Les fonctions réelles d'une variable réelle Propriétés Globales

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

5 janvier 2011

Dans ce chapitre, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et seront définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Après nous être intéressés aux propriétés LOCALES des fonctions (limite, continuité en un point, équivalents, branches infinies), nous allons maintenant décrire les fonctions de façon plus GLOBALE en nous intéressant à leur comportement sur la totalité de leur ensemble de définition.

1 Propriétés de base

Définition 1 : **Fonctions paires, impaires**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.
On dit que :

f est *paire* ssi $\forall x \in I, \quad f(-x) = f(x)$
f est *impaire* ssi $\forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x)$

Remarque 1. Si f et g sont paires (resp. impaires) alors, f+g, et λf le sont aussi.
On dira que l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
(Voir le cours sur les espaces vectoriels)

Remarque 2. Sauriez-vous redémontrer que toute fonction réelle se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?

`Exemple 1.` $(*)$ Etudier la parité de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$.

Définition 2 : **Fonctions périodiques**
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique ssi $\quad \exists T > 0, \quad \forall x \in I, \quad f(x+T) = f(x)$

Remarque 3. Si f et g sont périodiques de même période T, alors $f+g$, $f.g$ et λf sont aussi périodiques de période T.
On dira que l'ensemble des fonctions périodiques de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ forme une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.
(Voir le cours sur les espaces vectoriels)

`Exemple 2.` $(*)$ Déterminer la plus petite période de la fonction définie sur I par $f(x) = \dfrac{\cos(5x+3)}{1+\tan^2(x/3)}$.

Définition 3 : **Fonctions lipschitziennes** [a]
Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est lipschitzienne sur l'intervalle I ssi

$$\boxed{\exists k > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad \big|f(x) - f(y)\big| \leq k|x-y|}$$

Dans ce cas, on dit que la fonction f est k-lipschitzienne sur I.

[a] Rudolf Lipschitz (1832 – 1903), Allemand.

Fonctions k-lipschitziennes

`Exemple 3.`
1. ($*$) Montrer que la fonction sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. ($**$) Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque 4. Une fonction qui admet une tangente verticale ou une asymptote verticale sur un intervalle I n'est pas lipschitzienne sur cet intervalle. Cette propriété ne peut être utilisée en exercice. Il faut donc savoir mettre en place un raisonnement adapté à chaque cas.

PROPOSITION 1 : **Composée de fonctions lipschitziennes**
Si f et g sont lipschitziennes sur $I \subset \mathbb{R}$, alors $f \circ g$ l'est aussi.

Preuve 1 :
On montre facilement que si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est } k_1\text{-lipschitzienne sur } \mathbb{R} \\ g \text{ est } k_2\text{-lipschitzienne sur } \mathbb{R} \end{array}\right.$ alors fog est $k_1.k_2$-lipschitzienne sur I.

Exercice : 1
($*$) Montrer que si f est lipschitzienne sur $[a,b]$ et $[b,c]$ alors f est lipschitzienne sur $[a,c]$.

Exercice : 2
($*$) Soit une fonction f lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $(a,\, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a|x| + b$.

2 Continuité

2.1 Définition et propriétés

DÉFINITION 4 : **Fonctions continues sur un intervalle**
On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I ssi cette fonction est continue en chaque point de I.
On note $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Remarque 5. Le fait qu'une fonction soit continue sur un intervalle I, correspond intuitivement au fait que l'on puisse tracer sa courbe représentative sans lever le crayon. La continuité en un point est une notion locale, alors que la continuité sur un intervalle est une notion globale.

`Exemple 4.`
- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$
- Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.
- Les fonctions ln, exp, sin, cos, tan, arccos, arcsin, arctan, ch, sh, th, argch, argsh, argth sont continues sur leur ensemble de définition.

THÉORÈME 2 : **Opérations sur les fonctions continues**
1. Si f et g sont continues sur un intervalle I, alors $f+g$, $f \times g$, $|f|$ et $\lambda.f$ le sont aussi.
   Si de plus, g ne s'annule pas sur I alors $\dfrac{f}{g}$ est aussi continue sur I.
2. Si f et g sont continues sur un intervalle I, alors $\left\{\begin{array}{l} \sup(f,\, g) \\ \inf(f,\, g) \end{array}\right.$ le sont aussi.
3. Si $\begin{cases} \text{f est continue de I sur J} \\ \text{g est continue sur J} \end{cases}$, alors gof est continue sur I.
4. Si $\begin{cases} \text{f est continue sur [a, b]} \\ \text{f est continue sur [b, c]} \end{cases}$, alors f est continue sur $[a,\, c]$.
5. Si f est la restriction sur $J \subset I$ d'une fonction continue sur I, alors f est continue sur J.

Preuve 2 : La plupart de ces résultats ont été démontrés de façon locale. Leur extension à I est immédiate !

Remarque 6. On dira que $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), +, .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Exercice : 3

$(*)$ Etudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$

Exercice : 4

$(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la continuité de la fonction u_n définie sur $[0, 1]$ par :

- $u_n(x) = \sqrt{n}$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2n}$
- $u_n(x) = 2\sqrt{n}(1 - nx)$ si $\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}$
- $u_n(x) = 0$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$

Exercice : 5

$(**)$ On cherche ici les morphismes continus du groupe $(\mathbb{R},+)$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$
   (a) Démontrer que $\forall k \in \mathbb{Z}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(kx) = k.f(x)$
   (b) En notant $\alpha = f(1)$, calculer $f(p)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, puis déterminer $f(1/q)$ et $f(p/q)$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer alors toutes les fonctions f *continues* vérifiant la relation ci-dessus.

2.2 Cas des fonctions lipschitiziennes

Théorème 3 : **Une fonction lipschitzienne est continue**
Si une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est k-lipschitzienne sur I, alors f est continue sur l'intervalle I.

Preuve 3 : La relation qui caractérise les fonctions lipschitziennes sur un intervalle I donne facilement la continuité en tout point de I.

`Exemple 5.`
Les fonctions $x \mapsto x^2$, et $x \mapsto \sqrt{x}$, sont-elles lipschitziennes sur leur ensemble de définition ? Sont-elles continues ?

Remarque 7. Comme le montre un des exemples précédents, une fonction peut-être continue sur un intervalle sans être lipschitzienne sur cet intervalle. Pensez-vous qu'une fonction dérivable sur I est lipschitizienne sur I ? Et l'inverse ?

Fonctions continues, lipschitziennes et dérivables

Exercice : 6

$(*)$ Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$, avec $0 < k < 1$. (On dit que la fonction f est *contractante*).
On considère la suite récurrente définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Montrez que si la fonction f admet un point fixe l alors il est unique.
2. On suppose que la fonction f admet un point fixe l.
   Montrez que la suite (u_n) converge vers ce point fixe l.

2.3 Théorèmes des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Théorème Fondamental 4 : **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI-1)**
Soit un *intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f \ : \ I \mapsto \mathbb{R}$.
Soit deux réels $(a,\, b) \in I^{\,2}$ avec $a < b$.

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur le segment } [a{,}b] \\ t \in [f(a),\, f(b)] \end{cases}$ alors il existe $c \in [a,\, b]$ tel que $f(c) = t$.

Preuve 4 : Ce résultat est normalement admis mais la démonstration est intéressante.
Dans le cas où $f(a) \leq t$, $\Delta = \{x \in [a,\, b] \mid f(x) \leq t\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée.
Elle admet donc une borne supérieure c. Il s'agit alors de prouver que $f(c) = t$.

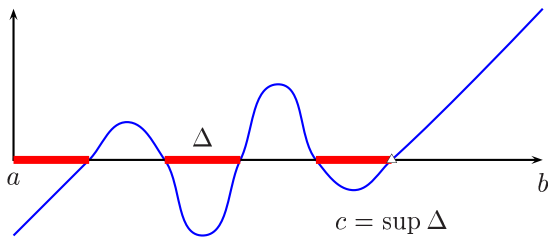

Fig. 1 – *Démonstration du TVI-1*

Remarque 8.

1. Si f n'est pas continue, alors c n'existe pas forcément.
2. TVI-2 : Lorsque $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,\, b] \\ f(a)f(b) < 0 \end{cases}$, il existe $c \in [a,\, b]$ tel que $f(c) = 0$.

Dessin		
TVI-1	TVI-2	Cas non continu

Remarque 9. : les TVI montrent l'existence d'un réel c, mais pas son unicité.
Pour prouver l'unicité, on utilisera plutôt le théorème de la bijection vu au paragraphe suivant.

Exercice : 7

($*$) Soit une fonction $f \ : \ [0{,}1] \mapsto [0{,}1]$ continue. Montrez qu'elle admet un point fixe.

Exercice : 8

($**$) Un cycliste parcourt 20 km en une heure.

1. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 10 km.
2. Montrer qu'il existe un intervalle de 3mn pendant lequel il a parcouru exactement 1 km.

Exercice : 9

($*$) Montrer qu'une fonction $f : I \to J$ bijective et continue est strictement monotone sur I.

Corollaire 5 : **Image continue d'un intervalle**
Soit un intervalle I et une fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ continue sur cet intervalle.
Alors, la partie $f(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou un singleton).

Preuve 5 : Grâce au théorème précédent, ce résultat se démontre facilement par l'absurde.

Ce théorème peut être utilisé pour prouver la non continuité d'une application sur I
Si I est un intervalle et si $f(I)$ n'en est pas un, alors f n'est pas continue sur I.

`Exemple 6.` $(*)$ Soit la fonction f définie sur $I = [0,1]$ par : $\begin{cases} f(x) = x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 1/2 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} \sup\ f([0,1]) = 1 \\ \inf\ f([0,1]) = 0 \end{cases}$ mais $f([0,1]) \neq [0,1]$ donc la fonction f n'est pas continue sur $[0, 1]$.

Exercice : 10

$(* * *)$ Soit f une application réelle monotone définie sur un intervalle I. Montrer que :

$$f \text{ est continue sur } I \iff f(I) \text{ est un intervalle}$$

Théorème Fondamental 6 : **Weierstrass : L'image continue d'un segment est un segment**
Soit deux réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$.
Alors, l'image directe du segment $[a,b]$, est un segment $[m, M]$.

Image continue d'un segment	**Image continue d'un intervalle ouvert**

Preuve 6 : Résultat admis !

`Exemple 7.` $(*)$ Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$.
Prouver que la fonction h définie par $h(x) = \sup\limits_{u \in [0,\ \sqrt{x}]} f(u)$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Remarque 10. Cas des fonctions continues et monotones :

1. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.
   - Si f est strictement croissante sur $[a,b]$ alors $f([a,b]) = [f(a),f(b)]$
   - Si f est strictement décroissante sur $[a,b]$ alors $f([a,b]) = [f(b),f(a)]$

2. Plus généralement, si f est continue et strictement monotone sur I alors I et $f(I)$ sont de même nature.
   Par exemple, si f est une fonction continue et strictement croissante sur $]a, b[$ dans $f(]a, b[)$ (a et b éventuellement infinis) alors :
   $$f(]a, b[) =]\alpha, \beta[\quad \text{avec} \quad \begin{cases} \alpha = \lim\limits_{x \to a} f(x) \\ \beta = \lim\limits_{x \to b} f(x) \end{cases} . \qquad \text{(vérifier l'existence de ces limites !)}$$
   Plus généralement, les bornes de J et de I se correspondent à l'ordre près.

Corollaire 7 : une fonction réelle définie et continue sur un segment est donc bornée et atteint ses bornes !

Preuve 7 : Immédiat !

Exercice : 11

$(*)$ Soient deux fonctions $f, g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0,1],\ f(x) < g(x)$
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) + \alpha \leq g(x)$

Exercice : 12

(∗) Soit $f\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ bornée et $g\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que les fonctions fog et gof sont elles aussi bornées.

Exercice : 13

(∗∗) Soient $f,\, g \in \mathcal{C}([0,\, 1],\, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in [0,\, 1],\, 0 < f(x) < g(x)$.
Soit $(x_n) \in [0,\, 1]^{\mathbb{N}}$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = [\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}]^n$.
Etudier la convergence de (u_n).

2.4 Théorème de la bijection

Théorème Fondamental 8 : **Théorème de la bijection**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$. On note $J = f(I)$.
On suppose que la fonction f est : $\begin{cases} \text{continue sur l'intervalle } I \\ \text{strictement monotone sur } I \end{cases}$
Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle J, et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \mapsto I$ est une fonction strictement monotone de même sens que f et continue sur J.

Preuve 8 : Nous avons ici 4 résultats à démontrer ...

1. On justifie que J est un intervalle.
2. On montre que si f n'est pas bijective, alors elle ne peut pas être strictement monotone.
3. On suppose par exemple que f est strictement croissante et on démontre par l'absurde que f^{-1} l'est aussi.
4. Pour montrer la continuité de la fonction f^{-1}, on peut utiliser ce que l'on sait sur l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone.

Remarque 11. Une fonction f strictement monotone sur I est une bijection de I dans $f(I)$, même si f n'est pas continue. En revanche, rien ne nous permet d'affirmer que $f(I)$ est ici un intervalle.

Remarque 12. **Graphe de la bijection réciproque**
Les courbes représentatives de f et f^{-1} se déduisent l'une de l'autre par une symétrie par rapport à la droite $y = x$.

`Exemple 8.` La fonction ln est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque (appelée "fonction exponentielle") continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Remarque 13. Que dire d'une fonction continue et injective sur un intervalle I ?

Exercice : 14

(∗∗) Soit $f\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J que l'on déterminera.
2. Déterminer pour $y \in J$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

Exercice : 15

(∗) Déterminer le nombre de solution(s) de l'équation $a = x.e^{-x}$ selon les valeurs de a.

Exercice : 16

(∗∗) Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : \begin{array}{ccc} [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 \end{array}$

1. Montrez qu'il existe un unique réel $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrez que la suite (u_n) converge.
3. Déterminez la limite de la suite (u_n).

Remarque 14. Sauriez-vous expliquer les conditions d'application et justifier la méthode d'estimation de la solution de l'équation $f(x) = 0$ par dichotomie?

3 Fonctions uniformément continues

Définition 5 : **Fonction uniformément continue**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un intervalle I.
On dit qu'elle est *uniformément continue* sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \quad \text{tel que} \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Le nombre η est indépendant des réels (x, y) et s'appelle un *module d'uniforme continuité.*

Fonction uniformément continue :

Proposition 9 : Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Alors :

$$(f \text{ lipschitzienne sur } I) \Rightarrow (f \text{ uniformément continue sur } I) \Rightarrow (f \text{ continue sur } I)$$

Preuve 9 : Pas de difficulté.

Ensembles des fonctions continues, uniformément continues et lipschitziennes

`Exemple 9.` (∗∗) Montrer que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$.

Proposition 10 : **CS de non continuité uniforme**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$.
Si il existe $(x_n), (y_n) \in I^{\mathbb{N}}$ telles que $\left\{ \begin{array}{l} x_n - y_n \mapsto 0 \\ f(x_n) - f(y_n) \not\mapsto 0 \end{array} \right.$ alors f n'est pas uniformément continue sur I.

Preuve 10 : On montre que si f était uniformément continue alors on aurait $f(x_n) - f(y_n) \mapsto 0$.

Remarque 15. On pourra utiliser la proposition précédente pour prouver qu'une application $f : I \mapsto \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue sur l'intervalle I.

`Exemple 10.` $(*)$ Montrer que $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x^2 \end{array}$ ne sont pas uniformément continues.

Exemples de fonctions non uniformément continues

THÉORÈME 11 : **Théorème de Heine**
Une fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Preuve 11 : La démonstration de ce théorème n'est pas exigible.
On procède par l'absurde.
Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0$, il existe $(x, y) \in [a, b]^2$ tel que $|x - y| \leq \eta$ et $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $\eta = \dfrac{1}{n}$.
On construit alors deux suites (x_n) et (y_n) de $[a, b]$ telles que $|x_n - y_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$.
La suite (x_n) est bornée ...
On peut donc en extraire une suite convergente (théorème de Bolzano-Weirstrass) $(x_{\varphi(n)}) \mapsto c \in [a, b]$.
On montre alors facilement que $(y_{\varphi(n)}) \mapsto c \in [a, b]$.
La continuité de f en c permet alors de mettre en évidence une contradiction !

`Exemple 11.` $(*)$ Prouver que si une application est uniformément continue sur les segments $[a, b]$ et $[b, c]$, alors elle est uniformément continue sur $[a, c]$.

Exercice : 17
$(**)$ On considère une fonction continue $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et on suppose que $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} l \in \mathbb{R}$.
Montrer que la fonction f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice : 18
$(**)$ Montrer qu'une fonction f continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exemples de fonctions uniformément continues