La convexité

MPSI-1 Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

9 février 2011

DÉFINITION 1 : **Fonction convexe**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un $\boxed{\text{intervalle } I \subset \mathbb{R}}$.
On dit que f est *convexe* sur I lorsque que :

Sur tout segment $[x_1 ; x_2] \subset I$ la courbe C_f est située au dessous du segment $[A_1(x_1, f(x_1)); A_2(x_2; f(x_2))]$

Fonction convexe :

DÉFINITION 2 : **Définition formelle**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est *convexe* ssi :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0,1], \quad \boxed{f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)}$$

Remarque 1. On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I est *concave* lorsque

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, \forall \lambda \in [0, 1], \quad f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

La fonction f est concave si et seulement si la fonction $-f$ est convexe.
Dans la suite, on n'étudiera que les propriétés des fonctions convexes.

Remarque 2. Les fonctions qui sont à la fois convexes et concaves sont les fonctions affines.

Remarque 3. **Fonction strictement convexe**
On dit qu'une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est *strictement convexe* lorsque $\forall (x_1, x_2) \in I^2$, $x_1 \neq x_2$,

$$\forall \lambda \in]0,1[, \quad f\big(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\big) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Théorème Fondamental 1 : **Inégalité de Jensen**
Soit une fonction f convexe sur l'intervalle I.

Alors : $\begin{cases} \forall n \geq 2 \\ \forall (x_1, \dots, x_n) \in I^n \\ \forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n \text{ tq } \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \end{cases}$ $\boxed{f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}$

Preuve 1 : Cette démonstration est intéressante. Comme il s'agit d'une généralisation de l'inégalité de convexité, il semble raisonnable d'envisager une démonstration par récurrence.

1. L'initialisation ne pose pas de difficulté.
2. On considère alors $n+1$ couples (λ_k, x_k). Pour se ramener à deux couples et ainsi utiliser la définition de la convexité, on pourra considérer le barycentre de la famille $[(\lambda_i, x_i)]_{i \in \{1, n\}}$.

Exercice : 1
$(*)$ Montrer que $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\qquad (x_1 + \dots + x_n)^2 \leq n(x_1^2 + \dots + x_n^2)$

Théorème 2 : Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x_0 \in I$:

Alors, la fonction $\Delta_{x_0} : \begin{array}{ccc} I\backslash\{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$ est croissante sur $I\backslash\{x_0\}$.

Croissance de la pente des cordes :

Preuve 2 : On utilise la définition de la croissance d'une fonction.
Ainsi, on considère $x_1, x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2$, et on démontre que $\Delta_{x_0}(x_1) \leq \Delta_{x_0}(x_2)$.
Il existe 3 situations différentes qui s'étudient de façon identique : $x_0 < x_1 \leq x_2$, $x_1 < x_0 < x_2$ et $x_1 \leq x_2 < x_0$.
Supposons par exemple que $x_0 < x_1 \leq x_2$. Il existe alors $\lambda \in]0; 1[$ tel que $x_1 = \lambda x_0 + (1-\lambda)x_2$.
Cette expression nous permet d'utiliser la convexité de f et d'obtenir facilement le résultat attendu.

Remarque 4. Ce théorème dit simplement que les pentes des cordes obtenues et fixant une des extrémités, sont croissantes.

`Exemple 1.` $(*)$ Déduire du théorème précédent que la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{e^x - 1}{x} \end{array}$ est croissante.

Exercice : 2
$(**)$ Réciproquement, montrer que si $\forall x_0 \in I$, la fonction Δ_{x_0} est croissante, alors f est convexe sur I.

Exercice : 3

(∗∗) Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée.

1. Montrer que f est constante.
2. Montrer qu'une fonction définie sur une partie de $\mathbb{R}$ peut-être convexe et majorée sans être constante.
3. Quel théorème pouvez-vous en déduire?

Exercice : 4

(∗∗) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I et x_0 un point intérieur à I.

1. Montrer que f admet une dérivée à droite et une dérivée à gauche en x_0.
2. Montrer que f est continue en x_0.
   Donner l'exemple d'une fonction convexe non continue sur I.

Exercice : 5

(∗∗) Soit f une application convexe de $[0,\, 1]$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction φ définie sur $[0,\, 1/2]$ par $\varphi(x) = f(x) + f(1-x)$ est décroissante.
Remarque 5.
On pourra retraiter cet exercice après avoir vu le théorème suivant en supposant que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0,\, 1]$.

Théorème 3 : **Caractérisation des fonctions convexes dérivables**

1) Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable alors $\boxed{f \text{ convexe } \iff f' \text{ croissante}}$

2) Si $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est deux fois dérivable alors $\boxed{f \text{ convexe } \iff f'' \geq 0 \text{ sur } I}$

Preuve 3 :

1. $\Rightarrow$ Soient $x_1,\, x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2$.
   Soit $x \in [x_1,\, x_2]$, on considère alors la fonction Δ_x du théorème précédent.
   La fonction f étant convexe, on a $\Delta_x(x_1) \leq \Delta_x(x_2)$.
   Il ne reste plus qu'à faire tendre $x \mapsto x_1$ puis $x \mapsto x_2$.

   $\Leftarrow$ Soient $x_1,\, x_2 \in I$ tels que $x_1 \leq x_2$.
   Soit $\lambda \in [0,\, 1]$. On considère la fonction $\Delta(\lambda) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - (\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2))$.
   Il s'agit de prouver que $\Delta(\lambda) \leq 0$ pour tout $\lambda \in [0,\, 1]$. Pour cela, on étudie la fonction Δ.
   On pourra remarquer que Δ' est croissante et s'annule sur $]0,\, 1[$ d'après le théorème de Rolle.
2. Nous savons que si f est deux fois dérivable, alors f' *croissante* $\iff f'' \geq 0$, d'où le résultat.

Remarque 6. On a bien sûr un résultat équivalent pour caractériser les fonctions concaves.

Définition 3 : **Point d'inflexion**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.
On dit que f admet un point d'inflexion en x_0 lorsque la courbe de f change de concavité en x_0.

Théorème 4 : **Caractérisation des points d'inflexion**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^2$ sur I et $x_0 \in \overset{\circ}{I}$. Alors :

$$f \text{ admet un point d'inflexion en } x_0 \iff \begin{cases} f''(x_0) = 0 \\ f'' \text{ change de signe en } x_0 \end{cases}$$

Preuve 4 : La concavité d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est déterminée par le signe de sa dérivée seconde.
La continuité de f'' en x_0 permet de conclure que $f''(x_0) = 0$.

`Exemple 2.` La fonction $f : x \mapsto x^3$ admet un point d'inflexion en $x_0 = 0$.

Exercice : 6

(∗) Déterminer le ou les points d'inflexion de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 1/\operatorname{ch} x \end{array}$

Théorème 5 : **Le graphe d'une fonction convexe est situé au dessus de toutes ses tangentes**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ convexe et dérivable.

$$\forall x_0 \in I, \forall x \in I, \quad f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

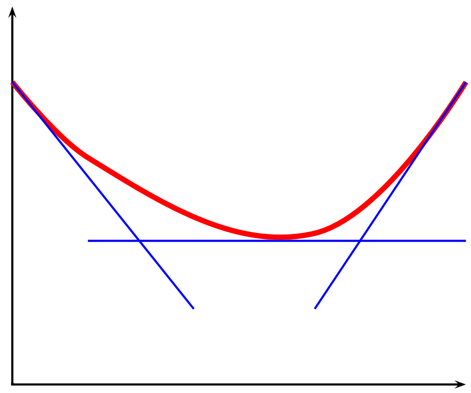

Fig. 1 – *Le graphe d'une fonction convexe est au dessus de toutes ses tangentes*

Preuve 5 : Il s'agit simplement d'étudier le signe de la fonction $\Delta(x) = f(x) - (f'(x_0).(x - x_0) + f(x_0))$.
Pour connaître le sens de variation de f, on remarquera que Δ' est croissante et s'annule en x_0.

`Exemple 3.` $(*)$ Prouver que : $\forall x \in [0, \pi/2], \quad \frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

Exercice : 7

Démontrer en utilisant un argument de convexité que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \geq 0, \quad x^{n+1} - (n+1)x + n \geq 0$

1 Applications de l'inégalité de Jensen

L'inégalité de Jensen vue précédemment permet de démontrer des inégalités utiles en analyse.
Ces inégalités sont appelées des "inégalités de convexité".
On procède de la façon suivante :

1. On se donne une fonction f
2. On vérifie qu'elle est convexe sur I en calculant par exemple f''
3. On écrit l'inégalité de Jensen en choisissant correctement les valeurs de $\lambda_1 \dots \lambda_n$

`Exemple 4.`

1. Majorer pour $x, y > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $(x + y)^n$ en fonction de x^n et y^n.
2. Choisissez des fonctions convexes et déterminer des inégalités de convexité associées.

Exercice : 8

$(*)$ Inégalités dues à la concavité de la fonction ln.

1. Prouver que la fonction ln est concave sur $\mathbb{R}^{+*}$.
2. Ecrire l'inégalité générale à deux termes de concavité de la fonction ln.
   En déduire l'inégalité de Young : $\begin{cases} \forall a > 0, b > 0 \\ \forall p > 0, q > 0 \end{cases}$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$: $\quad ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$
3. Ecrire l'inégalité générale à trois termes de concavité de la fonction ln.
   En déduire que $\forall (a, b, c) \in (\mathbb{R}^+)^3$:

   (a) $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$

   (b) $(a + b + c)^3 \geq 27abc$

4. Ecrire l'inégalité générale à n termes $(n \in \mathbb{N}^*)$ de concavité de la fonction ln.
   En déduire que :

   (a) $\forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^{+\star})^n$: $\quad (x_1 \dots . x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$.

   (b) $\forall n \in \mathbb{N}^*$: $\quad \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$

Exercice : 9

(∗∗) Prouver que pour tout $a,\, b,\, x,\, y \in \mathbb{R}^{+*}$, nous avons : $x\ln\dfrac{x}{a} + y\ln\dfrac{y}{b} \geq (x+y)\ln\dfrac{x+y}{a+b}$.

Aide : vous pourrez commencer par prouver la co,cavité de la fonction $x \mapsto x\ln x$.

Exercice : 10

(∗∗) **Inégalité de Holder :**

1. Prouver que $\forall \alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$ et $\forall (x,\, y) \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $x^\alpha y^\beta \leq \alpha x + \beta y$
2. En déduire l'inégalité de Holder :
   $\forall (a_1,\, a_2, \dots,\, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ et $\forall (b_1,\, b_2, \dots,\, b_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ et $\forall \alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$, on a :
   $$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{\alpha}}\Big)^\alpha \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{\beta}}\Big)^\beta$$
   Indication : Poser $x_k = \dfrac{a_k^{\frac{1}{\alpha}}}{\sum_{i=1}^{n} a_i^{\frac{1}{\alpha}}}$ et $y_k = \dfrac{b_k^{\frac{1}{\beta}}}{\sum_{i=1}^{n} b_i^{\frac{1}{\beta}}}$

Exercice : 11

(∗∗) **Inégalité de Minkowsky :**

1. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $p > 1$.
   Prouver que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \big(1 + x^{\frac{1}{p}}\big)^p$ est concave.
2. Quelle relation obtient-on en appliquant l'inégalité de Jensen aux valeurs strictement positives $x_1, \dots, x_n$ affecté des coefficients positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$?
3. En déduire l'inégalité de Minkowsky :
   $\forall (a_1,\, a_2, \dots,\, a_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ et $\forall (b_1,\, b_2, \dots,\, b_n) \in (\mathbb{R}^{+*})^n$ on a :
   $$\Big(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\Big)^{\frac{1}{p}} \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\Big)^{\frac{1}{p}} + \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\Big)^{\frac{1}{p}}$$
   Indication : poser $x_k = \dfrac{a_k^p}{b_k^p}$ et $\lambda_k = \dfrac{a_k^p}{\sum_{i=1}^{n} a_i^p}$.

1.1 Autres exercices

Exercice : 12

(∗∗) Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,\, 1]$ telles que : $\begin{cases} g(x) > 0 \forall x \in [0,\, 1] \\ f \text{ positive et } \int_0^1 f = 1 \end{cases}$.

On souhaite démontrer que :
$$\int_0^1 f(x)\ln(g(x))\,\mathrm{d}x \leq \ln\Big(\int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\Big)$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose pose pour tout $k \in [\![0,n]\!]$: $\begin{cases} \lambda_k = f(\dfrac{k}{n}) \\ x_k = g(\dfrac{k}{n}) \end{cases}$.
   (a) Justifier que pour n suffisamment grand, $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k \neq 0$.
   (b) Appliquer alors l'inégalité de Jensen à la fonction ln en prenant pour tous $k \in [\![0,n]\!]$:
   les scalaires $\mu_k = \dfrac{\lambda_k}{\sum_{k=0}^{n} \lambda_k}$ et les valeurs x_k.
2. Conclure en faisant tendre n vers l'infini.