Courbes Paramétrées et Courbes en Polaires

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

18 novembre 2010

Dans ce chapitre, on se place dans le plan affine et vectoriel euclidiens usuels orientés (c'est à dire muni d'un rond et du produit scalaire usuel).
On confond ces plans avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.

1 Fonctions à valeurs dans R^2

Soit une application $\overrightarrow{F} : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (x(t),\, y(t)) \end{array}$ où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

Remarque 1.

1. Les applications $\left\{ \begin{array}{l} t \to x(t) \\ t \to y(t) \end{array} \right.$ sont appelées les *applications coordonnées* de $\overrightarrow{F}$.
2. L'application $\overrightarrow{F}$ étant à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on dit qu'il s'agit d'une *application vectorielle*.

Définition 1 : **Limite d'une application vectorielle**
Soit $\overrightarrow{l} \in \mathbb{R}^2$.
On dira que : $\lim\limits_{t \to t_0} \overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{l}$ lorsque $\lim\limits_{t \to t_0} \|\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{l}\| = 0$

Proposition 1 : **Caractérisation par les applications coordonnées**
Notons $\overrightarrow{l} = (l_1, l_2)$. Alors :

$$\lim_{t \to t_0} \overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{l} \iff \left\{ \begin{array}{l} x(t) \to l_1 \\ y(t) \to l_2 \end{array} \right. \text{lorsque } t \to t_0$$

Preuve 1 : Pas de difficulté en démontrant tour à tour les deux implications.

`Exemple 1.` Déterminer la limite en $t_0 = 1$ de $\overrightarrow{F} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & (t^2 - 2,\ \arctan t) \end{array}$

Définition 2 : **Dérivée d'une application vectorielle**
On dira qu'une fonction vectorielle $\overrightarrow{F} : I \to \mathbb{R}^2$ est dérivable en $t_0 \in I$ lorsque qu'il existe $\overrightarrow{l} \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)}{t - t_0} = \overrightarrow{l}$$

On note alors $\overrightarrow{l} = \overrightarrow{F}'(t_0)$.

Proposition 2 : **Caractérisation par les applications coordonnées**
L'application $\overrightarrow{F}\ :\ I \to \mathbb{R}^2$ est dérivable en $t_0 \in I$ ssi ses deux applications coordonnées x et y le sont.
On a alors : $\overrightarrow{F}'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.

Preuve 2 : Conséquence immédiate du théorème précédent.

Remarque 2. Dans les cas où $\begin{cases} \overrightarrow{F}\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^2 \\ f\ :\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \end{cases}$ sont dérivables, on peut facilement démontrer les formules suivantes :

1. $(f.\overrightarrow{F})' = f'.\overrightarrow{F} + f.\overrightarrow{F}'$
2. $(\overrightarrow{F} \circ f)' = \overrightarrow{F}' \circ f.f'$

Théorème 3 : **Dérivation d'un produit scalaire et d'un déterminant**
Soient $\begin{cases} \overrightarrow{F}_1 \\ \overrightarrow{F}_2 \end{cases}$ deux applications vectorielles définies sur I et d'applications coordonnées $\begin{cases} \overrightarrow{F}_1(x_1, y_1) \\ \overrightarrow{F}_2(x_2, y_2) \end{cases}$.
On définit alors sur I les deux applications suivantes à valeurs réelles :

1. Application *Produit Scalaire* : $\phi(t) = \overrightarrow{F}_1(t).\overrightarrow{F}_2(t) = x_1(t)x_2(t) + y_1(t)y_2(t)$
2. Application *Déterminant* : $\psi(t) = \det(\overrightarrow{F}_1(t), \overrightarrow{F}_2(t)) = x_1(t)y_2(t) - x_2(t)y_1(t)$

Lorsque $\overrightarrow{F}_1$ et $\overrightarrow{F}_2$ sont dérivables sur I, ces deux applications le sont aussi et pour tout $t \in I$:

1. $\phi'(t) = \overrightarrow{F}'_1(t).\overrightarrow{F}_2(t) + \overrightarrow{F}_1(t).\overrightarrow{F}'_2(t)$
2. $\psi'(t) = \det(\overrightarrow{F}'_1(t), \overrightarrow{F}_2(t)) + \det(\overrightarrow{F}_1(t), \overrightarrow{F}'_2(t))$

Preuve 3 : Il suffit d'effectuer les calculs.

Remarque 3. On retrouve facilement ces formules par analogie avec la formule de dérivation d'un produit de fonctions.

Théorème 4 : **Dérivation de la norme**
Soit $\overrightarrow{F}$ une application vectorielle définie sur I et ne s'annulant pas sur cet intervalle.

On définit alors l'application *Norme* : $\|\overrightarrow{F}\|\ :\ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \|\overrightarrow{F}(t)\| \end{array}$.

Lorsque $\begin{cases} \overrightarrow{F} \text{ est dérivable sur } I \\ \overrightarrow{F} \text{ ne s'annule pas sur } I \end{cases}$, sa norme est dérivable sur I et : $\boxed{\|\overrightarrow{F}\|'(t) = \dfrac{\overrightarrow{F}(t).\overrightarrow{F}'(t)}{\|\overrightarrow{F}(t)\|}}$ $\forall t \in I$.

Preuve 4 : On utilise la formule de dérivation du produit scalaire.

Remarque 4. Une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^1$ est de norme constante sur I ssi $\overrightarrow{F}(t) \perp \overrightarrow{F}'(t)$ sur I.

`Exemple 2.` Choisir 2 applications vectorielles dérivables sur un intervalle I et déterminer les expressions analytiques des applications *Produit scalaire*, *Déterminant* et *Norme*.

2 Courbes paramétrées

Dans ce chapitre, le plan euclidien est muni d'un repère orthonormé orienté $\mathcal{R}(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $\overrightarrow{F}$ représente une application vectorielle dérivable sur un intervalle ouvert I.

Définition 3 : **Courbe paramétrée**
Soit $\mathcal{C}$, l'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{OM(t)} = \overrightarrow{F}(t)$ avec $t \in I$.
$\mathcal{C}$ est un ensemble du plan dont $(I, \overrightarrow{F})$ est appelé une *représentation paramétrique* (RP).
Le couple $(I, \overrightarrow{F})$ sera aussi appelé *courbe paramétrée* et $\mathcal{C}$ sera appelé le *support* de la courbe.
Lorsque :
- $\overrightarrow{F}$ est de la forme $\overrightarrow{F}(t) = x(t)\overrightarrow{i} + y(t)\overrightarrow{j}$ on dit que $(I, \overrightarrow{F})$ est une RP en coordonnées cartésiennes.
- $\overrightarrow{F}$ est de la forme $\overrightarrow{F}(t) = \rho(t)\overrightarrow{u}(\theta(t))$ on dit que $(I, \overrightarrow{F})$ est une RP en coordonnées polaires.

Courbe paramétrée :

Remarque 5.

1. Lorsque $\overrightarrow{F}(t) = (x(t), y(t))$, on pourra caractériser $\mathcal{C}$ par ses équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right.$ pour $t \in I$.
2. Un même support peut admettre plusieurs représentations paramétriques. Comparer $\left\{\begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ y = 1 \end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l} x = |t| \\ y = 1 \end{array}\right.$.
   En revanche, la façon dont $M(t)$ décrit le support (trajet, vitesse) est très différente.

Comparaison de deux représentations paramétriques

`Exemple 3.` Une ellipse $\mathcal{E}$ centrée en O admet une équation cartésienne de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ avec $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$.
Déterminer une représentation paramétrique de $\mathcal{E}$.

`Exemple 4.`
Déterminer l'équation cartésienne d'une courbe $\mathcal{C}$ contenant le support Γ de la courbe : $\left\{\begin{array}{l} x(t) = 3t^2 \\ y(t) = 2t^3 \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$.
A-t-on $\mathcal{C} = \Gamma$?

2.1 cinématique

Remarque 6. **Interprétation Cinématique**

1. $\overrightarrow{F}(t)$ détermine la position du mobile M au temps t.
2. $\overrightarrow{F}'(t)$ détermine la vitesse instantanée du mobile M au temps t.
3. $\overrightarrow{F}''(t)$ détermine l'accélération du mobile M au temps t.
4. On dit que le mouvement est *uniforme* (à vitesse constante) lorsque $||\overrightarrow{F}'(t)||$ est une fonction constante.
5. On dit que le mouvement est *rectiligne* lorsque le support de la courbe $(I, \overrightarrow{F})$ est contenu dans une droite.
6. On dit que le mouvement est à *accélération centrale* lorsque $\forall t \in I$, $\overrightarrow{F}''(t) \; // \; \overrightarrow{F}(t)$.
7. On dit que le mouvement est *uniformément accéléré* lorsque $||\overrightarrow{F}''(t)||$ est une fonction constante.

`Exemple 5.` Soit un point $M(t)$ parcourant une ellipse selon la représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{array}\right.$ $t \in [0, 2\pi]$.
Montrer que le mouvement de $M(t)$ est à accélération centrale.

Exercice : 1

On suppose que le mouvement d'un point M est à accélération centrale.

1. Montrer que l'application $t \mapsto \det(\overrightarrow{OM}(t), \overrightarrow{v}(t))$ est constante.
2. Montrer que si de plus, le mouvement est circulaire, alors il est uniforme.

2.2 tangente

Définition 4 : Point régulier, birégulier, stationnaire
Supposons ici que $\overrightarrow{F}$ est dérivable ou deux fois dérivable sur I.

- Le point $M(t)$ de la courbe est dit *régulier* lorsque $\overrightarrow{F}'(t) \neq \overrightarrow{0}$.
- Le point $M(t)$ de la courbe est dit *point stationnaire* ou *singulier* si $\overrightarrow{F}'(t) = \overrightarrow{0}$.
- Le point M est dit *birégulier* lorsque $\det(\overrightarrow{F}'(t), \overrightarrow{F}''(t)) \neq 0$.

Remarque 7. Un point birégulier est un point régulier qui vérifie une condition supplémentaire.

`Exemple 6.` Etudier la nature des points d'une ellipse de représentation paramétrique $\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$.

Exercice : 2
Déterminer les points stationnaires de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = t^3 - 3t \\ y(t) = t^3 - t^2 - t + 1 \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Définition 5 : Tangente en un point d'une courbe paramétrée
Soit $M(t_0)$ un point d'une courbe paramétrée $(I, \overrightarrow{F})$.
On dit que la courbe possède une tangente au point $M(t_0)$ lorsqu'il existe une fonction vectorielle $t \mapsto \overrightarrow{u}(t)$ telle que $\overrightarrow{u}(t)$ dirige la droite $\big(M(t_0)M(t)\big)$ au voisinage de t_0 et :

$$\overrightarrow{u}(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \overrightarrow{u_0} \neq \overrightarrow{0}$$

La droite passant par $M(t_0)$ et dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u_0}$ est alors la tangente à la courbe au point $M(t_0)$.

Dessin

Tangente à une courbe paramétrée :

Théorème 5 : Tangente en un point régulier
Si $M(t_0)$ est un point régulier d'une courbe de classe $\mathcal{C}^1$, alors le support de la courbe possède une tangente au point $M(t_0)$ dirigée par le vecteur $\overrightarrow{F}'(t_0)$.

Preuve 5 : On montre qu'un vecteur directeur de la droite $(M(t)M(t_0))$ tend vers $\overrightarrow{F}'(t_0)$ lorsque $t \mapsto t_0$.

Remarque 8. Connaissant un point et un vecteur directeur, il est alors facile de déterminer une équation cartésienne de la tangente en un point régulier.

`Exemple 7.`
Donner une équation cartésienne de la tangente à une ellipse $\mathcal{E}$ centrée en O en un point quelconque de celle-ci.

Remarque 9. Une courbe paramétrée peut admettre une tangente en un point stationnaire. Ex : $\mathcal{C}\begin{cases} x = t^3 \\ y = t^3 \end{cases}$.

Remarque 10. **Tangente en un point stationnaire**
L'étude des tangentes en un point stationnaire sera vu dans le cours sur les développements limités.
Cependant, on pourra d'ores et déjà utiliser le résultat suivant :

Si en un point singulier $M(t_0)$, $\begin{cases} \dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)} \xrightarrow[t\to t_0]{} l \in \overline{\mathbb{R}} \\ \boxed{\textbf{ou}} \\ \dfrac{y'(t)}{x'(t)} \xrightarrow[t\to t_0]{} l \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$ alors la courbe a une tangente en $M(t_0)$ de pente l.

2.3 Intersection

Intersection de deux courbes paramétrées
Comme pour l'intersection de droites et plan de l'espace, il est préférable de représenter l'un des deux ensembles par son équation cartésienne et l'autre par un système d'équations paramétriques.

Si cependant, nous disposons de deux représentations paramétriques $(\overrightarrow{F},\ I)$ et $(\overrightarrow{G},\ J)$, on pourra rechercher $\begin{cases} t \in I \\ t' \in J \end{cases}$ tels que $\overrightarrow{F}(t) = \overrightarrow{G}(t')$.

`Exemple 8.` Intersection des deux courbes paramétrées suivantes : $\Gamma_1 \begin{cases} x = 2pt^2 \\ y = 2pt \end{cases}$ et $\Gamma_2 \begin{cases} x = 2pt \\ y = 2pt^2 \end{cases}$ où $p \in \mathbb{R}^{+*}$.

2.4 Branches infinies

Définition 6 : **Etude des branches infinies**
Soit $t_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ (cela signifie que t_0 peut aussi prendre $+\infty$ et $-\infty$ pour valeur).
On dit que la courbe présente une *branche infinie* lorsque $t \to t_0$ si et seulement si $\|\overrightarrow{F}(t)\| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$.

Définition 7 : **Droite asymptote**
On dit que $\mathcal{C}$ de RP $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ admet la droite $\mathcal{D}\ :\ ax + by + c = 0$ pour asymptote lorsque $t \to t_0$ lorsque :

$\boxed{d(M(t),\ \mathcal{D}) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0}$ ce qui est équivalent à dire que $\boxed{ax(t) + by(t) + c \xrightarrow[t\to t_0]{} 0}$

Remarque 11. Vous remarquerez que la définition d'une droite asymptote est ici légèrement différente de la définition utilisée dans l'étude des courbes cartésiennes.

On s'intéresse plus particulièrement aux cas suivants :

$\boxed{\text{Si} \begin{cases} x(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} l \in \mathbb{R} \\ y(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \infty \end{cases}}$ la droite $x = l$ est asymptote à la courbe. Le signe de $x(t)-l$ (voir le tableau de variations) donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote.	

<table>
<tr><td>$\boxed{\text{Si } \begin{cases} y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l \in \mathbb{R} \\ x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty \end{cases}}$

la droite $y = l$ est asymptote à la courbe.

Le signe de $y(t) - l$ (voir le tableau de variations) donne la position de la courbe par rapport à l'asymptote.</td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">$\boxed{\text{Si } \begin{cases} x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty \\ y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty \end{cases}}$ on forme $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ et on cherche la limite de ce quotient lorsque $t \to t_0$.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} a \in \mathbb{R}$

On dit que la courbe admet la droite $y = ax$ pour direction asymptotique.

On s'intéresse alors à $y(t) - ax(t)$.</td><td>Si $y(t) - ax(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} b \in \mathbb{R}$, alors la droite $y = ax + b$ est asymptote à la courbe lorsque $t \to t_0$.

La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $y(t) - (ax(t) + b)$</td><td></td></tr>
<tr><td>Si $y(t) - ax(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty$
On dira alors que la courbe admet une branche parabolique de direction $y = ax$ lorsque $t \to t_0$.</td><td></td></tr>
<tr><td>Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} \infty$

On dit que la courbe présente une branche parabolique de direction (Oy).</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$

On dit que la courbe présente une branche parabolique de direction (Ox).</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

`Exemple 9.` Etudier les branches infinies de la courbe définie sur I (à déterminer) par $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t^3}{t^2 - 9} \\ y(t) = \dfrac{t^2 - 2t}{t - 3} \end{cases}$

2.5 Points multiples

DÉFINITION 8 : **Points multiples**
Soit $\mathcal{C}$ une courbe de représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{l} x = x(t) \\ y = y(t) \end{array}\right.$ avec $t \in I$.
On dit que $A \in \mathcal{P}$ est un point multiple de $\mathcal{C}$ lorsqu'il existe au moins deux valeurs t_1 et t_2 de I telles que :

$$A = M(t_1) = M(t_2)$$

Recherche des points multiples :
Il s'agit de déterminer t_1 et t_2 (avec $t_1 \neq t_2$) tels que $M(t_1) = M(t_2)$.
Pour cela, il suffit de résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{l} x(t_1) = x(t_2) \\ y(t_1) = y(t_2) \end{array}\right. \quad \text{avec} \quad t_1 \neq t_2$$

Remarque 12. Pour limiter les calculs, on pourra remarquer $t_2 = t_1$ est une solution particulière (non admissible !) de chaque équation. On pourra donc souvent simplifier chacune de ces équations par $(t_1 - t_2)$.

`Exemple 10.` Déterminer les points multiples de la courbe d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{l} x = t^2 - t + 1 \\ y = \dfrac{t^2 + t + 2}{t^2 + 1} \end{array}\right.$ pour $t \in \mathbb{R}$.

2.6 Etude d'une courbe paramétrée

2.6.1 Réduction de l'intervalle d'étude

On réduira toujours l'intervalle en effectuant l'étude dans l'ordre suivant :

a. Etude de la périodicité : $\left\{\begin{array}{l} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{array}\right.$

b. Etude de la parité : $\left\{\begin{array}{l} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{array}\right.$ ...

c. Autres études : $\left\{\begin{array}{l} x(a-t) = y(t) \\ y(a-t) = x(t) \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x(t+T) = -x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} x(1/t) = -x(t) \\ y(1/t) = -y(t) \end{array}\right.$ ...

Lorsque $\left\{\begin{array}{l} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{array}\right.$:	Lorsque $\left\{\begin{array}{l} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{array}\right.$:	Lorsque $\left\{\begin{array}{l} x(a-t) = y(t) \\ y(a-t) = x(t) \end{array}\right.$:

`Exemple 11.` Une situation classique :

1. On constate que $\left\{\begin{array}{l} x(t+T) = x(t) \\ y(t+T) = y(t) \end{array}\right.$. On obtient alors la totalité de la courbe en l'étudiant sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.
2. On constate que $\left\{\begin{array}{l} x(-t) = x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{array}\right.$. On peut alors réduire l'étude à l'intervalle $[0, \frac{T}{2}]$.
   On obtient alors la courbe sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$ en effectuant une symétrie orthogonale d'axe O_x.
3. Pour espérer réduire encore l'intervalle, on peut alors étudier le point $M(\frac{T}{2} - t)$.

Si par exemple $\begin{cases} x(\frac{T}{2}-t) = y(t) \\ \\ y(\frac{T}{2}-t) = x(t) \end{cases}$, on pourra réduire l'étude à l'intervalle $[0, \frac{T}{4}]$.

On obtient la courbe sur $[0, \frac{T}{2}]$ en effectuant une symétrie orthogonale d'axe $y = x$.

`Exemple 12.` Réduire l'intervalle d'étude de l'*astroïde* : $\begin{cases} x(t) = a\cos^3 t \\ y(t) = a\sin^3 t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

2.6.2 Plan d'étude d'une courbe paramétrée

Objectif : Déterminer une représentation graphique du support d'une courbe de RP $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ avec $t \in I$.

Plan d'étude d'une courbe paramétrée

1. Domaine de définition de $x(t)$ et $y(t)$. (Détermination de I)
2. Réduction de l'intervalle d'étude.
3. Variations de $x(t)$ et $y(t)$ sur l'intervalle réduit. On rassemble les résultats dans un même tableau.
4. On repère dans le tableau :
   (a) les points stationnaires correspondant à $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$
   (b) les branches infinies (lorsque l'une des fonctions x ou y a une limite infinie).
5. Etude des branches infinies.
6. Tracé de la courbe :
   On commence par représenter les asymptotes, les points stationnaires, les points à tangente verticale et horizontale et on ébauche le tracé de la courbe.

Maple
```
> plot([x(t),y(t),t=-5..5],-10..10,-10..10);
```

Pour vérifier que vous connaissez bien votre cours, prenez une feuille et notez-y de mémoire les méthodes et formules permettant de résoudre chacune des étapes précédentes. Si vous avez encore des hésitations, il vous faut impérativement revoir le cours !!

`Exemple 13.` Déterminer le support de la courbe d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = t^2 - t + 1 \\ y = \dfrac{t^2+t+2}{t^2+1} \end{cases}$ pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice : 3

1. Finir l'étude de l'astroïde.
2. Soit $A(t)$ et $B(t)$ les points d'intersection de O_x et O_y avec la tangente à la courbe au point $M(t)$ où $t \neq 0[\pi/2]$. Calculer la distance $A(t)B(t)$.

Exercice : 4

Une roue de rayon R roule sans glisser sur une route.

Déterminer un système d'équations paramétriques de la trajectoire d'un point de sa circonférence, puis tracer le support de la courbe obtenue. Cette courbe s'appelle une *cycloïde*

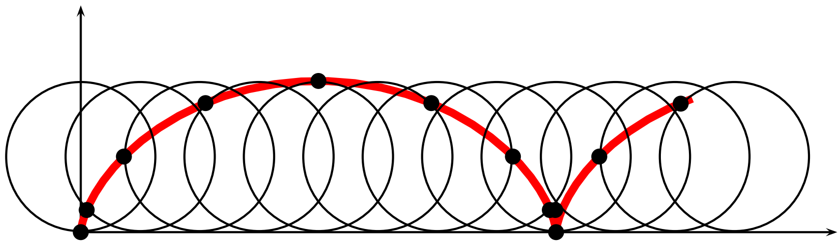

FIG. 1 – *Cycloïde*

3 Courbes paramétrées en coordonnées polaires

DÉFINITION 9 : **Repère polaire**

On définit $\begin{cases} \vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \\ \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} \end{cases}$ et on remarque que $\begin{cases} \dfrac{d\vec{u}}{d\theta} = \vec{v} \\ \dfrac{d\vec{v}}{d\theta} = -\vec{u} \end{cases}$.

Le repère $\mathcal{R}_\theta = \big(O,\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta)\big)$ s'appelle le *repère polaire* ou parfois le repère *mobile*.

Remarque 13. En physique, on utilise la notation $(\vec{u}_r,\ \vec{u}_\theta)$ pour le repère polaire ...
Attention, cette notation semble indiquer que $\vec{u}_r$ est indépendant de l'angle θ, ce qui est bien entendu faux !

Dessin

Repère polaire : $\mathcal{R}_\theta(O,\ \vec{u}(\theta),\ \vec{v}(\theta))$

Remarque 14. Dériver les vecteurs du repère polaire revient à effectuer une rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

DÉFINITION 10 : **Représentation Paramétrique Polaire d'une courbe**

Soit deux fonctions $\begin{cases} \rho\ : t \to \rho(t) \\ \theta\ : t \to \theta(t) \end{cases}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle I.

On considère alors la fonction vectorielle $\vec{F}(t) = \rho(t)\vec{u}(\theta(t))$.

$$(\vec{F},\ I) \text{ définit une courbe paramétrée } \mathcal{C}$$

$(\vec{F},\ I)$ est appelée la Réprésentation Paramétrique Polaire de cette courbe $\mathcal{C}$.
L'ensemble des points $M(t)$ de cette courbe sont donc définis par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \vec{F}(t) \quad \text{c'est à dire} \quad \boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \rho(t).\vec{u}(\theta(t))}$$

Les coordonnées polaires de $M(t)$ sont $(\rho(t),\ \theta(t))$ et ses coordonnées cartésiennes sont $\begin{cases} x(t) = \rho(t)\cos(\theta(t)) \\ y(t) = \rho(t)\sin(\theta(t)) \end{cases}$.

Dessin

Coordonnées polaires d'un point :

THÉORÈME 6 : **Position, vitesse et accélération en $M(t)$.**
Soit $\mathcal{C}$ une courbe définie par la RP $(\overrightarrow{F}, I)$ avec : $\overrightarrow{F}(t) = \rho(t).\overrightarrow{u}(\theta(t))$.
On a alors :

1.	$\overrightarrow{OM}$	$=$	$\rho.\overrightarrow{u}(\theta)$	Vecteur position.
2.	$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$	$=$	$\rho'.\overrightarrow{u}(\theta) + \rho.\theta'.\overrightarrow{v}(\theta)$	Vecteur vitesse, tangent à la trajectoire.
3.	$\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$	$=$	$(\rho'' - \rho.\theta'^2).\overrightarrow{u}(\theta) + (2.\rho'.\theta' + \rho.\theta'').\overrightarrow{v}(\theta)$	Vecteur accélération.

Pour plus de clareté (mais, au détriment de la rigueur...) les "(t)" ont été enlevés des relations précédentes.

Preuve 6 : Calcul usuel de dérivées de fonctions composées.

Remarque 15. Il faut savoir refaire les calculs ayant permis de déterminer ces formules.

4 Equation polaire d'une courbe

Objectif : Il s'agit d'étudier l'ensemble Γ des points M de coordonnées polaires $M\left\{\begin{array}{l}\rho\\ \theta\end{array}\right.$ tels que ρ et θ vérifient une relation de la forme : $\boxed{\rho = f(\theta) \quad \text{avec} \quad \theta \in I}$ (la fonction f sera notée ρ).

"$\rho = \rho(\theta)$" est appelée l'*équation polaire* de Γ.
La fonction ρ est ici supposée dérivable et à dérivée continue sur $I \subset \mathbb{R}$.

Pour cela, remarquons que Γ est le support de la Courbe Paramétrée Polaire :

$$\boxed{(\overrightarrow{F}, I) \quad \text{avec} \quad \forall \theta \in I, \quad \overrightarrow{F}(\theta) = \rho(\theta)\overrightarrow{u}_\theta}$$

Nous sommes ainsi ramené au cas particulier ($\theta(t) = t$) des courbes évoquées dans la partie précédente.

Remarque 16. Dans cette représentation paramétrique :

1. le paramètre θ représente à π près, l'angle $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{OM(\theta)})$.
2. la valeur $\rho(\theta)$ réprésente au signe près, la distance $OM(\theta)$.

Remarque 17. Γ est aussi le support de la CP cartésienne d'équations paramétriques : $\left\{\begin{array}{l} x(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta)\end{array}\right.$, $\theta \in I$.

`Exemple 14.` Attention : il est parfois possible d'étudier des courbes $\rho = \rho(\theta)$ sans passer par une RP :
Que pensez-vous des courbes suivantes ?

1. $\rho = \theta$
2. $\rho = \dfrac{1}{2\cos(\theta + \frac{\pi}{4})}$
3. $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta - \sin\theta}$

Aide : on pourra envisager de déterminer un équation cartésienne de certaines de ces courbes

Sous Maple, pour tracer la courbe polaire d'équation $\rho = 2(1+\cos\theta)$ on utilisera la syntaxe suivante :

```
> plot([2*(1+cos(x)), x, x=-3.14..3.14],coords=polar);
```

4.1 Etude locale en un point

Recherche des Points singuliers :

Le point $M(\theta)$ est singulier $\iff \overrightarrow{F}'(\theta) = \overrightarrow{0} \iff \rho'(\theta)\overrightarrow{u}_\theta + \rho(\theta)\overrightarrow{v}_\theta = \overrightarrow{0} \iff \begin{cases} \rho(\theta) = 0 \\ \rho'(\theta) = 0 \end{cases}$.

On en déduit que seul le point O peut-être un point singulier.

4.1.1 Etude en un point différent de l'origine

THÉORÈME 7 : **Tangente en un point $M(\theta_0)$ différent de O** $[\rho(\theta_0) \neq 0]$

Les points $M(\theta_0)$ différents de O sont des points réguliers.

La direction de la tangente à la courbe en $M(\theta_0)$ est donnée par le vecteur $\boxed{\overrightarrow{F}'(\theta_0) = \rho'.\overrightarrow{u}(\theta_0) + \rho.\overrightarrow{v}(\theta_0) \neq \overrightarrow{0}}$.

1. Si $\rho'(\theta_0) = 0$ alors $\overrightarrow{v}(\theta_0)$ dirige la tangente.
2. Sinon, la tangente à la courbe en $M(\theta_0)$ fait un angle $V(\theta_0)$ avec $\overrightarrow{u}(\theta_0)$ tel que :

$$\boxed{\tan V(\theta_0) = \frac{\rho(\theta_0)}{\rho'(\theta_0)}}$$

L'angle V étant défini modulo π, cette formule permet bien de déterminer V.

Preuve 7 : Pas de difficulté en se plaçant dans le repère polaire.

Remarque 18. L'étude de la concavité (et donc des points d'inflexion éventuels) se fera en fin d'année.

Dessin

Etude en $M \neq O$:

`Exemple 15.` Etudiez la courbe $\rho = \cos\theta$ au voisinage du point $M(\frac{\pi}{4})$.

Remarque 19. En $M(\theta) \neq O$ la direction de la normale est donnée par le vecteur : $\overrightarrow{N}(\theta_0) = \rho\overrightarrow{u} - \rho'\overrightarrow{v}$.

4.1.2 Etude locale en O :

Remarque 20. $M(\theta) = O \iff \rho(\theta) = 0$

THÉORÈME 8 : **Tangente en $M(\theta_0) = O$** $[\rho(\theta_0) = 0]$
Soit θ_0 tel que $M(\theta_0) = O$.
La tangente à la courbe en O est alors orientée par le vecteur $\overrightarrow{u}(\theta_0)$.

Preuve 8 : Il suffit de remarquer que $\dfrac{\overrightarrow{OM}(\theta)}{\rho(\theta)} \to \overrightarrow{u}(\theta_0)$ lorsque $\theta \to \theta_0$.

Remarque 21. L'étude de la tangente en O est indépendante du fait que O est un point stationnaire ou non.

Allure de la courbe en $M(\theta_0) = O$

1. La tangente en $M(\theta_0) = O$ admet pour direction $\overrightarrow{u}(\theta_0)$.
2. On obtient l'allure locale de la courbe au voisinage de $M(\theta_0) = O$ en examinant le signe de ρ :
   (a) Si ρ change de signe en θ_0, alors $M(\theta_0) = O$ est un *point ordinaire.*
   (b) ρ ne change pas de signe en θ_0, alors $M(\theta_0) = O$ est un *point de rebroussement de première espèce.*
3. O ne sera donc jamais un point d'inflexion ni un point de rebroussement de deuxième espèce.

Dessin

Etude en O :

`Exemple 16.` Etudier la nature du point O des deux courbes d'équations polaires $\begin{cases} \rho = \cos\theta \\ \rho = 1 + \cos\theta \end{cases}$.

4.2 Etude des branches infinies.

Définition 11 : **Branche infinie**
Soit une courbe polaire $(\mathcal{C})$ définie par $\rho = \rho(\theta)$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$.
On dira alors que $(\mathcal{C})$ admet une branche infinie si :

$$\rho(\theta) \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} \infty \quad \text{ou si} \quad \theta \to \infty$$

Cas où $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta \to \theta_0]{} \infty$

Dans ce cas, on se ramène à la définition paramétrique de la courbe $\overrightarrow{F} \begin{cases} \theta \to \rho(\theta).\cos\theta \\ \theta \to \rho(\theta).\sin\theta \end{cases}$.

Remarque 22. On notera que l'on aura toujours $\lim\limits_{\theta \to \theta_0} \dfrac{y(\theta)}{x(\theta)} = \lim\limits_{\theta \to \theta_0} \tan\theta$.

`Exemple 17.` Etudier les branches infinies des 2 courbes d'équations polaires $\rho(\theta) = \tan\theta$ et $\rho(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{\cos(\theta - \frac{\pi}{4})}$

Définition 12 : **Cas où** $\theta \to \infty$ **: Branche spirale**

Soit une courbe polaire $(\mathcal{C})$ définie par $\rho = \rho(\theta)$.

1. Si $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta \to \infty]{} 0$, on dit alors que $(\mathcal{C})$ admet une branche spirale tendant vers 0.
2. Si $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta \to \infty]{} \infty$, on dit alors que $(\mathcal{C})$ admet une branche spirale divergente.
3. Si $\rho(\theta) \xrightarrow[\theta \to \infty]{} l \in \mathbb{R}$, on dit alors que $(\mathcal{C})$ admet $\mathcal{C}(O,|l|)$ pour cercle asymptote.

`Exemple 18.` Montrer que la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{\theta+1}{\theta}$ admet un cercle asymptote.

4.3 Etude de l'existence de points multiples éventuels

Il s'agit de déterminer θ et θ' (distincts) tels que $\overrightarrow{OM}(\theta) = \overrightarrow{OM}(\theta')$ c'est à dire : $\rho(\theta)e^{i\theta} = \rho(\theta')e^{i\theta'}$.

Points multiples
Les points multiples d'une courbe d'équation polaire $\rho = \rho(\theta)$ sont à rechercher parmi les points vérifiant :

$$\rho(\theta) = \rho(\theta + 2k.\pi) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{ou} \quad \rho(\theta) = -\rho(\theta + (2k+1).\pi) \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Points multiples :

Remarque 23. La réduction de l'intervalle d'étude permet de restreindre l'étude des points multiples à un nombre limité de valeurs de k possibles. Ainsi, si $I = [0,\ 2\pi[$, on se contentera de résoudre $\rho(\theta) = -\rho(\theta+\pi)$

`Exemple 19.` Etudier l'existence de points multiples pour la courbe d'équation polaire $\rho = 1 + \tan\dfrac{\theta}{2}$ (pour $\theta \in [0,\ 2\pi]$).

4.4 Réduction de l'intervalle d'étude.

On tentera toujours de réduire l'intervalle d'étude en procédant dans l'ordre suivant :

a.	Etude de la "périodicité" :	$\rho(\theta+T) = \rho(\theta)$	$\rho(\theta+T) = -\rho(\theta)$	
b.	Etude de la parité :	$\rho(-\theta) = \rho(\theta)$	$\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$	
c.	Autres études :	$\rho(\theta_0-\theta) = \rho(\theta)$	$\rho(\theta_0-\theta) = -\rho(\theta)$	$\ldots$

Remarque 24. Pour trouver les symétries liées aux relations précédentes, on pourra traduire géométriquement la relation existant entre les affixes des points $M(\theta)$ et $M(-\theta)$.

1. Prenons la relation $\rho(\theta+T) = \rho(\theta)$.
   Elle donne $z(\theta+T) = \rho(\theta+T)e^{i(\theta+T)} = \rho(\theta)e^{i(\theta+T)} = \rho(\theta)e^{i\theta}e^{iT} = z(\theta)e^{iT}$.
   Le point $M(\theta+T)$ s'obtient donc par rotation de centre O et d'angle T du point $M(\theta)$.

2. Prenons la relation $\rho(-\theta) = -\rho(\theta)$.
   Elle donne $z(-\theta) = \rho(-\theta)e^{-i\theta} = -\rho(\theta)e^{-i\theta} = -\overline{z(\theta)}$.
   Le point $M(-\theta)$ s'obtient donc par symétrie orthogonal de $M(\theta)$ par rapport à O_y.

Cependant, un dessin suffit souvent pour identifier les symétries.

Lorsque $\rho(\theta+T) = \rho(\theta)$:	Lorsque $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$:	Lorsque $\rho(\theta_0-\theta) = \rho(\theta)$:

4.5 Plan d'étude d'une courbe en polaire $\rho = f(\theta)$.

On considère une courbe polaire $\boxed{\rho = \rho(\theta)}$ où $\rho : I \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction dérivable à dérivée continue sur $I \subset \mathbb{R}$.

1. On recherche l'ensemble de définition de la fonction f.
2. On tente de réduire l'intervalle d'étude.
3. On étudie les variations de f ainsi que les limites aux bornes de l'intervalle d'étude.
4. On étudie la forme de la courbe en O si ce point appartient à la courbe.
5. On étudie les tangentes aux points apparaissant dans la tableau de variation.
6. On étudie les branches infinies.
7. On trace la courbe en respectant l'ordre suivant :
   (a) On trace les points remarquables.
   (b) On trace les tangentes aux points remarquables.
   (c) On trace les asymptotes.
   (d) On relie les points dans l'ordre de variation du paramètre θ et en respectant le tableau de variation

> Pour vérifier que vous connaissez bien votre cours, prenez une feuille et notez-y de mémoire les méthodes et formules permettant de résoudre chacune des étapes précédentes. Si vous avez encore des hésitations, il vous faut impérativement revoir le cours !!

`Exemple 20.` Etudier les 2 courbes d'équations polaires suivantes : $\begin{cases} 1)\ \rho = 1 + \cos\theta & \text{cardioïde} \\ 2)\ \rho = \cos(4\theta) & \text{rosace} \end{cases}$.

`Exemple 21.` Etudier la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{\theta + \frac{\pi}{4}}{\theta - \frac{\pi}{4}}$.

Exercice : 5

Strophoïde droite

1. Etudier la courbe d'équation polaire $\rho = \dfrac{\cos 2\theta}{\sin\theta}$.
2. On note $F(0,\ -1)$ et on considère P un point de O_x autre que O.
   Montrer que les points M, intersection de (FP) et de la courbe sont tels que $PM = PO$.
3. En déduire un procédé permettant de coustruire la courbe étudiée.