Les espaces vectoriels : Partie 1

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

26 janvier 2011

1 Espaces vectoriels

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif (le programme impose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

DÉFINITION 1 :
On appelle *espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}$ tout ensemble E muni :
- d'une loi de composition interne : " + "
- d'une loi de composition *externe* : "." de $\mathbb{K} \times E$ dans E

et vérifiant :

1. $(E,+)$ est un groupe commutatif
2. $\forall(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall(x, y) \in E^2$: $\begin{cases} (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x \\ \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \\ (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x) \\ 1_{\mathbb{K}} \cdot x = x \end{cases}$

Remarque 1. Si E est une espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$,
- on dira que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $\mathbb{K}$ est le corps de base de E.
- les éléments de E s'appellent les *vecteurs* et les éléments de $\mathbb{K}$ les *scalaires.*
- l'élément neutre pour $+$, est noté 0_E et s'appelle le *vecteur nul.*

Remarque 2. Cette $\boxed{\text{première méthode}}$ pour démontrer d'un ensemble est un espace vectoriel ne sera appliquée que dans des cas exceptionnels (comme par exemple dans le cours, pour déterminer les Espaces Vectoriels de base).

`Exemple 1.`

1. Un corps $\mathbb{K}$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même.
   On peut en effet définir une loi externe "." en posant pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x = \lambda \times x$.
   Muni de $+$ et $\cdot$, $\mathbb{K}$ a alors une structure de $\mathbb{K}$-ev.

2. $\mathbb{C}$ peut être considéré comme un $\mathbb{C}$-ev ou un $\mathbb{R}$-ev.

3. $\mathbb{R}^2$ peut-être considéré comme un $\mathbb{R}$-ev.
   Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. On définit :
   (a) l'addition de deux vecteurs $X = (x_1, x_2)$, $Y = (y_1, y_2)$ par $X + Y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$.
   (b) la multiplication d'un vecteur $X = (x_1, x_2)$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ par $\lambda \cdot X = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

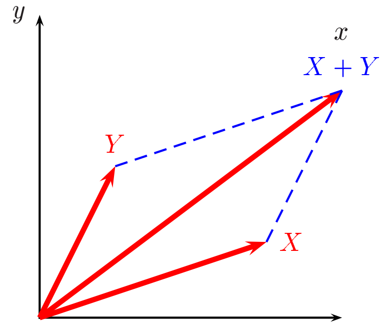

Fig. 1 – *Addition de vecteurs dans* $\mathbb{R}^2$.

Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ a une structure de $\mathbb{R}$-ev.
On peut représenter un vecteur $X = (x_1, x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par une flèche joignant le point $(0, 0)$ au point (x_1, x_2).
L'addition de deux vecteurs s'obtient alors de façon usuelle (en traçant un parallélogramme).

Exercice : 1

$(*)$ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle et de la multiplication externe par les complexes définie par : $(a + ib).(x, y) = (ax - by, ay + bx)$.
Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Celui-ci est appelé complexifié de E.

Proposition 1 : **Espace produit**
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $E_1, \dots, E_n$ des $\mathbb{K}$-ev.

On définit sur $E_1 \times \cdots \times E_n$ les lois : $\begin{cases} (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) = (\lambda \cdot x_1, \dots, \lambda \cdot x_n) \end{cases}$

$(E_1 \times \cdots \times E_n, +, \cdot)$ est alors un $\mathbb{K}$-ev de vecteur nul $(0_{E_1}, \dots, 0_{E_n})$.

Preuve 1 : Conséquence immédiate du fait que $E_1 \dots E_n$ sont des $\mathbb{K}$-ev.

Remarque 3.

1. Remarquez que dans la définition précédente, les ev $E_1 \dots E_n$ ont tous le même corps de base $\mathbb{K}$.
2. Les lois sont toutes notées $\begin{cases} \text{"+"} \\ \text{"."} \end{cases}$ alors qu'elles ne correspondent pas nécessairement à la même lci.
3. En particulier, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-ev et $\mathbb{C}^n$ peut être considéré soit comme un $\mathbb{C}$-ev, soit comme un $\mathbb{R}$-ev.

Proposition 2 : **Espaces de fonctions**
Soit A un *ensemble* non vide et E un $\mathbb{K}$-ev.
On note $\mathcal{F}(A, E)$ l'ensemble des fonctions de A vers E.

On définit alors deux lois sur $\mathcal{F}(A,E)$: $$\begin{cases} \forall (f, g) \in \mathcal{F}(A, E) \ : \quad (f+g) : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array} \\ \\ \forall f \in \mathcal{F}(A, E), \forall \lambda \in \mathbb{K} \ : \quad \lambda \cdot f : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array} \end{cases}$$

Alors $\Big(\mathcal{F}(A, E), +, \cdot\Big)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Preuve 2 : Conséquence immédiate du fait que E est un $\mathbb{K}$-ev.

`Exemple 2.` Ainsi, lorsque $I \subset \mathbb{R}$, $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}), +, .)$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Corollaire 3 : **Espace de suites**
Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'ensemble des suites à valeurs dans E, muni des lois $+$ et $\cdot$ est également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\big(\mathcal{S}(E), +, \cdot\big)$.

Preuve 3 :

1. L'ensemble des suites à valeurs dans E est $\mathcal{F}(\mathbb{N}, E)$ où E est un $\mathbb{K}$-ev.
2. L'addition des suites et la multiplication d'une suite par un scalaire correspondent à la lci et la lce définies dans la proposition précédente.

Remarque 4. Ainsi, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, .)$ est un $\mathbb{R}$-ev tandis que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}}, +, .)$ peut-être considéré comme un $\mathbb{R}$ ou un $\mathbb{C}$-ev.

Proposition 4 : **Règles de calcul dans un ev**
Pour tout (λ, μ) dans $\mathbb{K}^2$ et tout (x, y) dans E^2, on a :

1. $0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $(\lambda \cdot x) = 0_E \iff (\lambda = 0_K \text{ ou } x = 0_E)$
4. $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x)$
5. $\lambda \cdot (x - y) = \lambda \cdot x - \lambda \cdot y$
6. $(\lambda - \mu) \cdot x = \lambda \cdot x - \mu \cdot x$

Preuve 4 :

1. $0_{\mathbb{K}}.x = (0_{\mathbb{K}} + 0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x + 0_{\mathbb{K}}.x \dots$
2. $\lambda.0_E = \lambda.(0_{\mathbb{K}}.x) = (\lambda.0_{\mathbb{K}}).x = 0_{\mathbb{K}}.x = 0_E$
3. Si $\lambda \neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $\lambda.x = 0_E \iff \lambda^{-1}.(\lambda.x) = \lambda^{-1}.0_E \iff x = 0_E$
4. $\lambda.x + (-\lambda) \cdot x = (\lambda - \lambda).x = 0_E$ donc $(-\lambda) \cdot x = -(\lambda.x)$
   $\lambda.x + \lambda \cdot (-x) = \lambda.(x - x) = 0_E$ donc $(\lambda) \cdot (-x) = -(\lambda.x)$
5. Conséquence immédiate des résultats précédents.
6. Conséquence immédiate des résultats précédents.

Remarque 5.

1. On écrira désormais λx à la place de $\lambda.x$ lorsque la confusion ne sera plus à craindre.
2. On pourra écrire $-\lambda x$ sans aucune ambiguïté.

2 Sous-espaces vectoriels

Définition 2 : **Sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev**
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$ une partie **non vide** de E.
On dit que F (muni des lois de E restreintes à F) est un sous-espace vectoriel (sev) de E ssi F est un $\mathbb{K}$-ev.

Théorème Fondamental 5 : **Caractérisation des sous-espaces vectoriels**
Soit F une partie **non vide** d'un $\mathbb{K}$-ev E.

$$F \text{ sev de } E \iff \begin{cases} \forall (x, y) \in F^2 \\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \end{cases}, \quad \boxed{\lambda x + \mu y \in F}$$

On dit que F est *stable par combinaisons linéaires.*

Preuve 5 :

$\Rightarrow$ Soit F un sev de E. F étant stable par la lci et la lce, F est donc stable par combinaisons linéaires.
$\Leftarrow$ Il suffit de vérifier que $(F, +)$ est un groupe commutatif et que F est stable par la lce.
F étant un sous ensemble de E, les 4 propriétés de la lce sont automatiquement vérifiées.

Remarque 6.

1. La caractérisation s'exprime aussi sous la forme : $F \subset E$ sev de $E \iff F \neq \emptyset$ et $\begin{cases} \forall (x, y) \in F^2 \\ \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{cases}, \lambda x + y \in F$
2. Ce résultat implique que si F est un sev de E alors $\begin{cases} \forall (x_1, \dots, x_n) \in F^n \\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \end{cases}, \lambda_1 x_1 + \dots \lambda_n x_n \in F$

Remarque 7. IMPORTANT !
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors on a nécessairement $0_E \in F$.
En d'autres termes, si $0_E \notin F$ alors F n'est pas un sev de E. (Intéressant à retenir !!)

Deuxième Méthode

Pour démontrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-ev, on prouvera dans la mesure du possible, que c'est un sev d'un $\mathbb{K}$-ev connu E. Il faudra donc vérifier les 3 points suivants :

1. F est non vide (on prouvera par exemple que $0_E \in F$)
2. $F \subset E$
3. $\forall (x, y) \in F^2, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$

Exemple 3.

1. Si E est un espace vectoriel, alors les parties $\{0_E\}$ et E sont des sev de E.
2. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont : $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$ et toutes les droites vectorielles $F_0 = \{\lambda(x_0, y_0)\ ;\ \lambda \in \mathbb{R}\}$

Exemple 4. Soit l l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0. Vérifiez qu'il s'agit d'un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice : 2

$(*)$ Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sev de l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$?

1. $F = \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$
2. $F = \{f \in E \mid f(1) = 2f(0)\}$
3. $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) + 1\}$
4. $F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(1 - x)\}$
5. $F = \{f \in E \mid f$ dérivable et $\exists a \in E$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a(x)f(x)\}$

Exercice : 3

$(*)$ Prouver que l'ensemble des suites réelles presque nulles (qui s'annulent à partir d'un certain rang) est un $\mathbb{R}$-ev.

Théorème 6 : **L'intersection de sev est un sev**

Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de sev de E un $\mathbb{K}$-ev. Alors : $\boxed{\bigcap_{i\in I} F_i \text{ est un sev de } E}$.

Preuve 6 : On utilise la caractérisation usuelle des sev.

1. $\bigcap_{i\in I} F_i$ est bien une partie non vide de E.
2. Soient x et y deux vecteurs de $\bigcap_{i\in I} F_i$ et λ et μ deux scalaires.
   $\forall i \in I$, on a $(x, y) \in F_i^2$ et comme F_i est un sev de E, alors $\lambda.x + \mu.y \in F_i$ et donc $\lambda.x + \mu.y \in \bigcap_{i\in I} F_i$.

Exemple 5. Montrer que $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-ev.

Exercice : 4

$(**)$ Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.
Montrer que $F \cup G$ est un sev de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Définition 3 : **Espace vectoriel engendré par une partie**

Soit un $\mathbb{K}$-ev E et une partie $A \subset E$ de E.
On appelle *sous-espace engendré* par la partie A, le plus petit sev de E contenant A.
Ce sev est noté $\mathrm{Vect}(A)$.

Dessin

Espace vectoriel engendré par une partie A

Théorème 7 : Soit un $\mathbb{K}$-ev E et une partie $A \subset E$ de E.
On note $\mathcal{F}_A$ l'ensemble des sev de E contenant A, alors :

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$$

Preuve 7 : Il suffit de montrer que $\bigcap_{F \in \mathcal{F}_A} F$ est le plus petit sev de E contenant A ...

Théorème Fondamental 8 : **Caractérisation usuelle de** Vect(A)
Soit $A \neq \emptyset$ une partie d'un $\mathbb{K}$-ev E.
Vect(A) est l'ensemble des combinaisons linéaires $\boxed{\textit{finies}}$ d'éléments de A :

$$\text{Vect}(A) = \{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \quad | \quad n \in \mathbb{N}^*, (\lambda_1, \ \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, (a_1, \ \ldots, a_n) \in A^n\}$$

Preuve 8 : Soit B l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de A.

1. Vect(A) est un sev de E : il est stable par combinaisons linéaires. Par conséquent $B \subset \text{Vect}(A)$.
2. D'autre part, il est immédiat que B est une partie non vide de E stable par CL. C'est donc un sev de E.
3. B est donc un sev de E contenu dans le plus petit sev de E. C'est donc le plus petit sev de E.

Remarque 8. Cette caractérisation de l'espace engendré par $A \subset E$ sera beaucoup plus souvent utilisée que la définition de Vect A.

Remarque 9. $\boxed{\text{Troisième Méthode}}$
Pour montrer qu'un ensemble F est un sev d'un ev E, on pourra parfois envisager de montrer que $F = \text{Vect}(A)$ avec $A \subset E$.
Cette méthode sera particulièrement utile lorsqu'on cherchera à déterminer une base de F.
Montrer ainsi que $\{(x+y, \ -2y, x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 10.

1. Si $x_0 \in E \backslash \{0\}$ alors le sev Vect($\{x_0\}$) (noté aussi Vect(x_0)) est appelé "une droite vectorielle".
2. Si x_0 et x_1 sont deux vecteurs non colinéaires de E, alors le sev Vect($\{x_0, \ x_1\}$) (noté aussi Vect($x_0, \ x_1$)) est appelé "un plan vectoriel".

Droites et plans vectoriels :

`Exemple 6.` (∗) Déterminer l'équation du plan vectoriel engendré de $\mathbb{R}^3$ par les vecteurs $x_0 = (1, \ 2, \ 0)$ et $x_1 = (0, \ -1, 3)$.

Remarque 11. Quelques constatations utiles :

1. Si $A \subset B \in \mathcal{P}(E)$, montrer que Vect($A$) $\subset$ Vect(B).
2. Montrer que si F est un sev de E alors Vect(F) $= F$.
   En déduire que $\text{Vect}\big(\text{Vect}(A)\big) = \text{Vect}(A)$.

Exercice : 5

(∗∗) Dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit pour $n \in \mathbb{N}$ la suite : $e_n = (0, 0, \ \ldots, 0, 1, 0 \ldots)$
Tous les termes de la suite e_n sont nuls sauf le nième qui vaut 1.
Déterminer le sev engendré par la partie $A = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

Définition 4 : **Somme de deux sev**
Soient F_1 et F_2 deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. On appelle *somme* de F_1 et F_2 l'ensemble :

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F_1,\, x_2 \in F_2\}$$

Remarque 12.
1. On peut de la même façon, définir la somme de n sev de E.
2. Si $A,\, B \in \mathcal{P}(E)$, montrer que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Théorème 9 : **Caractérisation de $F_1 + F_2$**

$$F_1 + F_2 = \text{Vect}(F_1 \cup F_2)$$

$F_1 + F_2$ est donc un sev de E

Preuve 9 : On montre simplement que $F_1 + F_2$ est le plus petit sev de E contenant $F_1 \cup F_2$.

Exercice : 6

($*$) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les parties $F = \{(x,\,0,\,0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x,\,x,\,0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que ce sont des sev et déterminer le sous espace $F + G$.

Définition 5 : **Somme directe $F_1 \oplus F_2$**
Soient deux sev F_1, F_2 de l'espace vectoriel E.
le sev $F_1 + F_2$ est noté $F_1 \oplus F_2$ lorsque $\forall x \in F_1 + F_2$, x s'écrit de façon $\boxed{\textit{unique}}$ $x = x_1 + x_2$ avec $\begin{cases} x_1 \in F_1 \\ x_2 \in F_2 \end{cases}$.
Dans ce cas, on dit que "*F_1 et F_2 sont en somme directe*" ou que la somme $F_1 + F_2$ est directe.

Théorème Fondamental 10 : **Caractérisation d'une somme directe**
Soient deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E.
On a la caractérisation suivante d'une somme directe :

On a : $\boxed{\text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe} \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}}$

Preuve 10 :
$\Rightarrow$ Soit $x \in F_1 \cap F_2$. On montre facilement que $x = 0$
$\Leftarrow$ Soit $x \in F_1 + F_2$. Supposons que $\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ x = x_1' + x_2' \end{cases}$. On montre facilement que $x_1 = x_1'$ et que $x_2 = x_2'$.

Remarque 13. En d'autres termes, tout élément de $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Il y a donc 2 façons de prouver que $F_1 \oplus F_2$:
1. Soit on prouve que tout vecteur de $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2
2. Soit on prouve que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

Définition 6 : **Sous-espaces supplémentaires**
On dit que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E si et seulement si :

$$E = F_1 \oplus F_2$$

Cela signifie que tout vecteur de E s'écrit de façon $\boxed{\textbf{unique}}$ sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $\begin{cases} x_1 \in F_1 \\ x_2 \in F_2 \end{cases}$

Pour montrer que $E = F_1 \oplus F_2$:
1. Montrons que $E = F_1 + F_2$.
   Soit $x \in E$. Après une analyse du problème, on détermine x_1 et x_2 tels que $x_1 \in F_1$, $x_2 \in F_2$ et $x = x_1 + x_2$.
2. Souvent, la première étape permet aussi de prouver l'unicité de la décomposition.
   Si ce n'est pas le cas, il faut alors montrer que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$. Soit $x \in F_1 \cap F_2$ ... donc $x = 0_E$.

Remarque 14. Ne pas confondre *supplémentaire* avec *complémentaire* :

1. Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est pas un sev (il ne contient pas le vecteur nul).
2. En général, si F et G sont supplémentaires de E, alors $F \cup G \neq E$.
3. En général, un sev admet une infinité de supplémentaires. Dire ***le*** supplémentaire d'un sev n'a donc pas de sens. On a par exemple : $\mathbb{R}^2 = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{i}) \oplus \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u})$ pour tout $\overrightarrow{u}$ non colinéaire à $\overrightarrow{i}$.

Complémentaire de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{i})$:	Supplémentaires de $\mathrm{Vect}(\overrightarrow{i})$:

Exercice : 7

$(*)$ Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sev : $\begin{cases} F = \mathrm{Vect}\big((1,\ 2,\ -1,\ 0),\ (0,\ 2,\ 0,\ 1)\big) \\ G = \mathrm{Vect}\big((2,\ 0,\ 0,\ 1),\ (1,\ 0,\ 0,\ 1)\big) \end{cases}$

Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice : 8

$(*)$ Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ on considère $\begin{cases} \mathcal{P} \text{ l'ensemble des fonctions paires} \\ \mathcal{I} \text{ l'ensemble des fonctions impaires} \end{cases}$.

Montrer que :

$$E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$$

3 Familles libres, génératrices

DÉFINITION 7 : **Famille de vecteurs**
Une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E est un ensemble $\mathcal{F} = \{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ de vecteurs de E.

Remarque 15. Si l'on souhaite ordonner les vecteurs de la famille, on pourra parler de *système* de vecteurs : $(x_1, \ldots, x_n)$.

DÉFINITION 8 : **Famille libre**
On dit qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{x_1,\ \ldots,\ x_n\}$ est *libre* si et seulement si

$$\forall (\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \boxed{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E \ \Rightarrow\ \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_K}$$

Sinon, on dit que la famille $\mathcal{F}$ est *liée*.

Remarque 16. Une famille de deux vecteurs est libres si et seulement si ils ne sont pas proportionnels.

Pour montrer qu'une famille est libre :

1. Soient $(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_E$
2. Par implications successives, on en déduit que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_K$ et donc que la famille est libre.

`Exemple 7.` $(*)$

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $x_1 = (1,\ 0,\ 2)$, $x_2 = (1,\ 1,\ 1)$ et $x_3 = (0,\ -1,\ 1)$.
   La famille $\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ est-elle libre ?
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $x_1 = (1,\ 0,\ 2)$, $x_2 = (1,\ 1,\ 0)$ et $x_3 = (0,\ 1,\ 1)$.
   La famille $\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ est-elle libre ?

Remarque 17. Exemples de familles non libre :

1. Une famille contenant le vecteur nul n'est pas libre

2. Une famille contenant deux fois le même vecteur n'est pas libre
3. Une famille dont un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs n'est pas libre.

Exercice : 9

($*$) Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on pose pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^k \end{array}$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, la famille $\mathcal{F} = \{f_0, f_1, \dots, f_n\}$ est libre.

Exercice : 10

($**$) Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les fonctions définies par $\forall k \in \mathbb{N}$, $f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(kx) \end{array}$

Soit δ_{pq} le *symbole de Kronecker* défini par : $\delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}$

1. Montrer $\forall (p, q) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(px)\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \delta_{pq}\pi$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^\star$, la famille $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$ est libre.

Proposition 11 : **Caractérisation d'une famille liée**
Soit $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$ une famille de vecteurs de E.
La famille est liés, si et seulement si l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire (CL) des autres vecteurs de la famille :

$$\exists i \in [1, n] \text{ et } \exists (\mu_1, \dots, \mu_{i-1}, \mu_{i+1}, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^{n-1} \text{ tels que } \boxed{x_i = \sum_{\substack{1\leq j\leq n \\ i\neq j}} \mu_j x_j}$$

Preuve 11 :
- $\Rightarrow$ Si $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$ est liée, alors il exite une CL nulle avec au moins un des coefficients non nul ...
- $\Leftarrow$ Si l'un des vecteurs est CL des autres, alors on trouve immédiatement une CL nulle avec les coefficients non tous nuls.

Remarque 18. En particulier, si l'un des vecteurs est nul ou si l'un des vecteurs de la famille apparaît plus d'une fois dans S, alors la famille est liée.

Exercice : 11

($*$) Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on considère les deux fonctions définies par $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$.
Montrer que la famille $\{f, g\}$ est libre.
Les trois fonctions définies par $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2 x$ et $h(x) = \cos 2x$ forment-elles une famille libre ?

Définition 9 : **Familles génératrices**
On dit qu'une famille $\mathcal{F} = \{x_1, \dots, x_n\}$ de vecteurs de E est *génératrice* d'un espace vectoriel E si et seulement si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de la famille :

$$\forall x \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \text{ tels que } x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$$

En d'autres termes : $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de $E \Longleftrightarrow \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = E$.

Pour montrer qu'une famille est génératrice :
1. Soit $x \in E$.
   On fait une analyse de la question : supposons que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ ... Puis :
2. Posons $\lambda_1 = \dots, \lambda_n = \dots$
3. On a bien $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.

`Exemple 8.` ($*$) Montrer que les vecteurs $x_1 = (1, 1)$, $x_2 = (2, 3)$ et $x_3 = (1, 2)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 10 : **Base**
On dit qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ est une *base* de l'espace vectoriel E si et seulement si :
1. la famille $\mathcal{F}$ est libre.
2. la famille $\mathcal{F}$ est génératrice.

THÉORÈME 12 : **Coordonnées d'un vecteur dans une base**
Soit $\mathcal{F} = (e_1, \ldots, e_n)$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E.

$\mathcal{F}$ est une base de $E \iff \forall x \in E$, x s'écrit de façon *unique* comme CL de vecteurs de $\mathcal{F}$.

Les scalaires $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tels que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$ sont appelées les *coordonnées* de x dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$

Preuve 12 : Pas de difficulté !

Remarque 19. Tous les espaces vectoriels n'admettent par forcément des bases. Par exemple : $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ...

Méthode 1 : Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base : (autre méthode vue dans la prochaine leçon)
1. Montrons que $\mathcal{F}$ est libre ...
2. Montrons que $\mathcal{F}$ est génératrice ...

`Exemple 9.`
1. Les vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions $\begin{cases} e_1 & : x \to 1 \\ e_2 & : x \to x \\ e_3 & : x \to x^2 \end{cases}$ forment une base du $\mathbb{R}$-ev des fonctions polynômiales de degré ≤ 2.

DÉFINITION 11 : **Base canonique de $\mathbb{K}^n$**
Les vecteurs suivants forment une base du $\mathbb{K}$-ev $E = \mathbb{K}^n$.

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0) , \ldots , e_n = (0, \ldots, 0, 1)$$

Cette base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Remarque 20.
1. Lorsqu'un espace vectoriel E admet une base évidente, on appellera cette base : *base canonique* de E.
2. Dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, les coordonnées du vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ sont $(x_1, \ldots, x_n)$.
   Attention, cette similitude est souvent source de confusion entre vecteur et coordonnées.

Exercice : 12
(∗)
1. Montrer que la famille formée des vecteurs $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (1, -1, 1)$ et $e_3 = (0, 1, 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $(2, 1 \ -1)$ dans cette base.

4 Applications linéaires

DÉFINITION 12 : **Application linéaire**

Soient E et F **deux espaces vectoriels** sur $\boxed{\text{le } \textit{même} \text{ corps } \mathbb{K}}$ et une application $u : E \mapsto F$.

On dit que l'application u est *linéaire* si et seulement si :
$$\begin{array}{llcl} 1. & \forall (x, y) \in E^2, & u(x+y) & = & u(x) + u(y) \\ 2. & \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, & u(\lambda x) & = & \lambda u(x) \end{array}$$

On note $\begin{cases} \text{L}(E,F) \text{ l'ensemble des applications linéaires de } E \text{ dans } F \\ \text{L}(E) \text{ l'ensemble des applications linéaires de } E \text{ dans } E \end{cases}$.

Remarque 21.
1. On dit aussi qu'une application linéaire est un morphisme d'espaces vectoriels.

2. Remarquons que si u est linéaire, alors $u(0_E) = 0_F$.
   Ainsi, si u vérifie $u(0_E) \neq 0_F$, alors u ne peut pas être linéaire.

Proposition 13 : **Caractérisation des applications linéaires**

$$u \in \mathcal{F}(E,\, F) \text{ est linéaire ssi : } \begin{cases} E \text{ et } F \text{ sont deux ev sur le même corps } \mathbb{K} \\ \forall x,\, y \in E,\ \forall \lambda,\, \mu \in \mathbb{K}, \quad \boxed{u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)} \end{cases}$$

Preuve 13 : Pas de difficulté !

`Exemple 10.` (∗) Les applications entre $\mathbb{R}$-ev suivants sont-elles linéaires?

1. $f \ : \ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x,\, y,\, z) = x + y + 2z$
2. $f \ : \ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x,\, y) = xy$
3. $f \ : \ \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x,\, y) = x + y + 1$
4. $f \ : \ \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ telle que $f(x,\, y,\, z) = (x - z,\, y)$

Exercice : 13

(∗) Montrer que l'application $\begin{array}{cccc} \phi \ : & \mathcal{C}([0{,}1],\, \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 f(x)\, \mathrm{d}x \end{array}$ est linéaire.

Remarque 22. Soit $e = (e_1,\ \ldots,\, e_n)$ une *base* de E.
Si u est linéaire, les images des vecteurs e_i suffisent pour caractériser complètement l'application u.

Exercice : 14

(∗)

1. Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. Pouvez-vous envisager une généralisation?

Théorème 14 : **Image directe, réciproque d'un sev par une application linéaire**

Soit $u \in \mathrm{L}(E,\, F)$ et $\begin{cases} V \text{ un sev de } E \\ W \text{ un sev de } F \end{cases}$. Alors : $\begin{cases} u(V) & \text{est un sev de } F. \\ u^{-1}(W) & \text{est un sev de } E. \end{cases}$

Preuve 14 :

1. On montre que $u^{-1}(W)$ est une partie non vide de E stable par CL.
2. On montre que $u(V)$ est une partie non vide de F stable par CL.

Définition 13 : **Image, noyau d'une application linéaire**
Soit $u \in \mathrm{L}(E,\, F)$. On appelle :

1. *Noyau* de u, l'ensemble : $\ker u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$.
2. *Image* de u, l'ensemble : $\operatorname{Im} u = \{y \in F \mid \exists x \in E,\, y = u(x)\} = u(E)$.

Remarque 23. $\ker u$ est un sev de E et $\operatorname{Im} u$ est un sev de F. $\underset{\ker u}{\underset{\cup}{E}} \xrightarrow{u} \underset{\operatorname{Im} u}{\underset{\cup}{F}}$

Proposition 15 : **Image d'une famille génératrice**
Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est génératrice de E alors $(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$

Remarque 24. $\boxed{\text{Quatrième Méthode}}$
Ainsi, pour prouver qu'un sous ensemble d'un $\mathbb{K}$-ev E est un sev de E, on pourra penser à prouver qu'il s'agit de l'image ou du noyau d'une application linéaire bien choisie.

Exercice : 15

(∗) Montrer que $\{(x,\, y,\, z,\, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

THÉORÈME 16 : **Caractérisation des applications linéaires injectives et surjectives**
Soit une application linéaire $u : E \mapsto F$.

1. L'application u est *injective* ssi $\ker u = \{0_E\}$.
2. L'application u est *surjective* ssi $\operatorname{Im} u = F$.

Preuve 16 : Démonstrations faciles !!

Remarque 25. Que pouvez-vous dire de :
1. L'image d'une famille libre par une application linéaire injective ?
2. L'image d'une famille génératrice par une application linéaire surjective ?

Exercice : 16

($*$) Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\, y,\, z) & \mapsto & (x+y-z,\, x-y+2z) \end{array}$

Est-elle injective ? Surjective ?

Exercice : 17

($*$) Soit le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\, \mathbb{R})$. On considère l'application : $D : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \mapsto & f' \end{array}$
Montrer que l'application D est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

THÉORÈME 17 : **Equation Linéaire :** $u(x) = b$
Soit une application linéaire $u : E \mapsto F$ et un vecteur $b \in F$.
L'équation $u(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ est appelée *équation linéaire.*
On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de cette équation.
Alors :
1. si $b \notin \operatorname{Im} u$, $\mathcal{S}_E = \emptyset$.
2. si $b \in \operatorname{Im} u$, il existe une solution particulière $x_0 \in \mathcal{S}_E$. L'ensemble des solutions s'écrit alors

$$\mathcal{S}_E = \{x_0 + k \ ; \ k \in \ker u\}$$

On dit que c'est le *sous-espace affine* de l'espace vectoriel E de direction $\ker u$ passant par x_0.

Preuve 17 : Cas où $b \in \operatorname{Im} u$: soit x_0 une solution particulière ($u(x_0) = b$).
On a alors : $x \in S_E \iff u(x) = b \iff u(x) = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0_E \iff x - x_0 \in \ker u \dots$

Solutions d'une équation linéaire :	
Espace E	Espace F

`Exemple 11.`
1. Soient u, v, w des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que l'ED : $(E) : y'' + u(x).y' + v(x).y = w(x)$ est une équation linéaire.
   (b) En déduire une méthode de résolution.
2. Montrer que : $(E) : \vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$ où $\vec{a}(1,\, 0,\, 3)$ et $\vec{b}(-3,\, 1{,}1)$ est une équation linéaire.
   Montrer que $\vec{x}_0(1,\, 1,\, 2)$ est une solution particulière, et en déduire l'ensemble des solutions de (E).

Théorème 18 : **La composée d'applications linéaires est une application linéaire**
Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev et $\begin{cases} u \in \mathrm{L}(E, F) \\ v \in \mathrm{L}(F, G) \end{cases}$. Alors : $v \circ u : E \mapsto G$ est une application linéaire.

Preuve 18 : Aucune difficulté !!

Exercice : 18

$(*)$ Soient $(u, v) \in L(\mathbb{R}^2)^2$ définies par : $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (0, x) \end{array}$ *et* $v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (y, 0) \end{array}$

Déterminer $\begin{cases} u \circ v \\ v \circ u \end{cases}$, et vérifier que ces deux applications appartiennent bien à $\mathrm{L}(\mathbb{R}^2)$.

Exercice : 19

$(*)$ Soient $(u, v) \in L(E)^2$ deux applications linéaires vérifiant $u \circ v = 0$. Comparer $\operatorname{Im} v$ et $\ker u$.

Définition 14 : **forme linéaire, endomorphisme, Isomorphisme, automorphisme**
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev.
1. Une *forme linéaire* de E est une application linéaire $u : E \mapsto \mathbb{K}$.
2. Un *endomorphisme* de E est une application linéaire $u : E \mapsto E$.
3. Un *isomorphisme* de E vers F est une application linéaire $u : E \mapsto F$ *bijective.*
3. Un *automorphisme* de E est une application linéaire $u : E \mapsto E$ *bijective.*

Remarque 26.
1. On note $L(E) = L(E, E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
2. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème 19 : **Inverse d'une application linéaire bijective**
Si $u \in L(E, F)$ est un isomorphisme, alors : $u^{-1} : F \mapsto E$ est une application linéaire.

Preuve 19 : La linéarité de u^{-1} se démontre de façon traditionnel et ne pose pas de problème.

`Exemple 12.` $(*)$ Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Déterminer f^{-1}.

Théorème 20 : **$L(E, F)$ est un espace vectoriel**
L'ensemble des applications linéaires d'un $\mathbb{K}$-ev E vers un $\mathbb{K}$-ev F, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire usuelles est un $\mathbb{K}$-ev.

$$\boxed{\big(L(E, F), +, \cdot\big) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-ev}}$$

Preuve 20 : On montre que c'est un sev de l'ev des applications de E dans F (muni de + et .).
1. $L(E, F)$ est une partie non vide de $\mathcal{F}(E, F)$
2. $L(E, F)$ est stable par CL

Remarque 27. Nous avons vu que la somme, la composée et la multiplication d'une application linéaire par un scalaire est une application linéaire. Pensez-vous que le produit de deux applications linéaires soit linéaire ?.

5 L'algèbre des endomorphismes de E

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{K}$-ev.

Définition 15 : **Homothéties vectorielles**

On définit *l'identité* de E par : $\boxed{\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \mapsto & x \end{array}}$

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

On appelle *homothétie vectorielle* de rapport α l'application : $\boxed{\begin{array}{rccc} h_\alpha : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \mapsto & \alpha \cdot x \end{array}}$ $(h_\alpha = \alpha\,\mathrm{id}_E)$

Remarque 28. Les homothéties sont des endomorphismes de E.

Théorème 21 : $\big(L(E),\ +\ ,\ \circ\big)$ est un anneau (non-commutatif).

Preuve 21 :
1. $\big(L(E), +\big)$ est un groupe commutatif comme sous-groupe de $\big(\mathcal{F}(E, E),+\big)$.
2. $L(E)$ est stable par la composition
3. $\circ$ est bien associative
4. $\circ$ admet id_E pour élément neutre dans $L(E)$.
5. On vérifie facilement que $\circ$ est distributive à droite et à gauche sur la loi $+$ (grâce à la linéarité).

Remarque 29. Ayant $\left\{\begin{array}{l} \big(L(E),\ +\ ,\ \circ\big) \text{ un anneau} \\ \big(L(E),\ +\ ,\ .\big) \text{ un } \mathbb{K}\text{-ev} \\ (\lambda \cdot u)\circ v = u \circ (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (u \circ v) \end{array}\right.$, on dit que $\big(L(E),+,\circ,.\big)$ est une $\mathbb{K}$-*algèbre* $\left\{\begin{array}{l} \textit{associative} \\ \textit{unitaire} \end{array}\right.$.

Exercice : 20

$(*)$ Soit $f,\, g \in \mathcal{L}(E)$. Comparer :

1. $\ker f \cap \ker g$ et $\ker(f+g)$
2. $\mathrm{Im}\, f + \mathrm{Im}\, g$ et $\mathrm{Im}(f+g)$
3. $\ker f$ et $\ker f^2$
4. $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f^2$

Remarque 30. **Notation :** Dans l'anneau $\big(L(E),\ +\ ,\ \circ\big)$, on notera : $u^n = u \circ u \circ \cdots \circ u$.

Proposition 22 : **Formules**

Soient $u,\, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\boxed{u \circ v = v \circ u}$ (on notera $\left\{\begin{array}{l} uv = u \circ v \\ u^k = u \circ \cdots \circ u \end{array}\right.$).

On dispose alors des formules suivantes :

1) **Binôme :** $(u+v)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}$

2) **Factorisation :** $u^n - v^n = (u-v)\circ(u^{n-1} + u^{n-2}\circ v + \cdots + u \circ v^{n-2} + v^{n-1})$

3) **Cas particulier :** $\mathrm{id} - u^n = (\mathrm{id} - u)\circ(\mathrm{id} + u + u^2 + \cdots + u^{n-1})$

Preuve 22 : Ces formules sont vérifiées dans tout anneau.

`Exemple 13.` $(*)$ Soit un $\mathbb{K}$-ev E et deux endomorphismes $u,\, v \in L(E)$.
1. Développer $(u+v)^2$.
2. Développer $(\mathrm{id} - u)\circ(\mathrm{id} + u)$.
3. Si $u^2 = 0$, montrer que $(\mathrm{id} - u)$ est bijective.

Exercice : 21

$(*)$ On considère les deux endomorphismes de $E = \mathbb{R}^2$ suivants :

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,\, y) & \mapsto & (y,\, 0) \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{rccc} v : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,\, y) & \mapsto & (0,\, y) \end{array}$$

1. Calculer $u \circ v$, $v \circ u$, u^2 et v^2. Conclusion ?
2. Montrer que l'endomorphisme $(\mathrm{id} - u)$ est inversible et déterminer son inverse.

Théorème 23 : **Groupe linéaire**
$(\mathrm{GL}(E),\circ)$ est un groupe (non-commutatif) d'élément neutre id_E. On l'appelle : le *Groupe Linéaire*.

Preuve 23 : c'est une partie non vide du groupe des applications bijectives de E dans E (muni de la composition) qui est stable par composition et par symétrisation. C'est donc un sous-groupe de ce groupe.

Remarque 31. Contrairement à $(L(E),\ +\ ,\ .)$ $(\mathrm{GL}(E),\ +\ ,\ .)$ n'est pas un espace vectoriel.
On vérifie en effet que $\mathrm{GL}(E)$ n'est ni stable par la lce (prendre $\lambda = 0$), ni par $+$ (prendre $u(x) = x$ et $v(x) = -x$).

Exercice : 22
(∗∗) Soit un $\mathbb{R}$-ev E et un endomorphisme $u \in L(E)$ vérifiant : $u^3 + u^2 + 2\,\mathrm{id}_E = 0$

1. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$ et déterminer son inverse u^{-1}.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda^3 + \lambda^2 + 2 \neq 0$ est une CS sur le scalaire λ pour que $(u - \lambda\,\mathrm{id})$ soit inversible.

6 Projecteurs et Symétries

Définition 16 : **Projecteur vectoriel**
Soient F et G deux sev de E supplémentaires : $E = F \oplus G$.
$\forall x \in E$, il existe donc une unique décomposition $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

On peut alors définir : $\boxed{\begin{array}{rccc} p : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \mapsto & x_1 \end{array}}$ appelé le *projecteur sur F parallèlement à G.*

Dessin

Théorème 24 : **Caractérisation des sev associés**
Si p est le projecteur vectoriel sur F par rapport à G, alors : $\left\{\begin{array}{l} F = \mathrm{Im}\,p \\ G = \ker p \end{array}\right.$

Preuve 24 : Pas de difficulté par double inclusion.

Remarque 32. On a alors :
1. $E = \mathrm{Im}\,p \oplus \ker p$ (Im p et ker p sont supplémentaires)
2. $F = \mathrm{Im}\,p$ est aussi l'ensemble des vecteurs invariants : $F = \ker(\mathrm{id}_E - p)$
3. $\forall x \in E$, x se décompose selon $F + G$ de la façon suivante : $x = \underbrace{p(x)}_{\in \mathrm{Im}\,p} + \big[\underbrace{x - p(x)}_{\in \ker p}\big]$

Théorème Fondamental 25 : **Caractérisation des projecteurs**
Soit $p \in \mathcal{F}(E, E)$.

p est un *projecteur* de E $\iff$ $\left\{\begin{array}{l} p \in L(E) \\ p \circ p = p \end{array}\right.$

Preuve 25 :

$\Rightarrow$ Aucune difficulté !

$\Leftarrow$ Soit $p \in L(E)$ vérifiant $p \circ p = p$. Considérons les sev : $\begin{cases} F = \operatorname{Im} p \\ G = \ker p \end{cases}$ et montrons que :

(a) $F \oplus G = E$. On remarquera que $x = p(x) + (x - p(x))$.

(b) p est le projecteur sur F parallèlement à G. Immédiat !

Exercice : 23

$(*)$ Soit un projecteur p d'un espace vectoriel E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit l'endomorphisme $u = p + \lambda \operatorname{id}_E$. Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^n à l'aide de p et de id_E.

Exercice : 24

$(**)$ On considère un projecteur p d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$. Soit un vecteur $b \in E$. Montrer que l'équation vectorielle

$$(E) \quad p(x) - \lambda x = b$$

possède une unique solution $x \in E$.

Proposition 26 : **Projecteur associé**

Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est la projection $\begin{cases} \text{sur } F \\ //^t \text{ à } G \end{cases}$ alors $\boxed{q = \operatorname{id}_E - p}$ est la projection $\begin{cases} \text{sur } G \\ //^t \text{ à } F \end{cases}$.

Preuve 26 : Immédiat !

Remarque 33. q est appelé le *projecteur associé* à p et on a ainsi : $\begin{cases} \ker(\operatorname{id}_E - p) = \operatorname{Im} p \\ \operatorname{Im}(\operatorname{id}_E - p) = \ker p \end{cases}$.

Recherche pratique de l'image d'un vecteur par un projecteur

Soit p le projecteur sur le sous-espace F parallèlement au sous-espace G.
Soit $x \in E$. Pour trouver $p(x)$, il suffit de :

1. Première méthode :

   On recherche $\begin{cases} x_F \in F \\ x_G \in G \end{cases}$ tels que $x = x_F + x_G$. On a alors : $\boxed{p(x) = x_F}$

2. Deuxième méthode :
   On constate que $p(x)$ est le vecteur de E tel que $\begin{cases} p(x) \in F \\ x - p(x) \in G \end{cases}$

`Exemple 14.` $(*)$ Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces $\begin{cases} E_1 = \operatorname{Vect}(1, 1, 1) \\ E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \end{cases}$.
Déterminer l'expression analytique du projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.

Exercice : 25

$(**)$ Soient deux projecteurs p et q d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que l'endomorphisme $(p + q)$ est un projecteur de E si et seulement si l'on a $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Si c'est le cas, montrer qu'alors $\begin{cases} \operatorname{Im}(p + q) = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Im} q \\ \ker(p + q) = \ker p \cap \ker q \end{cases}$.

Définition 17 : **Symétrie vectorielle**

Soient F et G, deux sev supplémentaires de E.
Soit p la projection sur F parallèlement à G
On appelle, s la symétrie par rapport à F parallèlement à G, l'endomorphisme définit par la relation :

$$s = 2p - id_E$$

p est appelé le *projecteur associé* à s.

Dessin

Remarque 34. On pourra utiliser cette définition pour déterminer l'expression analytique d'une symétrie vectorielle.

`Exemple 15.` (∗) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport au sous-espace E_1 parallèlement au sous-espace E_2 où :

$$E_1 = \text{Vect}\big((1,\,0,\,0),(1,\,1,\,1)\big) \text{ et } E_2 = \text{Vect}(1,\,2,\,0)$$

Théorème 27 : **Caractérisation des sev associés**
Soit la symétrie vectorielle s par rapport à F parallèlement à G.
On a alors $\begin{cases} F = \ker(s - \text{id}_E) & \text{(sev des vecteurs invariants)} \\ G = \ker(s + \text{id}_E) & \text{(sev des vecteurs transformés en leur opposé)} \end{cases}$

Preuve 27 : Soit p le projecteur associé à s : $s = 2p - Id_E$. On utilise le fait que $F = \ker(p - \text{id}_E)$ et $G = \ker p$

Remarque 35. Si s est une symétrie vectorielle, on a alors : $\ker(s - \text{id}) \oplus \ker(s + \text{id}_E) = E$

Théorème Fondamental 28 : **Caractérisation des symétries vectorielles**
Soit un endomorphisme $s \in \mathcal{F}(E,\,E)$.

$$s \text{ est une } \textit{symétrie vectorielle} \iff \begin{cases} x \in L(E) \\ s \circ s = \text{id}_E \end{cases}$$

Preuve 28 :
⇒ Evident !
⇐ Soit $s \in L(E)$ tel que $s \circ s = \text{id}_E$. Soit $p = \dfrac{1}{2}(s + \text{id}_E)$.
On montre très facilement que p est un projecteur en prouvant que $p \circ p = p$. CQFD ...

7 Formes linéaires

Définition 18 : **Formes linéaires, dual**
Soit un $\mathbb{K}$-ev E. On appelle *forme linéaire* sur E, une application linéaire $\phi : E \mapsto \mathbb{K}$.
On note $E^\star = L(E,\,\mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

`Exemple 16.` (∗) Montrer que les applications suivantes sont des formes linéaires :

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0;1],\,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\,y,\,z) & \mapsto & 2x - y + 3z \end{array}$

Remarque 36. $E^\star$ s'appelle l'espace *dual* de l'espace E.

DÉFINITION 19 : Hyperplan
On appelle *hyperplan* de E, le noyau d'une forme linéaire $\boxed{\text{non-nulle}}$: $\boxed{H = \ker \phi}$

Remarque 37. Un hyperplan de E est donc un sev de E.

`Exemple 17.` $(*)$

1. Donner les hyperplans associés aux deux formes linéaires précédentes.
2. Quels-sont les hyperplans de $\mathbb{R}^3$?

THÉORÈME 29 : Caractérisation des hyperplans
Soit H un sev d'un $\mathbb{K}$-ev E tel que $H \neq E$.

$$H \text{ est un hyperplan} \iff \exists a \in E \text{ non nul tel que } H \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$$

Preuve 29 : Les deux implications se traitent par analyse/synthèse.

$\Rightarrow$ Analyse : Soit H un hyperplan, ϕ sa forme linéaire associée et $a \in E$ tel que $H \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$.
On montre alors facilement que $\phi(a) \neq 0$.
Synthèse : Montrons que si a est tel que $\phi(a) \neq 0$, alors $H \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$

(a) On montre très facilement que : $H \cap \operatorname{Vect}(a) = 0_E$

(b) Pour montrer que $H + \operatorname{Vect}(a) = E$, on commence par faire une analyse ...

$\Leftarrow$ Soit $a \in E$ non nul tel que $H \oplus \operatorname{Vect}(a) = E$.
Analyse : Supposons que $H = \ker \phi$ avec $\phi \neq 0$.
En notant $x = x_H + \lambda_x a$, on montre facilement que $\phi(x) = \lambda_x \phi(a)$.
Synthèse : Soit $\phi \ : \ x \mapsto \lambda_x$.
On montre alors facilement que ϕ est une forme linéaire non nulle et que $H = \ker \phi$.

Remarque 38. IMPORTANT : si H est un hyperplan , alors on a $\forall a \in E \setminus H, \quad E = H \oplus \operatorname{Vect}(a)$

Dessin

Supplémentaire d'un hyperplan

Exercice : 26

$(*)$ Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z = t\}$.

Exercice : 27

$(**)$ Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et l'application $\delta \ : \ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}$
Vérifier que δ est une forme linéaire sur E et déterminer un supplémentaire de $H = \ker \delta$.

THÉORÈME 30 : Deux formes linéaires sont proportionnelles ssi elles ont même noyau
Soient ϕ et ψ deux formes linéaires $\boxed{\text{non-nulles}}$ sur E.
Alors le système (ϕ, ψ) est lié dans $E^\star$ si et seulement si $\ker \phi = \ker \psi$.

Preuve 30 :

$\Rightarrow$ Evident !

$\Leftarrow$ Soit $a \in E$ tel que $\phi(a) \neq 0$ (et donc $\psi(a) \neq 0$).
On a $E = \ker \phi \oplus \text{Vect}(a)$, donc pour tout $x \in E$, il existe $y \in \ker \phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que : $x = y + \lambda.a$.
On a alors $\left\{ \begin{array}{l} \phi(x) = \lambda.\phi(a) \\ \psi(x) = \lambda\psi(a) \end{array} \right.$. D'où le résultat ...

Remarque 39. Ce théorème signifie en particulier que les formes linéaires qui définissent un même hyperplan sont proportionnelles.