Le groupe orthogonal en dimension 2 et 3

MPSI - 1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

8 mai 2011

1 Partition du groupe orthogonal

a) Partition du groupe des matrices orthogonales :
Les définitions suivantes sont valables pour $n \in \mathbb{N}^*$.

DÉFINITION 1 : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ **et** $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$
Soit une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
Alors $\det(A) = \pm 1$.
On définit alors les sous-ensembles de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = +1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}$$

$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est appelé le groupe *spécial orthogonal*.
C'est en effet, un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Remarque 1. Les ensembles $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$ sont parfois plus simplement notés : $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{O}^-(n)$.

b) Partition du groupe des endomorphismes orthogonaux :

DÉFINITION 2 : **Isométries directes et indirectes**
Soit une isométrie $u \in \mathrm{O}(E)$ d'un espace euclidien orienté E.
Alors $\det(u) = \pm 1$.

1. On dit que u est une *isométrie directe* (ou *rotation*) de E lorsque $\det(u) = +1$
2. On dit que u est une *isométrie indirecte* lorsque $\det(u) = -1$.

On note :

1. $\mathrm{SO}(E)$ l'ensemble des isométries directes
2. $\mathrm{O}^-(E)$ l'ensemble des isométries indirectes de E.

L'ensemble $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}(E), \circ)$.

Remarque 2. $\mathrm{O}(E)$, $\mathrm{SO}(E)$ et $\mathrm{O}^-(E)$ sont parfois notés $\mathrm{O}(\varphi)$, $\mathrm{SO}(\varphi)$ et $\mathrm{O}^-(\varphi)$ où φ est le produit scalaire de E.

Remarque 3. Si ε est une **base orthonormale** de E, et si $\begin{cases} u \in L(E) \text{ avec} \\ U = \mathrm{Mat}_\varepsilon(u) \end{cases}$, alors : $\begin{cases} u \in O(E) \Longleftrightarrow U \in O_n(\mathbb{R}) \\ u \in \mathrm{SO}(E) \Longleftrightarrow U \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$

2 Etude du groupe orthogonal en dimension 2.

On considère un espace euclidien orienté E_2 de dimension 2.
Nous verrons au cours des études menées, qu'il sera préférable de se placer dans une base orthonormée directe.

2.1 Les rotations

Les rotations de E_2 sont les automorphismes orthogonaux de déterminant 1.
On commence par s'intéresser à la forme et aux propriétés des matrices de $SO_2(\mathbb{R})$.

Théorème 1 : **Etude de $SO_2(\mathbb{R})$**

1. Les matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme : $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in [0\ ;\ 2\pi[$
2. $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ ($\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe commutatif)
3. $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$

Preuve 1 :

1. Soit A une matrice quelconque de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
   On exprime le fait qu'elle appartient à $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\begin{cases} {}^tA = A^{-1} \\ \det A = 1 \end{cases}$.
2. Egalité facile à vérifier.
3. Conséquence immédiate de la propriété précédente.

Remarque 4. L'application : $\begin{array}{cccc} \phi : & (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\times) \\ & \theta & \mapsto & R_\theta \end{array}$ est donc un morphisme de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème Fondamental 2 : **Rotations vectorielles**
Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté et $u \in \mathrm{SO}(E)$ une isométrie directe.
Alors il existe **un unique** $\theta \in [0,2\pi[$ tel que pour *toute bon directe ε* de E,

$$Mat_\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On dit que u est la rotation vectorielle d'angle θ et on note $u = r_\theta$.

Preuve 2 :

1. Nous savons que dans une bon, la matrice d'une rotation est un élément A_θ de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
2. Il s'agit de montrer que θ est indépendant de la bon choisie. La matrice de passage P d'une bon directe vers une bon directe est aussi une matrice de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ (car les deux bases ont la même orientation). On a donc $A_{\theta'} = P^{-1}A_\theta P = P^{-1}PA_\theta = A_\theta$. On en déduit alors que $\theta' = \theta$.

Dessin

Remarque 5.

1. Nous venons pour la première fois, de définir dans le plan vectoriel euclidien la notion d'angle.
   Un angle caractérise une rotation vectorielle donnée.
2. La matrice de passage d'une bon directe vers une bon directe est une matrice de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$
3. L'image d'une bon directe par une rotation est une bon directe.

4. Si $(i,\, j)$ est une bon directe de E, et si r est la rotation d'angle θ, alors $\begin{cases} r(i) = \cos\theta.i + \sin\theta.j \\ r(j) = -\sin\theta.i + \cos\theta.j \end{cases}$.

`Exemple 1.` $(*)$

1. Déterminer la matrice de r, la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ dans une bon directe puis dans la base $(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans une bon directe e est $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\ -3 & 4\end{pmatrix}$.
   Prouver que u est une rotation et déterminer son angle.

Théorème 3 : **Formules donnant l'angle d'une rotation**
Soit E un espace euclidien et $r \in \mathcal{O}_2(E)$. Soit $a \in E$ non nul.
Alors l'angle de la rotation r est donné par les formules suivantes :

1. $\cos\theta = \dfrac{\langle a,r(a)\rangle}{||a||^2}$
2. $\sin\theta = \dfrac{[a,r(a)]}{||a||^2}$

Preuve 3 : Il suffit d'effectuer les calculs en prenant $a = x_a.i + y_a.j$ avec $(i,\, j)$ est une bon directe.

Remarque 6.

1. On utilisera les formules précédentes lorsqu'on ne connaît pas la matrice de la rotation dans une bon.
2. Les formules précédentes s'écrivent $\cos\theta = \langle a,r(a)\rangle$ et $\sin\theta = [a,r(a)]$ dans le cas où $||a|| = 1$.

Théorème 4 : **Angle de deux vecteurs**
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $(a,\, b) \in E^2$ deux vecteurs non-nuls.
On définit les vecteurs : $u = \dfrac{a}{||a||}$, $v = \dfrac{b}{||b||}$. Alors :

$$\boxed{\text{Il existe une unique rotation } r \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } v = r(u)}$$

Si θ est l'angle de la rotation $\theta \in [0,2\pi[$, on note $\boxed{\widehat{(a,\, b)} = \theta}$ l'*angle orienté* des vecteurs $(a,\, b)$.

Preuve 4 : Soient $e = (u,\, u')$ et $e' = (v,\, v')$ les bon directes construites à partir de u et v.

1. Une telle rotation existe bien : il suffit de prendre la rotation dont la matrice dans e est la matrice de passage de e vers e'.
2. Supposons qu'il existe deux rotations r_1 et r_2 telles que $r_1(u) = v$ et $r_2(u) = v$.
   On exprime alors les relations de $r_1(u) = v$ et $r_2(u) = v$ dans la bon directe $(u,\, u')$.

Remarque 7. Cette définition permet de retrouver les propriétés bien connues sur les angles de vecteurs :

1. $(\overrightarrow{u},\, \overrightarrow{v}) = -(\overrightarrow{v},\, \overrightarrow{u})$
2. $(\overrightarrow{u},\, \overrightarrow{v}) + (\overrightarrow{v},\, \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u},\, \overrightarrow{w}) \quad [2\pi]$

Corollaire 5 : l'angle orienté $\widehat{(a,\, b)}$ est donné par les formules :

1. $\cos\theta = \dfrac{\langle a,b\rangle}{||a||||b||}$
2. $\sin\theta = \dfrac{[a,b]}{||a||||b||}$

Preuve 5 : Il suffit d'effectuer le calcul en utilisant les formules donnant l'angle d'une rotation.

Remarque 8.

1. Les formules précédentes s'écrivent $\cos\theta = \langle a,b\rangle$ et $\sin\theta = [a,b]$ dans le cas où $||a|| = ||b|| = 1$.
2. On retrouve les formules rencontrées en début d'année pour définir en dimension 2 le produit scalaire et le produit mixte de deux vecteurs :

   (a) $\langle a,b\rangle = ||a||||b|| \cos\widehat{(a,\, b)}$
   (b) $[a,\, b] = ||a||||b|| \sin\widehat{(a,\, b)}$

3. Pour trouver $\theta = \widehat{(a,\, b)}$, on calcule $\cos\theta$ puis on trouve le signe du sinus en calculant $[a,\, b]$

`Exemple 2.` $(*)$ Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté usuel, quel est l'angle entre les vecteurs $U = (1,1)$ et $V = (0,1)$?

2.1.1 Les isométries indirectes

THÉORÈME 6 : **Etude de $O_2^-(\mathbb{R})$**

1. L'application : $\Delta : \begin{array}{ccc} SO_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & O_2^-(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & PX \end{array}$ est une bijection (où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in O_2^-(\mathbb{R})$).
2. Les matrices de $O_2^-(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme : $S_{\frac{\theta}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Preuve 6 :

1. Remarquons que $P^2 = I_2$. La démonstration ne pose alors pas de difficulté.
2. Conséquence immédiate du 1.

THÉORÈME 7 : **Isométries indirectes**

Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté, $\boxed{\varepsilon \text{ une bon}}$ de E et $u \in O_2^-(E)$ une isométrie indirecte. Alors il existe **un unique** $\theta \in [0,2\pi[$ tel que

$$Mat_\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = S_{\frac{\theta}{2}}$$

Preuve 7 : En effet, la matrice de u dans une bon directe est une matrice de $O_2^-(\mathbb{R})$.

Remarque 9.

1. Par soucis de cohérence avec le cas des rotations, on se placera dans le cas où ε est une bon directe.
2. Contrairement aux rotations, θ dépend ici de la bon directe choisie, ce n'est donc pas une caractéristique de u.

THÉORÈME FONDAMENTAL 8 : **Nature des isométries indirectes**

Les isométries indirectes d'un espace euclidien orienté E de dimension 2 sont les réflexions de E.
Soit $s \in \mathcal{O}^-(E)$ et ε une bon directe.
Dans la base ε, il existe $\theta \in [0;2\pi[$ tel que la matrice de s soit de la forme $S_{\frac{\theta}{2}}$.

s est alors la réflexion d'axe $\text{Vect}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.

Preuve 8 : Soit s une isométrie indirecte de E.
Sa matrice dans une bon directe est de la forme $S_{\frac{\theta}{2}}$.

1. Comme $S_{\frac{\theta}{2}}.S_{\frac{\theta}{2}} = I_2$, s est une symétrie vectorielle.
2. Pour prouver que la symétrie s est orthogonale : (on traitera la cas $\theta = 0$ à part)
   (a) On peut prouver directement que $\ker(s - \text{id}) \perp \ker(s + \text{id})$ en utilisant le fait que s est une symétrie et un endomorphisme orthogonal.
   (b) On peut aussi remarquer que $S_{\frac{\theta}{2}}$ est symétrique. (voir exercice du chapitre précédent)
3. On montre enfin que le support $\ker(s - \text{id}) = \text{Vect}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.
4. Réciproquement, toutes les réflexions de E_2 sont des isométries indirectes.

Dessin

`Exemple 3.` ($*$) On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle.
Caractériser l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Théorème 9 : **Décomposition des rotations**

1. Toute rotation r d'un espace euclidien orienté de dimension 2 s'écrit comme composée de deux réflexions dont l'une peut être choisie arbitrairement.
2. Soient s_1 et s_2, deux réflexions d'axes respectifs Vect $\begin{pmatrix} \cos\alpha_1 \\ \sin\alpha_1 \end{pmatrix}$ et Vect $\begin{pmatrix} \cos\alpha_2 \\ \sin\alpha_2 \end{pmatrix}$ dans une bon directe ε.
   Alors $s_1 o s_2$ est une rotation vectorielle d'angle $\theta = 2(\alpha_1 - \alpha_2)$.

Preuve 9 :

1. On se place dans une bon directe ε. Dans cette base, r admet pour matrice R_θ.
   Considérons alors les deux réflexions s_1 et s_2 de matrice $S_{\frac{\theta_1}{2}}$ et $S_{\frac{\theta_2}{2}}$ dans la base ε.
   On recherche alors la matrice de la composée $s_1 o s_2$ dans ε et on cherche les conditions pour que $s_1 o s_2 = r$.
2. C'est une conséquence de la démonstration précédente.

Remarque 10. Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E_2)$.
Toute isométrie de E_2 s'écrit donc comme un produit de 1 ou 2 réflexions.

Exercice : 1

($**$) Soient u et v deux vecteurs de E_2 tels que $\|u\| = \|v\|$.
Montrer qu'il existe une unique réflexion telle que $s(u) = v$.

Aide : Vous pourrez procéder par "analyse / synthèse".

2.2 Conclusion

En dimension 2, les endomorphismes orthogonaux u sont : $\begin{cases} \text{Soit des rotations (si } u \in \mathrm{SO}_2(E)) \\ \text{Soit des réflexions (si } u \in \mathrm{O}_2^-(E)) \end{cases}$

Si ε est une bon directe, alors :

1. La matrice dans ε d'une rotation r est un élément de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ de la forme R_θ avec θ $\boxed{\text{indépendant de } \varepsilon}$.
2. La matrice dans ε d'une réflexion s est un élément de $O_2^-(\mathbb{R})$ de la forme $S_{\frac{\theta}{2}}$ avec θ dépendant de ε.
   s est alors la réflexion d'axe Vect $\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ (que l'on trouve en recherchant $\ker(s - \mathrm{id})$).

3 Etude du groupe orthogonal en dimension 3

On considère un espace euclidien orienté E_3 de dimension 3.

Proposition 10 : **Critère pour distinguer les matrices de** $\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$
Soit une matrice orthogonale $A = (a_{ij}) \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.

1. si $a_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ alors $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$
2. si $a_{33} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ alors $A \in \mathrm{O}_3^-(\mathbb{R})$

Preuve 10 : Nous avons vu que A peut s'interpréter comme la matrice de passage d'une bon e vers une bon ε.
Ainsi : $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}) \iff (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ bond $\iff \varepsilon_3 = \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2$

`Exemple 4.` ($*$) A quel ensemble appartient la matrice suivante : $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$

3.1 Les rotations

Théorème 11 : **Nature des isométries directes en dimension 3 (rotations vectorielles)**
Soit une isométrie directe $u \in \mathrm{SO}(E_3)$.
On note $E(1) = \ker(u - \mathrm{id}_E)$ le sous espace vectoriel formé des vecteurs invariants par u.
Alors :

1. Si $u \neq \mathrm{id}_E$, $E(1)$ est une droite vectorielle $D = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$ où ε_3 est un vecteur de norme 1.
2. Dans toute bon directe de la forme $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ $\boxed{\text{avec}}$ $\ker(u - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$, la matrice de u dans la base ε s'écrit :
$$Mat_e(u) = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta \in [0\ ;\ 2\pi[$$
On dit que u est la *rotation vectorielle* d'axe $\mathrm{Vect}(e_3)$ (orienté par ε_3) et d'angle θ.

Preuve 11 :

1. (a) On souhaite montrer qu'il existe $x \neq 0$ tel que $u(x) = x$.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $P_u(\lambda) = \det(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.
On aura : $\exists x \in E\backslash\{0\}$ tel que $u(x) = \lambda x \iff P_u$ admet une racine non nulle.
On montre cela en constatant que $\begin{cases} P_u(0) = \det u = 1 \\ P_u(\lambda) \sim -\lambda^3 \text{ en } +\infty \end{cases}$.
Comme $u \in \mathrm{SO}(E_3)$, on montre que cette racine (appelée valeur propre de u) ne peut être que 1.
(b) On montre enfin par l'absurde que $\dim E(1) = 1$.
2. On prend alors $\varepsilon_3 \in E(1)$, tel que $\|\varepsilon_3\| = 1$ et on note $D = \mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$.
3. On construit alors une bon directe $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$. $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ est alors une bon directe de $D^\perp$.
4. On vérifie que la restriction de u à $D^\perp$ est une isométrie directe de $D^\perp$ (ne pas oublier la stabilité !).
5. On utilise alors le théorème sur les isométries directes en dimension 2.

Remarque 11. ⚠ Contrairement à la dimension 2, les matrices des rotations en dimension 3 dépendent de la bond choisie. La matrice d'une rotation aura la forme donnée dans le théorème uniquement si la bond ε a son 3ième vecteur invariant.

Dessin

Remarque 12.

1. Le signe de l'angle θ de la rotation ne dépend alors que du choix du vecteur ε_3.
Si l'on choisit $\varepsilon_3' = -\varepsilon_3$ à la place de ε_3, l'angle est transformé en son opposé. (Voir le calcul de $\sin\theta$)
2. Lorsque $\theta = \pi$, la rotation est appelée un *demi-tour* ou un *retournement*.
3. Le sev des vecteurs invariants d'une rotation ($\neq \mathrm{id}_E$) est de dimension 1 et est appelé *l'axe de la rotation*.

Théorème 12 : **Image d'un vecteur orthogonal à l'axe de la rotation**
Soit $r \in \mathrm{SO}_2(E_3)$ d'axe $\mathrm{Vect}(\varepsilon_3)$ (avec $\|\varepsilon_3\| = 1$) et d'angle θ.
Si $x \in [\mathrm{Vect}(\varepsilon_3)]^\perp$ alors :
$$\boxed{r(x) = \cos\theta.x + \sin\theta.\varepsilon_3 \wedge x}$$
.

Preuve 12 : On constate que $(\frac{x}{\|x\|}, \varepsilon_3 \wedge \frac{x}{\|x\|})$ forme une bon du plan $(\varepsilon_3)^\perp$.

Exercice : 2

($**$) Plus généralement, soit $r \in \mathrm{SO}_2(E_3)$ d'axe $\mathrm{Vect}(d)$ (avec $\|d\| = 1$) et d'angle θ.
Montrer que pour tout $x \in E_3$: $r(x) = \langle x,d\rangle(1 - \cos\theta).d + \cos\theta x + \sin\theta.d \wedge x$

Théorème 13 : **Recherche de l'angle d'une rotation**
Soit $u \in \mathrm{SO}(E_3)$ et A la matrice de u dans une base quelconque.
Alors l'angle θ de la rotation peut se déterminer à l'aide des deux informations suivantes :

1. $2\cos\theta + 1 = \mathrm{Tr}\, A$
2. $\sin\theta$ est du signe du produit mixte $[a,\, r(a),\, d]$ où $\begin{cases} a \text{ est un vecteur de } E_3 \text{ non invariant} \\ d \text{ oriente l'axe de la rotation} \end{cases}$

Preuve 13 :

1. On utilise le fait que deux matrices semblables ont même trace.
2. On effectue le calcul de $\Delta = [a,\, r(a),\, d]$ en :
   (a) constatant que $\Delta = [a,\, r(a),\, d] = [a_1,\, r(a_1),\, d]$ où $a = a_1 + a_2$ avec $a_1 \in \big(\mathrm{Vect}(d)\big)^{\perp}$ et $a_2 \in \mathrm{Vect}(d)$.
   (b) se plaçant dans une bon $\varepsilon = (\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|}$ et $\varepsilon_3 = \dfrac{d}{\|d\|}$.

Remarque 13. La formule donnant $\sin\theta$ montre bien que le signe de θ dépend de l'orientation d choisie pour l'axe.

Plan d'étude d'une rotation r donnée par sa matrice A dans une bon :

1. **On vérifie que :** $A \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$ en montrant que $\begin{cases} \text{la matrice } A \text{ est orthogonale} \\ \det(A) = +1 \end{cases}$.
2. **Axe de la rotation :**
   On cherche l'ensemble des vecteurs invariants que l'on oriente avec un vecteur directeur d.
3. **Angle θ de la rotation :**
   On trouve la valeur de θ en utilisant le théorème précédent.

`Exemple 5.` ($*$) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté euclidien usuel, on considère $u \in L(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
Reconnaître cet endomorphisme et préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice : 3

($*$) L'espace E_3 est munis d'une bon directe $(i,\, j,\, k)$.

1. Déterminez une méthode permettant de calculer la matrice dans cette base d'une rotation $\begin{cases} \text{d'axe } \mathrm{Vect}(d) \\ \text{d'angle } \theta \end{cases}$.
2. Application : en déduire la matrice de la rotation d'axe $\mathrm{Vect}(1,\, 1,\, 0)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
3. Que diriez-vous de programmer tout ça sous Maple?...

Résultat : On trouve la matrice $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$

3.2 Les isométries indirectes : $\mathcal{O}^-(E_3)$

Remarque 14. Les réflexions sont des éléments de $\mathcal{O}^-(E_3)$ (matriciellement !).

Théorème 14 : **Nature des isométries indirectes : $\mathcal{O}^-(E_3)$**

1. Les isométries indirectes de E_3 euclidien de dimension 3 sont les composées de rotations et de réflexions.

2. Toute isométrie indirecte se décompose comme composée (commutative) d'une rotation d'angle θ d'axe $\text{Vect}(d)$ et de la réflexion par rapport à $d^\perp$.

   Si A est la matrice de l'isométrie indirecte u dans une bond :
   (a) On trouve d en remarquant qu'il s'agit d'un vecteur qui dirige la droite vectorielle des vecteurs qui se tranforment en leur opposé : $\text{Vect}(d) = \ker(u + \text{id})$.
   (b) On trouve l'angle θ en remarquant que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et donc que :
      i. $2\cos\theta - 1 = \text{Tr}\, A$
      ii. $\sin\theta$ est du signe de $[a,\, u(a),\, d]$ où a est un vecteur non colinéaire à d.

Preuve 14 :

1. Soit u est une isométrie indirecte de E_3.
   Remarquons que $-u$ est alors une rotation de E_3 et donc que son axe $\text{Vect}(d)$ est l'ensemble des vecteurs transformés en leur opposé par u.
   Considérons $\varepsilon = (\varepsilon_1,\, \varepsilon_2,\, \varepsilon_3)$ une bond telle que ε_3 dirige et oriente $\text{Vect}(d)$.
   On démontre alors facilement (s'inspirer de la démonstration effectuée pour les rotations) que la matrice de u dans la base ε s'écrit :

$$Mat_e(u) = \begin{pmatrix} R_\theta & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \theta \in [0\ ;\ 2\pi[$$

   Finalement, on prouve matriciellement que u est la composée de la réflexion par rapport à $d^\perp$ et de la rotation d'axe $\text{Vect}(d)$ et d'angle θ.

2. Réciproquement, il est facile de vérifier que les composées d'une rotation et d'une réflexion sont des éléments de $\mathcal{O}^-(E_3)$.

Dessin

`Exemple 6.` $-\text{id}$ est un élément de $\mathcal{O}^-(E_3)$ et correspond à la composée d'une réflexion et d'une rotation d'angle π.

Remarque 15. **Points invariants d'une isométrie indirecte u de E_3**

1. Si $\dim(\ker(u - \text{id}_E)) = 2$ alors $\theta = 0$ et u est une réflexion par rapport à $\ker(u - \text{id}_E) = d^\perp$.
2. Si $\dim(\ker(u - \text{id}_E)) = 0$ alors $\theta \neq 0$ et u est la composée d'une rotation (non triviale) et d'une réflexion.

`Exemple 7.` $(*)$ Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ orienté euclidien usuel, on considère $u \in L(\mathbb{R}^3)$ de matrice $A = \dfrac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ 1 & 8 & 4 \end{pmatrix}$

Reconnaître cet endomorphisme et préciser ses éléments caractéristiques.

3.3 Bilan

On peut donc résumer la classification des isométries de E_3 de la façon suivante :

- Isométries directes : ce sont des rotations d'axe une droite vectorielle.
  1. L'axe de la rotation est l'ensemble des points invariants.
  2. Parmi les rotations, on trouve les symétries orthogonales par rapport à une droite (demi-tours), et on convient que id_E est une rotation d'angle 0.

- Isométries indirectes : ce sont les endomorphismes de la forme $r_{d,\theta} \circ s_{d^\perp}$ où $r_{d,\theta}$ est la rotation par rapport à une droite vectorielle d (avec l'identité) et d'angle θ et $s_{d^\perp}$ est la réflexion par rapport à $d^\perp$.
  1. Si $\dim(\ker(u - \mathrm{id}_E)) = 2$ alors u est une réflexion par rapport à $\ker(u - \mathrm{id}_E) = d^\perp$.
  2. Si $\dim(\ker(u - \mathrm{id}_E)) = 0$ alors u est la composée d'une rotation et d'une réflexion.

Remarque 16. On rappelle que l'on reconnaît une isométrie directe où indirecte en vérifiant qu'il s'agit bien d'une isométrie (souvent matriciellement) et en calculant son déterminant.

Caractérisation à l'aide de l'ensemble des points invariants

L'étude des points invariants ($\ker(u - \mathrm{id}_E)$) d'une isométrie $u \in O(E_3)$ permet de déterminer la nature de celle-ci :

1.	Si $\dim(\ker(u - \mathrm{id}_E)) = 2$	alors	u est la reflexion	par rapport à $\ker(u - \mathrm{id}_E)$
2.	Si $\dim(\ker(u - \mathrm{id}_E)) = 1$	alors	u est une rotation	d'axe $\mathrm{Vect}\, d = \ker(u - \mathrm{id}_E)$
3.	Si $\dim(\ker(u - \mathrm{id}_E)) = 0$	alors	u est la composée d'une rotation	d'axe $\mathrm{Vect}\, d$
			et d'une reflexion	par rapport à $d^\perp$

Exercice : 4

($*$) Reconnaître les endomorphismes de matrice A, B et C dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
3. $C = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2} & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}-1 & \sqrt{2} & 1+\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Exercice : 5

($*$) Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel :

1. Ecrire la matrice A de la rotation d'axe dirigé par le vecteur $n = (1,1,1)$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$ dans la base canonique.
2. Ecrire la matrice B de la réflexion par rapport au plan (H) d'équation $x - 2y + z = 0$ dans la base canonique.

Résultat : on trouve les matrices

1. $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1 & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}$
2. $B = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

Exercice : 6

($**$) Montrer que pour toute réflexion de $\mathcal{O}(E_3)$, il existe une bon dans laquelle sa matrice est de la forme :

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \theta \in [0, 2\pi[$$

Théorème 15 : Toute rotation $r_{d,\theta}$ de E_3 s'écrit comme composée de deux réflexions s_H et $s_{H'}$ avec $H \cap H' = d$.

Preuve 15 : On considére une bon directe ε telle que ε_3 dirige l'axe de la rotation.

1. On montre alors qu'il existe θ_1 et θ_2 tels que $r_{d,\ \theta} = s_2 \circ s_1$ où s_1 et s_2 sont les endomorphismes de matrices
$$S_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad S_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ dans } \varepsilon.$$
2. Puis on vérifie que s_1 et s_2 sont des réflexions que l'on peut caractériser.

Dessin

Remarque 17. Toute isométrie de E_3 se décompose comme un produit de 1, 2 ou 3 réflexions.
Comme en dimension 2, les réflexions engendrent donc le groupe orthogonal $\mathrm{O}(E_3)$.