 22 : Utilisons la définition de la densité.
Lorsque $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$, on prouve que $z = x + (y - x).\frac{\sqrt{2}}{2}$ est un irrationnel de $[x, y]$.
Sauriez-vous démontrer le résultat à l'aide de la caractérisation séquentielle ?

Remarque 23. On peut résumer les 2 théorèmes précédents en disant qu'entre deux réels distincts on pourra toujours trouver un rationnel et un irrationnel.

`Exemple 7.` ($*$)

1. Déterminer les applications croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$.
2. Déterminer les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$.

Exercice : 10

($* * *$) On souhaite démontrer que l'ensemble $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z} = \{a + b\pi \mid (a, b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que l'application $\varphi\ : n \in \mathbb{Z} \mapsto n.\pi - E(n\pi)$ (la partie fractionnaire de $n\pi$) est injective.
2. On note $F = \{\varphi(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$
   (a) Montrer que F est de cardinal infini.
   (b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux éléments f_1 et f_2 de F tels que $|f_1 - f_2| \leq \varepsilon$
   (c) En déduire que $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est dense dans [0,1].
   Vous pourrez pour cela utiliser le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ avec $\alpha = |f_1 - f_2|$
3. En déduire que $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.