Les intégrales doubles

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

29 juin 2010

1 Intégrale double sur un rectangle

Si une fonction f est constante et vaut α sur un petit pavé $[a, b] \times [c, d]$, on définit son intégrale double comme étant le *volume* de l'espace de base le rectangle $[a, b] \times [c, d]$ et de hauteur α.
Ce volume vaut $V = \alpha \times (b - a) \times (d - c)$.
On vérifie que

$$V = \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \Big(\int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y \Big)\,\mathrm{d}x = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x \Big)\,\mathrm{d}y$$

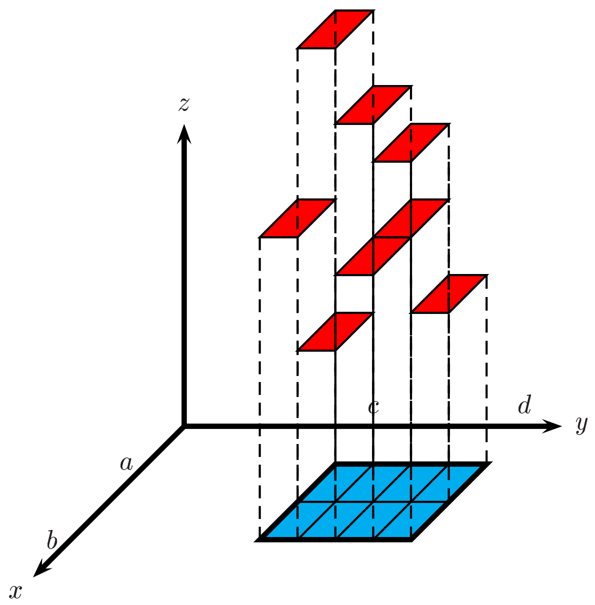

FIG. 1 – *Fonction en escalier*

Pour définir l'intégrale double d'une fonction bornée $f : [a, b] \times [c, d] \mapsto \mathbb{R}$:

1. On commence par définir l'intégrale double sur un rectangle d'une fonction en escalier.

2. On définit ensuite *l'intégrale supérieure* de la fonction f comme étant la borne inférieure des intégrales des fonctions en escalier majorant f, et *l'intégrale inférieure* de la fonction f comme étant la borne supérieure des intégrales de fonctions en escalier minorant f.

3. Lorsque l'intégrale supérieure et l'intégrale inférieure sont égales, on dit que la fonction f est intégrable, et on note
$$\iint_{[a,\ b]\times[c,\ d]} f(x,\, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \qquad \text{son intégrale.}$$

On montre que toute fonction $f : [a,\, b] \times [c,\, d] \mapsto \mathbb{R}$ continue est intégrable.

Le théorème suivant permet de calculer une intégrale double sur un rectangle $R = [a,\, b] \times [c,\, d]$.

Théorème Fondamental 1 : **Théorème de Fubini**

Si f est une fonction continue sur le rectangle $R = [a,\, b] \times [c,\, d]$, (avec $a \leq b$ et $c \leq d$) alors on peut calculer l'intégrale double de f sur R en calculant deux intégrales simples :

$$\iint_R f(x,\, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,\, y)\ \mathrm{d}y\right]\ \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,\, y)\ \mathrm{d}x\right]\ \mathrm{d}y$$

Preuve 1 : Admis ...

Corollaire 2 : Lorsque la fonction f est de la forme $f(x,\, y) = u(x).v(y)$ et le domaine R est un rectangle, alors :

$$\iint_R f(x,\, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \int_a^b u(x).\ \mathrm{d}x.\int_c^d v(y)\ \mathrm{d}y$$

Preuve 2 : Pas de difficulté ...

Remarque 1. Ce cas est assez fréquent en pratique.
On s'y ramène assez souvent après un passage en coordonnées polaires (voir plus loin).

Théorème 3 : **Propriétés de l'intégrale double**
Si f et g sont des fonctions continues sur le rectangle $R = [a,\, b] \times [c,\, d]$ et $(\lambda,\, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

1. **Linéarité** : $\displaystyle\iint_R (\lambda f + \mu g)(x,\, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \lambda \iint_R f(x,\, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \mu \iint_R f(x,\, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y.$
2. **Additivité** : si $R = R_1 \cup R_2$ avec $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ (ou presque ...), deux rectangles :
$$\iint_R f(x,\, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_{R_1} f(x,\, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y + \iint_{R_2} f(x,\, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$
3. **Positivité** : si $f \geq 0$ sur R, alors : $\displaystyle\iint_R f(x,\, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \geq 0$
4. **Invariance par translation** : si $(\alpha,\, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et $R' = [a+\alpha,\, b+\alpha] \times [c+\beta,\, d+\beta]$, alors :
$$\iint_R f(x,\, y)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \iint_{R'} f(x-\alpha,\, y-\beta)\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

Preuve 3 : Admis ...

`Exemple 1.` Calculer: $I = \displaystyle\iint_D (x+y)\sin x \sin y \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$ où $D = [0, \pi]^2$.

2 Intégrale double sur un domaine admissible

La construction devient beaucoup plus compliquée si l'on considère des domaines $U \subset \mathbb{R}^2$ qui ne sont plus des rectangles ou des réunions de rectangles. Comment << subdiviser >> un tel domaine U ? Quelle régularité imposer à U ? Le procédé de construction précédent est inadapté, et on utilise une autre définition de l'intégrale : l'intégrale de Lebesgue. Heureusement, les calculs avec l'intégrale de Lebesgue ressemblent aux calculs habituels avec l'intégrale de Riemann.

DÉFINITION 1 : Domaine admissible
Soit $U \subset \mathbb{R}^2$.
On dira que U est un *domaine admissible* du plan lorsque U peut se décrire sous l'une des deux formes suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l} U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b \quad \text{et} \quad \phi(x) \leq y \leq \psi(x)\} \\ U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d \quad \text{et} \quad \alpha(y) \leq x \leq \beta(y)\} \end{array}\right. \quad \text{avec} \left\{\begin{array}{l} \phi,\, \psi \text{ continues par morceaux sur } [a, b] \\ \alpha,\, \beta \text{ continues par morceaux sur } [c, d] \end{array}\right.$$

2 types des domaines admissibles

Remarque 2. Les deux paramétrages de U précédents sont appelés : *paramétrages admissibles* de U.

On considère une fonction $f : U \mapsto \mathbb{R}$ continue sur un domaine admissible $U \subset \mathbb{R}^2$:
Le théorème de Fubini nous donne une définition et un mode de calcul de l'intégrale double de f sur U :

THÉORÈME 4 : **Théorème de Fubini**
Soit f une fonction continue sur un domaine $U \subset \mathbb{R}^2$ admissible possédant les deux types de paramétrages précédents. On peut alors calculer l'intégrale double de f sur U en calculant deux intégrales simples selon l'une des deux formules suivantes :

$$\iint_U f(x, y) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y = \int_a^b \left[\int_{\phi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) \; \mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x = \int_c^d \left[\int_{\alpha(y)}^{\beta(y)} f(x, y) \; \mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y$$

Preuve 4 : Admis ...

Remarque 3. Ainsi, pour calculer une intégrale double, on commencera toujours par :

1. Dessiner le domaine d'intégration U
2. Caractériser ce domaine l'un des deux paramétrages admissibles possibles.
   Si cela pose problème, on pourra faire appel au changement de variables vu dans la partie suivante ...

`Exemple 2.` Calculer $I = \displaystyle\iint_D (x^2 + y) \; \mathrm{d}x \; \mathrm{d}y$ où $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left\{\begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{array}\right. \}$.

Théorème 5 : Propriétés de l'intégrale double sur un domaine admissible
Comme dans le cas où le domaine d'intégration est un rectangle, on retrouve les propriétés suivantes :

1. **Linéarité**
2. **Additivité**
3. **Positivité**

Preuve 5 : Admis ...

Exercice : 1

Montrer que :

1. $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{6}$ lorsque $D = \{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad x+y\leq 1\}$.
2. $\displaystyle\iint_D \ln(1+x^2+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\ln 2+\frac{8}{9}-\frac{\pi}{3}$ lorsque $D = \{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\quad y\geq 0,\quad x^2+y\leq 1\}$.
3. $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{1}{12}$ lorsque $D = \{(x,\,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq x^2,\quad x\geq y^2\}$.

Exercice : 2

Calculer : $\displaystyle\int_1^2 \Big(\int_{\sqrt{x}}^{x} \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x + \int_2^4 \Big(\int_{\sqrt{x}}^{2} \sin\frac{\pi x}{2y}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x$

3 Changement de variables

Théorème 6 : Changement de variables

Soit Δ un domaine << admissible >>, soit $D\subset\mathbb{R}^2$ et soit ϕ une application presque bijective de classe $\mathcal{C}^1$

$$\phi : \left\{\begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & D \\ (u,\,v) & \mapsto & (x(u,\,v),\,y(u,\,v)) \end{array}\right.$$

On appelle *Jacobien* de ϕ, au point $(u,\,v)$, le déterminant :

$$J\phi(u,\,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2mm] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Alors

$$\boxed{\iint_D f(x,\,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_\Delta f\big(x(u,\,v),\,y(u,\,v)\big)\,\big|J\phi(u,\,v)\big|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}$$

Preuve 6 : admis !

Changement de domaine d'intégration par changement de variables

Remarque 4. L'objectif d'un changement de variable est le plus souvent d'obtenir un nouveau domaine d'intégration Δ dont on peut facilement déterminer un paramétrage admissible.

Deux cas usuels de changement de variables sont à connaître plus particulièrement :

1. Changement de coordonnées affine : $\begin{cases} x = au + bv + \alpha \\ y = cu + dv + \beta \end{cases}$ alors $\boxed{J\phi(u,\, v) = (ad - bc)}$

2. Changement de coordonnées polaires : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$ alors $\boxed{J\phi(\rho,\, \theta) = \rho}$.

Exercice : 3

Calculer :

1. $I_1 = \iint_D x^2y^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

2. $I_2 = \iint_D (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ où D est le demi-disque de rayon 1 de centre $(0,\, 1)$ avec $x \geq 0$.

3. $I_3 = \iint_D (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

4. $I_4 = \iint_D (x^2 + y^2) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ où $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$.

Exercice : 4

Soit $R > 0$.

On définit : $F(x) = \int_0^x e^{-t^2} \,\mathrm{d}t$, $I(R) = \iint_{[0,R]^2} e^{-(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$, et $D_R = \{(x,\, y) \in {\mathbb{R}^+}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

1. Montrer que : $I(R) = F(R)^2$.

2. Montrer que : $\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \leq I(R) \leq \iint_{D_{\sqrt{2}R}} e^{-(x^2+y^2)} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$

3. En déduire que : $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \,\mathrm{d}x = \lim_{R\to+\infty} F(R) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$

Exercice : 5

L'objectif de cet exercice est de calculer l'intégrale simple : $I = \int_0^1 \dfrac{\ln(1+x) \,\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

1. Observer que $\ln(1+x) = \int_0^1 \dfrac{x \,\mathrm{d}y}{1+xy}$
2. (a) Montrer que $2.I = \int_0^1 \int_0^1 \dfrac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$
   (b) En déduire la valeur de l'intégrale I.

4 Aire d'un domaine plan

Définition 2 : Aire d'un domaine plan
Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine, on appelle *aire* de D,

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Remarque 5. L'aire du domaine plan D est donc le volume de base D et de hauteur 1.

`Exemple 3.` Calculer l'aire délimité par une ellipse d'équation cartésienne $\quad D : \quad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leq 1$

Exercice : 6

Calculer les aires suivantes :

1. aire de l'astroïde
2. aire d'une arche de cycloïde (on constatera des difficultés ...)

Remarque 6. Nous verrons dans le chapitre d'analyse vectoriel, une formule (Green-Riemann) permettant le calcul de l'aire d'un domaine lorsque la méthode précédente pose problème.

PROPOSITION 7 : **Cas d'une courbe en polaire**
Dans le cas où le domaine D contient O et est délimité par une courbe en polaire $\rho = \rho(\theta)$ avec $\theta \in [\alpha_1 \ , \alpha_2]$, son aire est donné par la formule :

$$\mathcal{A}ire(D) = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \rho^2(\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

Preuve 7 : Il suffit d'effectuer un changement de variable en polaire.

Aire d'un domaine délimité par une courbe en polaire

Remarque 7. En physique, les formules de l'aire à l'aide d'une intégrale double s'interprètent différemment.

Surfaces infinitésimales

On note $\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ et $\rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta$ des surfaces infinitésimaux et on somme (au sens de l'intégrale double) ces quantités sur tout le domaine dont on recherche l'aire.

$$\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \quad \text{et} \quad \iint_D \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\theta$$

Exercice : 7

Calculer les aires suivantes :

1. aire délimitée par une cardioïde
2. aire de la boucle d'une lemniscate de bernoulli d'équation polaire $\rho = \sqrt{2\cos\theta} \quad (\theta \in [\frac{-\pi}{4} \ ; \ \frac{\pi}{4}])$
3. aide de la boucle de la strophoïde droite d'équation polaire $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta} \quad (\theta \in [\frac{-\pi}{4} \ ; \ \frac{\pi}{4}])$