Nouveaux Eléments de Calculs Algébriques

MPSI-Cauchy Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

5 octobre 2017

Si le cours de maths de CPGE insiste beaucoup sur la pratique du raisonnement mathématique, celui-ci ne peut se faire sans passer par des étapes de calcul algébrique. Il est donc impératif de maîtriser les techniques usuelles de calcul avec les fractions, les puissances, les factorisations et développements, les fonctions logarithme et exponentielle...

Pour compléter les techniques précédentes, nous allons apprendre dans ce chapitre :

- à maîtriser l'utilisation de la notation usuelle des ensembles,
- à maîtriser l'utilisation du symbole Σ pour la manipulation des sommes simples et doubles,
- quelques formules utilisées tout au long de l'année,
- à maîtriser les propriétés et l'utilisation des coefficients binomiaux,
- à maîtriser la technique de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires.

---

1 Sommes et Produits

1.1 Ensembles et familles

La notion d'ensemble est une notion *primitive* de mathématique et donc ne se définit pas : elle est intuitive.
C'est à partir de cette notion que l'ensemble $\mathbb{N}$ est construit.

`Exemple 1.` Quelques ensembles mathématiques : $\emptyset$, $\{\}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{F}(E,\ F)$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, S_n, $\mathcal{O}(E)$...

Définition 1 : **Notation des ensembles**

Les ensembles sont très souvent notés de la façon suivante :

$$\mathcal{E} = \{\textit{nature des éléments de l'ensemble} \mid \textit{Condition d'appartenance}\}$$

`Exemple 2.`

1. $A = \{x \in \mathbb{R} \mid \ \cos x > \frac{1}{2}\}$
2. $B = \{p^2 \mid p \text{ est un nombre premier}\}$

Remarque 1. Vous avez remarqué que l'ensemble A n'est autre que l'ensemble des solutions de l'équation $\cos x > \frac{1}{2}$.

Exercice : 1

(∗∗) Déterminer l'ensemble $\Delta = \{y \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 2xy + y^4 = 0\}$.

Définition 2 : **Ensembles produits**

Soient $A,\ B$ deux ensembles non vides.
Le produit cartésien $A \times B$ est alors l'ensemble défini par :

$$A \times B = \{(a,\ b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

`Exemple 3.` L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}^2$ du système $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x-y=0 \end{array}\right.$ est : $\mathcal{S} = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ 2x-y=0 \end{array}\right. \}$.

`Exemple 4.` (∗) Déterminer $C \times D$ lorsque $C = \{1,\ 3,\ 7\}$ et $D = \{1,\ 2,\ 5\}$

`Exemple 5.` Les ensembles produits usuels : $\mathbb{R}^2$ (le plan cartésien), $\mathbb{Z}^2$ (quadrillage du plan cartésien), $\mathbb{R}^n$ (où $n \in \mathbb{N}$).

Définition 3 : **Famille d'éléments**
Soit I un ensemble non vide et A un ensemble non vide.
L'ensemble $\{a_i \in A \mid i \in I\}$ est appelé :

"famille finie des éléments a_i de l'ensemble A indexée sur I" et est noté $(a_i)_{i \in I}$

Souvent, on prendra $I = [\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}$.
On aura alors :

$$(a_i)_{i \in [\![1,n]\!]} = \{a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n\}$$

`Exemple 6.` $\mathcal{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

1. $E = \{i^2 \mid i \in [\![1, 10]\!]\} = (i^2)_{i \in [\![1,10]\!]}$
2. $F = \{p(p+1) \mid p \in \mathcal{P}\} = (p(p+1))_{p \in \mathcal{P}}$

Remarque 2. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de nombres indexée sur $\mathbb{N}$.

Travail à effectuer :

Prenez une feuille de brouillon et vérifiez que vous êtes capables de développer chacun des points suivants :

☐	Définitions	Notations usuelles des ensembles - Ensemble produit - Famille d'éléments indexée sur I
☐	Exercices	Justifier que $\left\{\begin{array}{l} 0 \in A \\ 3 \notin B \end{array}\right.$, que $\left\{\begin{array}{l} (1,\ 5) \in C \times D \\ (0,\ i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^* \end{array}\right.$ et que $\left\{\begin{array}{l} 4 \in E \\ 1 \notin F \end{array}\right.$

1.2 Sommes

1.2.1 Sommes simples

DÉFINITION 4 : **Sommes**
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de complexes (ou d'entiers, de rationnels ou de réels).
On notera :

$$\sum_{i\in I} a_i \quad \text{la somme des nombres } a_i$$

Lorsque $I = [\![m, n]\!]$ avec $m \leq n \in \mathbb{Z}$, cette quantité sera notée : $\displaystyle\sum_{i=m}^{n} a_i = a_m + a_{m+1} + \cdots + a_n$

La variable 'i' est dite *muette*.
Cela signifie qu'on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre.
'i' est aussi appelé l'*indice courant*.

Remarque 3. Retenez que $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} u_k$ est une somme de "$n - m + 1$" termes !

`Exemple 7.` $(*)$ Pour $p,\ q \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{i=q}^{p} 2 = (p - q + 1)2$

PROPOSITION 1 : **Sommes à connaître IMPERATIVEMENT !**
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{C}$.

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$ (si $a \neq 1$)
- $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = n + 1$ (si $a = 1$)

Preuve 1 : Facile par récurrence !

PROPOSITION 2 : **Linéarité de la somme**
Soit I un ensemble fini non vide, $(a_i)_{i\in I},\ (a_i)_{i\in I}$ deux familles de nombres complexes et $\lambda,\ \mu \in \mathbb{C}$.
On a alors :

$$\sum_{i\in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i$$

Preuve 2 : Il suffit de l'écrire...

Remarque 4.
On ne peut mettre en facteur de la somme que les coefficients qui ne dépendent pas de l'indice courant.

`Exemple 8.` $(*)$ Calculer : $\displaystyle S = \sum_{k=2}^{10} (2 + 3k - 5k^2)$

Exercice : 2
$(*)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer la somme : $S_n = n + 2(n-1) + 3(n-2) + \cdots + (n-1)2 + n$.

DÉFINITION 5 : **Sommes télescopiques**
Une somme télescopique est une somme de la forme : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_{k+1} - a_k)$ ou $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} (a_k - a_{k+1})$.
Ces sommes se simplifient facilement :

$$\sum_{k=m}^{n} a_{k+1} - a_k = a_{n+1} - a_m \qquad \text{(Formule à bien connaître !)}$$

`Exemple 9.` $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

- $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
- $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \frac{1}{k})$
- $S_3 = \sum_{k=0}^{n} k \times k!$

Proposition 3 : Chasles
Lorsque $p \leq q < n \in \mathbb{N}$, nous avons la propriété suivante :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p}^{q} a_k + \sum_{k=q+1}^{n} a_k$$

Preuve 3 : Il suffit de l'écrire.

`Exemple 10.` $(*)$ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les sommes suivantes :

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{2n} \min(k, n)$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{2n} \max(k, n)$

Remarque 5. Il est aussi possible de regrouper les termes d'indices pairs et les termes d'indices impairs :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{k=p \text{ (pairs)}}^{n} a_k + \sum_{k=p \text{ (impairs)}}^{n} a_k$$

`Exemple 11.` $(*)$ Calculer $S = \sum_{k=1}^{100} \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ représente la partie entière d'un réel x.

Proposition 4 : Décalage d'indices
Soit $p,\ q \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}$ et $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une famille de nombres complexes.
On a alors :

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = \sum_{i=p+n}^{q+n} a_{i-n}$$

Preuve 4 : Il suffit de l'écrire... en posant éventuellement $j = i + n$.

`Exemple 12.` $(*)$ Calculer les sommes suivantes à l'aide de changements d'indice et d'une décomposition en éléments simples pour S_1 et S_2 :

1. $S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k(k+1)(k+2)}$
3. $S_3 = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k})$

Remarque 6. ⚠ On ne peut faire que des décalages d'indice ou éventuellement des "inversions" d'indice ($i = n - j$). Impossible par contre de poser $j = 2i$ ou $j = \frac{i}{3}$.

Proposition 5 : Formule de factorisation
Pour $n \in \mathbb{N}$ et $a,\ b \in \mathbb{C}$.

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{(n-1)-k} b^k \quad \text{ou} \quad \boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})}$$

Que donne cette formule lorsque $b = 1$?

Preuve 5 : Il suffit de développer en effectuant un changement d'indice.

`Exemple 13.` $(*)$ Factoriser $a^5 + b^5$ lorsque $a,\ b \in \mathbb{C}$.

Exercice : 3

$(*)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver que $N = 5^{n+1} - 3^{n+1}$ n'est pas un nombre premier.

Travail à effectuer :

Prenez une feuille de brouillon et vérifiez que vous êtes capables de développer chacun des points suivants :

☐	Définitions	Connaître les notations $\sum_{i\in I} a_i$ et $\sum_{i=a}^{b} a_i$
☐	Propriétés	Linéarité de la somme - Relation de Chasles - Changement d'indices - Décomposition selon la parité de l'indice - nombre d'éléments d'une somme
☐	Formules	$\sum_{i=1}^{n} i$ - $\sum_{i=1}^{n} i^2$ - $\sum_{i=0}^{n} a^i$ - Sommes télescopiques - Formule de factorisation
☐	Exercices	Etre capable de refaire chacun des exercices précédents
☐	Démonstrations	Savoir justifier chacune des propriétés précédentes
☐	Méthodes	Savoir rédiger proprement une récurrence simple

1.2.2 Sommes doubles

Définition 6 : **Sommes doubles rectangulaires**

Soit I et J des ensembles finis et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille finie de nombres complexes.
On remarque que l'on peut noter :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\Big(\sum_{j\in J} a_{i,j}\Big) \quad \text{qui est aussi égale à} \quad = \sum_{j\in J}\Big(\sum_{i\in I} a_{i,j}\Big)$$

Dans le cas où $I = [\![p,n]\!]$ et $J = [\![q,m]\!]$, on peut aussi noter :

$$\sum_{(i,j)\in[\![p,n]\!]\times[\![q,m]\!]} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{n}\Big(\sum_{j=q}^{m} a_{i,j}\Big) \quad \text{(par ligne)} \quad = \quad \sum_{j=q}^{m}\Big(\sum_{i=p}^{n} a_{i,j}\Big) \quad \text{(par colonne)}$$

Termes généraux d'une somme rectangulaire

i \ j	r	r+ 1	...	j	...	s
p	$a_{p,r}$	...	...	...	...	$a_{p,s}$
p+1	$\vdots$	...	...	...	...	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
i	$\vdots$	...	...	$a_{i,j}$	...	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
q	$a_{q,r}$	...	...	...	...	$a_{q,s}$

Remarque 7. ⚠ Lorsque $I = J = [\![p,q]\!]$, la somme rectangulaire est souvent notée : $\sum_{p\leq i,\ j\leq q} a_{i,j}$

`Exemple 14.` $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

1. $S_1 = \sum_{1\leq i,j\leq n} ij$
2. $S_2 = \sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j)^2$
3. $S_3 = \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,\ j)$

Proposition 6 : **Produit de deux sommes rectangulaires finies**

Soit I et J deux ensembles finis non vides et $(a_i)_{i\in I},\ (b_j)_{j\in J}$ deux familles de nombres complexes.
On a alors :

$$\sum_{(i,\ j)\in I\times J} a_i b_j = \Big(\sum_{i\in I} a_i\Big)\Big(\sum_{j\in J} b_j\Big)$$

Preuve 6 : Il suffit de l'écrire...

Remarque 8.
Ne surtout pas écrire que les quantités $\sum\limits_{i\in I} a_i \sum\limits_{i\in I} b_i$ et $\sum\limits_{i\in I} a_i b_i$ sont égales ! Contre-exemple ?

`Exemple 15.` ($*$) Soient $p,\ q \in \mathbb{N}^*$ et $(a_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$, $(b_i)_{i\in[\![1,q]\!]}$ deux familles finies de complexes.
Exprimer sous la forme d'une somme, le produit des deux expressions polynômiales suivantes : $\begin{cases} A(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_px^p \\ B(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_qx^q \end{cases}$

Proposition 7 : Sommes triangulaires
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{i,j})_{(i,j)\in[\![p,q]\!]^2}$ une famille de nombres complexes.
On distingue 2 types de sommes triangulaires :

1. En incluant la diagonale : $\displaystyle\sum_{p\leq j\leq i\leq q} a_{i,j} = \sum_{i=p}^{q}\big(\sum_{j=p}^{i} a_{i,j}\big)$ (par ligne) $\displaystyle= \sum_{j=p}^{n}\big(\sum_{i=j}^{q} a_{i,j}\big)$ (par colonne) .
2. En excluant la diagonale : $\displaystyle\sum_{p\leq j< i\leq q} a_{i,j} = \sum_{i=p+1}^{q}\big(\sum_{j=p}^{i-1} a_{i,j}\big)$ (par ligne) $\displaystyle= \sum_{j=p}^{q-1}\big(\sum_{i=j+1}^{q} a_{i,j}\big)$ (par colonne)

Tableau des termes généraux d'une somme triangulaire

i \ j	p	p+ 1	$\ldots$	i	$\ldots$	q
p	$a_{p,p}$					
p+1	$a_{p+1,p}$	$a_{p+1,p+1}$				
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$			
i	$a_{i,p}$	$\ldots$	$\ldots$	$a_{i,i}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	
q	$a_{q,p}$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$a_{q,q}$

Preuve 7 : Dans un cas, on additionne par colonne et dans l'autre cas par ligne.

`Exemple 16.` ($*$) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer : $\displaystyle S_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij.$

`Exemple 17.` ($*$) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, vérifier que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\big(\sum_{l=1}^{k} 2^k\big)$ et en déduire une évaluation simple de cette somme.

Exercice : 4
($*$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle S_n = \sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}.$

Exercice : 5
($**$) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère $\displaystyle C_n = \sum_{1\leq p<q\leq n} (p+q).$

1. Prouver par un calcul direct que : $C_n = \dfrac{1}{2}(n-1)n(n+1).$
2. Retrouver le résultat précédent en remarquant que : $\displaystyle\sum_{1\leq p,\ q\leq n} (p+q) = 2C_n + 2\sum_{p=1}^{n} p.$

Travail à effectuer :

Prenez une feuille de brouillon et vérifiez que vous êtes capables de développer chacun des points suivants :

☐	Définitions	Signification et calcul de $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ et de $\displaystyle\sum_{0\leq j\leq i\leq n} a_{i,j}$
☐	Propriétés	Produit de deux sommes
☐	Formules	Calcul des sommes doubles et des sommes triangulaires.
☐	Exercices	Calculer : $S_1 = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} \frac{i}{j}$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{1\leq i\leq j\leq n} ij$

1.3 Produits

Définition 7 : **Produit**
Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de nombres complexes (ces nombres peuvent aussi être entiers, rationnels ou réels).

On notera :

$$\prod_{i\in I} a_i \quad \text{le produit des nombres } a_i \text{ de la famille } (a_i)_{i\in I}$$

Lorsque $I = [\![m, n]\!]$ avec $m \leq n \in \mathbb{Z}$, cette quantité sera notée : $\displaystyle\prod_{i=m}^{n} a_i = a_m \times a_{m+1} \times \cdots \times a_n$

Ce produit comporte $n - m + 1$ facteurs.

`Exemple 18.` $(*)$ Pour $p,\ q,\ n \in \mathbb{N}^*$:

- $\displaystyle\prod_{i=q}^{p} 2 = 2^{p-q+1}$
- $\displaystyle\prod_{k=-1000}^{1000} k\ln(1+|k|) = 0$

Exercice : 6

$(*)$ Soit $n \geq 4$. Calculer : $\displaystyle\prod_{k=4}^{n}(1-\frac{1}{4})$.

Remarque 9. Un produit est nul dès lors qu'un de ses facteurs est nul.

Définition 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On note "factorielle n" la quantité suivante :

$$n! = 1\times 2\times 3\cdots\times n = \prod_{k=1}^{n} k \quad \text{et on admettra que} \quad 0! = 1$$

`Exemple 19.` $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Ecrire les produits suivants à l'aide de factorielles :

1. $P_1 = \displaystyle\prod_{k=1}^{p}(n-k+1)$
2. $P_2 = \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\ k \text{ pair}}}^{2n+1} k$
3. $P_3 = \displaystyle\prod_{\substack{k=1\\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k$

Définition 9 : **Produits télescopiques**
Un produit télescopique est un produit de la forme : $\displaystyle\prod_{k=m}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k}$.

Ces sommes se simplifient facilement :

$$\prod_{k=m}^{n}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_m}$$

`Exemple 20.` $(*)$ Calculer les produits suivantes :

- $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$
- $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-1}$

Exercice : 7

(∗) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculez le produit : $\displaystyle P_n = \prod_{k=2}^{n} (1 - \frac{1}{k^2})$

Proposition 8 : Comment se ramener à une somme ?
Lorsque tous les a_k sont strictement positifs et $m \leq n \in \mathbb{Z}$:

$$\ln \left(\prod_{k=m}^{n} a_k \right) = \sum_{k=m}^{n} \ln(a_k)$$

`Exemple 21.` (∗) Calculer : $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{k(k+1)}}$

Proposition 9 : Règles de calcul
Lorsque tous les a_k et les b_k sont des complexes, $n \in \mathbb{N}$ et I un ensemble fini non nul :

$$\prod_{k\in I} a_k b_k = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)\left(\prod_{k\in I} b_k\right) \quad \text{et} \quad \prod_{k\in I} a_k^n = \left(\prod_{k\in I} a_k\right)^n$$

Preuve 9 : Il suffit de l'écrire.

Remarque 10. ⚠ Contrairement au cas des sommes, on a : $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-m+1} \prod_{k=m}^{n} a_k$

Travail à effectuer :

Prenez une feuille de brouillon et vérifiez que vous êtes capables de développer chacun des points suivants :

☐	Propriétés	Produits de produits - Puissance d'un produit
☐	Formules	Produits télescopiques
☐	Exercices	Savoir exprimer à l'aide de factorielles : $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}(n-k+1)$ - $\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} k$ - $\displaystyle\prod_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} k$
☐	Méthodes	Comment "transformer" un produit en somme

2 Les coefficients binomiaux

Définition 10 : Coefficients binomiaux
Soient $n,\ p \in \mathbb{N}$..

Le "coefficient binomial $(n,\ p)$" ou "p parmi n" est noté $\displaystyle\binom{n}{p}$.

Il est défini par :

1. Lorsque $p \leq n$: $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$
2. Lorsque $p > n$: $\displaystyle\binom{n}{p} = 0$

Remarque 11. $\binom{n}{p}$ représente le nombre de façons de choisir p éléments parmi n sans ordre ni remise. Il s'agit donc en particulier d'un entier naturel (cf la démonstration utilisant la formule d'additivité).

Théorème 10 : Propriétés des coefficients binômiaux
Soient $0 \leq p \leq n$ deux entiers. Les coefficients binômiaux vérifient les propriétés suivantes :

— ***Premiers termes*** :

1. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$
2. $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$
3. $\binom{n}{2} = \binom{n}{n-2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

— ***Symétrie*** : $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

— ***Evolution*** : $\left(\binom{n}{k}\right)_{k\in[\![1,n]\!]}$ est $\begin{cases} \textit{strict}^t \text{ croissante jusqu'à } k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \\ \textit{strict}^t \text{ décroissante de } k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \text{ à } k = n \end{cases}$

Preuve 10 : Simples calculs ...
Pour l'*évolution*, on s'intéresse au rapport $\binom{n}{k}/\binom{n}{k-1}$ dans les cas où n est pair et où n est impair.

Structure des coefficients binômiaux (cas pair)	Structure des coefficients binômiaux (cas impair)

Proposition 11 : Formules
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$:

1. *Factorisation* : $\binom{n}{p} = \dfrac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$ (si $p \geq 1$)
2. *Additivité* : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

Preuve 11 : Simples calculs ...

`Exemple 22.` A l'aide de la formule d'additivité et d'un raisonnement par récurrence, retrouver le fait que les coefficients binomiaux sont des entiers naturels.

Exercice : 8
$(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $p \in [\![0, n]\!]$.
   A l'aide de la formule d'additivité, trouver une suite (a_n) telle que $\binom{k}{p} = a_{k+1} - a_k$.
   En déduire la formule de Pascal :
   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$$
   Interpréter cette formule en utilisant le triangle de Pascal.
2. En déduire la somme des n premiers entiers.
3. En recherchant a et b tels que $k^2 = a\binom{k}{2} + b\binom{k}{1}$, déterminer la somme des carrés des n premiers entiers.

Remarque 12. De l'additivité, on obtient le *triangle de Pascal* qui permet de calculer de proche en proche tous les coefficients binômiaux.

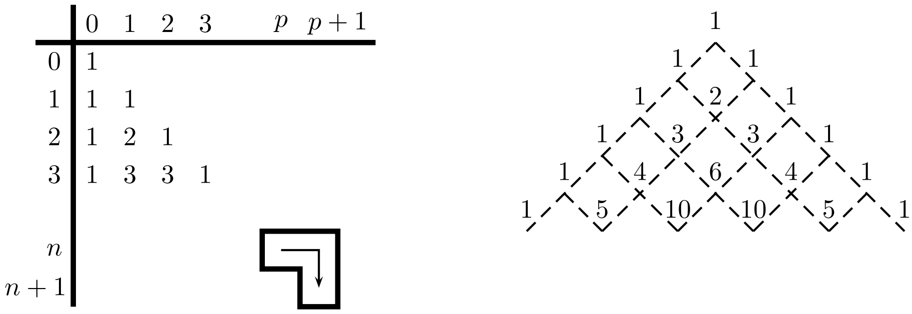


FIGURE 1 – Triangle de Pascal et Expérience de Galton

THÉORÈME 12 : Formule du binôme de Newton
Soient deux réels $a,\ b \in \mathbb{R}$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Preuve 12 :

1. Méthode 1 : Par récurrence (Bon entraînement au calcul sur des sommes).
2. Méthode 2 : Par dénombrement (Facile).

Remarque 13. La formule du binôme de Newton est très souvent utilisées.
Comme le montre les exemples suivants, elle permet en particulier, de calculer des sommes faisant intervenir des coefficients binômiaux.

THÉORÈME 13 : Nombre de parties d'un ensemble
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est donné par la formule : $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$

Preuve 13 : Application simple de la formule du binôme.

`Exemple 23.` $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer : $\displaystyle S_1 = \sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n.2^{n-1}$ et $\displaystyle S_2 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3^k}\binom{n}{k}$

Exercice : 9

$(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3$ en utilisant la quantité $u_k = (k+1)^4 - k^4$.

En déduire une méthode générale pour déterminer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^p$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice : 10

$(**)$ Calculer les sommes :

1. $\displaystyle S_1 = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$
2. $\displaystyle S_2 = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$

On s'intéressera à $\begin{cases} S_1 + S_2 \\ S_1 - S_2 \end{cases}$

Exercice : 11

$(**)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

1. $\displaystyle\sum_{0 \leq k,\ p \leq n} \binom{n}{p}\binom{n}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{p} i\binom{n}{j}(\sqrt{2})^j$

Exercice : 12

$(***)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$\sum_{A \subset [\![1,n]\!]} \Big(\sum_{i \in A} i \Big) = 2^{n-2} n(n+1)$$

Travail à effectuer :

Prenez une feuille de brouillon et vérifiez que vous êtes capables de développer chacun des points suivants :

☐	Définitions	$\binom{n}{k}$: formule + nombre de combinaisons
☐	Propriétés	Symétrie - Evolution
☐	Formules	Formules de factorisation, d'addition, de Pascal, du binôme de Newton et donnant le nombre de parties d'un ensemble.
☐	Exercices	Savoir calculer : $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ - $\displaystyle\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$ - $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$ - $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$
☐	Démonstrations	La formule du binôme de Newton par récurrence
☐	Méthodes	Savoir utiliser le traingle de pascal pour calculer rapidement des coefficients binômiaux.

3 Calcul de déterminants

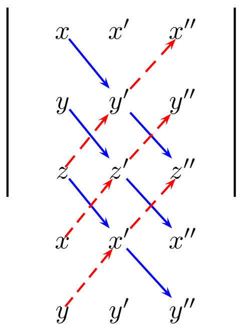
PROPOSITION 14 : Expression d'un déterminant 2x2

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x & x' \\ y & y' \end{pmatrix}$ est : $\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = x.y' - y.x'$

`Exemple 24.` $(*)$ Vérifiez que : $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 13$

PROPOSITION 15 : Expression d'un déterminant 3x3

Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{pmatrix}$ est : $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x'' - xz'y'' - yx'z''$



Règle de Sarrus :	Autre Méthode de calcul :

`Exemple 25.` $(*)$ Prouver que :

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -18$
2. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$
3. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Applications usuelles du déterminant :

Le déterminant sert en particulier :

1. A vérifier si une matrice est inversible et éventuellement, à calculer l'inverse de cette matrice
2. A vérifier si un système linéaire carré admet une unique solution
3. A vérifier si n vecteurs d'un espace vectoriel de dimension n sont linéairement indépendants
   - colinéaires en dimension 2
   - coplanaires en dimension 3

`Exemple 26.` Pour quelle(s) valeur(s) de λ le système suivant admet une unique solution ? $\begin{cases} x - \lambda z = 0 \\ y + \lambda z = 1 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$

Remarque 14. Nous verrons en cours d'année comment calculer des déterminants de taille supérieure.

Travail à effectuer :

Prenez une feuille de brouillon et vérifiez que vous êtes capables de développer chacun des points suivants :

☐	Formules	Calcul d'un déterminant 2x2 et 3x3
☐	Exercices	Refaire les calculs de l'exemple précédent.
☐	Méthodes	Utiliser le déterminant pour savoir si un système linéaire admet une unique solution

4 Systèmes linéaires

On considère le système linaire de n équations à p inconnues : $(S)\ \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$

On appelle alors $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$.

Ainsi, on pourra plus simplement noter le système (S) : $AX = B$ (cf le cours sur la multiplication des matrices).
Ou encore :

$$(S) \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & | & b_1 \\ a_{21} & \vdots & & a_{2p} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} & | & b_n \end{pmatrix}$$

Définition 11 : Vocabulaire lié aux systèmes

1. *Résoudre* (S) consiste à trouver l'ensemble $\mathbb{S}$ de **tous** les p-uplets $(x_1, \ \dots, \ x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant (S).
2. Le vecteur $B \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ s'appelle le *vecteur second membre* du système.
3. Le vecteur $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ s'appelle le *vecteur inconnu* du système.
4. On appelle *système homogène* (S_0) associé à (S), le système obtenu en prenant $B = 0$.
   On note $\mathbb{S}_0$ l'ensemble des solutions du système homogène.
5. La matrice A s'appelle la *matrice* du système.
6. Le déterminant de A s'appelle le *déterminant* du système.
7. On dit que le système est *compatible* si l'ensemble des solutions est non-vide.

Remarque 15.

1. Dans $\mathbb{R}^2$:
   les solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array} \right.$ sont les points d'intersection des deux droites $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_1 : ax+by=c \\ \mathcal{D}_2 : dx+ey=f \end{array} \right.$.
2. Dans $\mathbb{R}^3$:
   les solutions du système $\left\{ \begin{array}{l} ax+by+cz=d \\ ex+fy+gz=h \end{array} \right.$ sont les points d'intersection des deux plans $\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 : ax+by+cz=d \\ \mathcal{P}_2 : ex+fy+gz=h \end{array} \right.$.

Que pouvez-vous dire des différents ensembles de solutions possibles ?

Proposition 16 : Structure de l'ensemble des solutions
Soit $AX = B$ un système compatible de solution particulière X_0.
L'ensemble des solutions est alors :

$$\mathbb{S} = X_0 + \mathbb{S}_0 = \{X_0 + X \mid X \text{ est solution du système homogène associé}\}$$

Preuve 16 : Par équivalences successives en admettant la factorisation des matrices.

Remarque 16. Nous venons en fin d'année que cet ensemble a une structure de *sous-espace affine*.

Proposition 17 : Unicité de la solution
Un système carré $AX = B$ admet une unique solution ssi $\det A \neq 0$.

Preuve 17 : Admis pour l'instant.

Remarque 17.

1. Un système carré qui n'admet qu'une solution est appelé un *système de Cramer*.
2. Ce théorème est très souvent utilisé lorsqu'on veut prouver l'existence d'une unique solution sans avoir besoin de la chercher.

Remarque 18. Lorsqu'un système n'admet qu'une unique solution $(a_1, \ a_2, \dots, a_n)$, l'ensemble des solutions s'écrira de la façon suivante :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(a_1, \ a_2, \ \dots, \ a_n)\}}$$

4.1 Pivot de Gauss

Un système linéaire se résout à l'aide de la méthode du "Pivot de Gauss".

Définition 12 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{C}^*$.
On appelle << opération élémentaire sur les lignes >> d'un système l'une des 3 opérations suivantes :

1. Echanger deux lignes : $L_i \leftrightarrow L_j$
2. Remplacer une ligne L_i par $\lambda.L_i$ $\qquad L_i \leftarrow \lambda.L_i$
3. Remplacer une ligne L_i par $L_i + \lambda.L_j$ $\qquad L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$

THÉORÈME FONDAMENTAL 18 :
On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système en effectuant une opération élémentaire sur les lignes

Preuve 18 :

1. Les solutions d'un système sont indépendantes de l'ordre des équations.
2. X vérifie $L_i \iff X$ vérifie $\lambda.L_i$.
3. X vérifie L_i et $L_j \iff X$ vérifie $L_i + \lambda.L_j$ et L_j.

Remarque 19.

1. Pour effectuer sans se tromper les opérations précédentes, on veillera à ordonner les inconnues et à les placer les unes au dessous des autres.
2. On utilisera le théorème précédent pour transformer le système $AX = B$ en un système simple à résoudre. Le plus souvent, on transformera (S) en un système triangulaire. Cette technique s'appelle la méthode de GAUSS.

Régles à respecter dans l'application de la méthode de GAUSS

1. Ordonner et aligner les inconnues
2. Si possible, choisir pour première équation celle dont le coefficient de la première inconnue est "1"
3. Utiliser l'inconnue de la première équation pour éliminer cette inconnue dans les autres équations à l'aide des OEL
4. Ré-appliquer la technique précédente au sous-système obtenu et ainsi de suite...
5. Une fois le système triangularisé, déterminer les valeurs des inconnues en partant de la dernière.

`Exemple 27.` $(*)$ Résoudre le système suivant : $(S)\quad \begin{cases} -2x+y+z-t &= 1 \\ z-2y+x &= 0 \\ x-2z+t &= -1 \\ y+2t-z &= 1 \end{cases}$

Remarque 20. Dans le cas d'un système de cramer, on aboutit à un système triangulaire à coefficients diagonaux non nuls de la forme :

$$(S)\quad \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & \cdots & a'_{1n} & | & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \dots & \cdots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ 0 & 0 & a'_{33} & \dots & & | & b'_3 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & | & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a'_{nn} & | & b'_n \end{pmatrix}$$

Cas où il y a "trop" d'inconnues
Si, après avoir triangularisé le système, le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, on trouve les solutions du système en attribuant aux inconnues supplémentaires le statut de *paramètre*.
On recherche alors les autres inconnues en fonction de ces paramètres.

`Exemple 28.` $(*)$ Résoudre les systèmes suivants :

1. $(S1)\quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3+3x_4 &= 3 \\ 2x_1-x_2+x_4 &= 1 \\ -x_1+2x_2+2x_3+x_4 &= 3 \end{cases}$
2. $(S2)\quad \begin{cases} mx+y+z+t &= 1 \\ x+my+z+t &= m \\ x+y+mz+t &= m+1 \end{cases}$

Remarque 21. Ensemble des solutions :
Lorsque le système admet une infinité de solutions (dépendant par exemple de deux paramètres λ et μ), on pourra écrire son ensemble de solutions sous la forme :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(f_1(\lambda,\ \mu),\ f_2(\lambda,\ \mu), \dots, f_n(\lambda,\ \mu)) \mid (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Cas d'un système sans solution
Dans certains cas, la triangularisation aboutit à une équation impossible.
Dans ce cas le système n'admet pas de solutions.

`Exemple 29.` $(*)$ Résoudre le système suivant : $(S)\quad \begin{cases} x+2y-z & =-4 \\ 2x+y+z & =1 \\ x-y+z & =4 \\ 2x-2y+7z & =3 \end{cases}$

Remarque 22. Ensemble des solutions :
Lorsque le système n'admet pas de solution, l'ensemble des solutions s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$$

Remarque 23. Un système peut aussi se résoudre "par substitution".
Cependant, cette méthode n'est employée en pratique que pour des systèmes très simples ou très petits.

4.2 Exercices

Exercice : 13

$(*)$ Résoudre les systèmes suivants :

$$S_1 \begin{cases} x+z & =2 \\ x+3y-2z & =0 \\ x+y-z & =1 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} y-z & =1 \\ x+y+z & =0 \\ x+2y & =-1 \end{cases} \qquad S_3 \begin{cases} x+z & =1 \\ x-y+z & =3 \end{cases} \qquad S_4 \begin{cases} -x+y+z & =1 \\ x+y+z & =0 \\ x+y-z & =2 \end{cases}$$

Exercice : 14

$(**)$ Résoudre les systèmes suivants en discutant selon les valeurs des paramètres réels $a,\ b,\ c$:

$$S_1 \begin{cases} x+y+z & =a \\ x+y-2z & =b \\ x+y-3z & =c \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} ax+y+z & =1 \\ x+ay+z & =0 \\ x+y+az & =-1 \end{cases} \qquad S_3 \begin{cases} x+ay+a^2z & =1 \\ x+by+b^2z & =0 \\ x+cy+c^2z & =1 \end{cases} \qquad S_4 \begin{cases} -x+y+z & =1 \\ x-y+z & =b \\ x+y-z & =b^2 \end{cases}$$

Exercice : 15

$(*)$ Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite de l'espace d'équations cartésiennes : $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+y-z=0 \end{cases}$.

Exercice : 16

$(**)$ Soit $m\in\mathbb{R}$. Dans l'espace muni d'un repère :
Déterminer l'intersection de la droite : $D\ :\ \begin{cases} mx+2y+3z=3 \\ (m-1)x+my+z=1 \end{cases}$ et du plan $P\ :\ (m+1)x+my+(m-1)z=m-1$

Travail à effectuer :

Prenez une feuille de brouillon et vérifiez que vous êtes capables de développer chacun des points suivants :

☐	Définitions	Savoir reconnaître un système linéaire - Système de Cramer Savoir utiliser le vocabulaire lié aux systèmes.
☐	Propriétés	Unicité de la solution d'un système carré linéaire à l'aide du déterminant
☐	Exercices	Appliquer GAUSS pour résoudre les systèmes traités en classe
☐	Méthodes	- Savoir parfaitement appliquer la méthode de Gauss - Recherche d'un ensemble par équivalences successives - Preuve de l'égalité de 2 ensembles

5 Exercices de TD

Rappel Méthodologique :

La résolution d'un exercice passe en général par les étapes de réflexion suivantes :

1. Appropriation des données de l'exercice :
   Un exercice commence par introduire des données sur lesquelles vont porter les questions. Il faut prendre le temps de bien assimiler ces différentes données et leurs particularités. Pour s'aider dans ce travail, on pourra en particulier utiliser des schémas ou des représentations graphiques. On peut aussi dès cette étape d'appropriation, effectuer des déductions immédiates qui seront probablement utiles pour résoudre les questions qui suivent.

2. Identification de la forme de la question donnée :
   Selon la formulation de la question, il existe des méthodes spécifiques de raisonnement. Ces méthodes peuvent être générales (voir le tableau distribué en début d'année) ou bien spécifiques au chapitre concerné. On choisit alors judicieusement une méthode parmi toutes celles qui sont envisageables : ce choix devient de plus en plus facile au fur et à mesure que l'on pratique le raisonnement mathématique.

3. La méthode générale étant choisie, soit le raisonnement se fait alors naturellement, soit il faut rechercher dans le cours des théorèmes susceptibles de nous aider à répondre à la question.

4. On commence alors la rédaction et éventuellement les calculs...

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs $\heartsuit$ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs $\heartsuit$ correspond à la difficulté des exercices.

5.1 Sommes et Produits

Pour le calcul d'une somme simple, il est nécessaire de connaître :

1. Les formules usuelles :
   $1+2+\cdots+n=\ldots$ ou $1+2^2+\cdots+n^2=\ldots$ ou $1+k+k^2+\cdots+k^n=\ldots$
2. Les techniques de transformations usuelles :
   - Mise sous la forme d'une somme télescopique
   - Changement d'indice : translation ou inversion
   - Linéarité de la somme

Dans le cas d'une somme double, on :

- regarde s'il s'agit d'une somme rectangulaire, triangulaire ou triangulaire stricte
- applique les techniques de calcul adaptées.

Savoir également comment décomposer une somme rectangulaire en sommes triangulaires.

Exercice de TD : 1

($\heartsuit$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes : $S_1 = \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$ et $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Exercice de TD : 2

($\heartsuit\heartsuit$) Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $S_1 = \sum_{1\leq i,\ j\leq n} |i-j|$
2. $\sum_{0\leq i,\ j\leq n} (i+j)$
3. $\sum_{0\leq i\leq j\leq n} (i+j)$

Exercice de TD : 3

($**$) Soit $n \geq 2$ et $(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec $x_{n+1} = x_1$.
Prouver que :

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k x_{k+1}$$

Aide pour $\Leftarrow$: on pourra multiplier par 2 l'égalité.

Exercice de TD : 4

($**$) Soit $a \in]0,\ 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a^k}{(1-a^k)(1-a^{k+1})}$.

On souhaite montrer que $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{a(1-a^n)}{(1-a)^2(1-a^{n+1})}$.

1. Procéder en calculant $(a-1)u_n$ et en faisant apparaître une somme télescopique.
2. Procéder par récurrence.

Exercice de TD : 5

($**$) On considère deux suites réelles (a_n) et (b_n) et on pose :

$$A = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B = \sum_{k=1}^{n} b_k, \quad C = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \quad \text{et} \quad D = \sum_{1 \leq j < k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$$

1. Montrer que $D = \dfrac{1}{2} \displaystyle\sum_{1 \leq j,k \leq n} (a_k - a_j)(b_k - b_j)$ et en déduire que $D = nC - AB$.
2. Comparer AB et nC lorsque les suites (a_n) et (b_n)
   — ont la même monotonie
   — ont des monotonie opposée

Exercice de TD : 6

($\heartsuit$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En effectuant le changement d'indice $j = n - k$, calculer la somme :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$$

Exercice de TD : 7

($**$) Pour $n \geq 2$, on considère le produit : $\quad P_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

1. Démontrer que : $\quad P_n = \dfrac{2}{n(n+1)} \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2+k+1}{k^2-k+1}$.
2. En remarquant que $k^2+k+1 = (k+1)^2 - (k+1) + 1$, en déduire une expression simplifiée de P_n.

5.2 Coefficients binomiaux

Exercice de TD : 8

($\heartsuit$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etablir l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k! \leq (n+1)!$

Exercice de TD : 9

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes doubles suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{n}{j}\binom{j}{i} a^i b^{j-i} c^{n-j}$
2. $S_n = \displaystyle\sum_{0 \leq i,j \leq n} \binom{i}{j}$

Exercice de TD : 10

($**$) Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $\dbinom{2n}{n} \geq \dfrac{4^n}{2n+1}$

Exercice de TD : 11

($**$) Soient n, p et q des entiers naturels tels que $n \leq p+q$.

En développant de deux manières différentes $(1+x)^p(1+x)^q$, calculer la somme : $S_n(p,q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k}$.

Aide : on rappelle que l'égalité de deux fonctions polynomiales entraîne l'égalité des coefficients.

Exercice de TD : 12

($\heartsuit\heartsuit$) En utilisant le produit : $(1+x)^n(1+x)^n$, démontrer l'égalité : $\dbinom{2n}{n} = \dbinom{n}{0}^2 + \dbinom{n}{1}^2 + \cdots + \dbinom{n}{n}^2$

Exercice de TD : 13

($**$) Calculer, pour tout $n,\ p \in \mathbb{N}$, la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p+k}{k}$.

Aide : On remarquera que $\binom{p}{0} = \binom{p+1}{0}$ et on pourra utiliser la formule d'addition.

Exercice de TD : 14

($**$) Démontrer qu'à partir d'un certain rang, on a : $\dfrac{2^{2n-1}}{n} \leq \dbinom{2n}{n} \leq 2^{2n-1}$

Exercice de TD : 15

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

En dérivant ou en primitivant la fonction $x \mapsto (1+x)^n$, calculer les sommes :

1. $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$
2. $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$
3. $S_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

Exercice de TD : 16

($**$) Soient $p,\ k,\ n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq k \leq n$.

1. Calculer : $S_1 = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{n-p}{k-p}\binom{n}{p}$
2. (a) En effectuant un calcul direct, montrer que : $\dbinom{n-p}{k-p}\dbinom{n}{p} = \dbinom{n}{k}\dbinom{k}{p}$.

   (b) En déduire la valeur de : $S_2 = \displaystyle\sum_{k=p}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}\binom{k}{p}$.

Exercice de TD : 17

($***$) Soient $n,\ p,\ q \in \mathbb{N}$.

1. En effectuant une récurrence sur p, démontrer la formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$.
2. En déduire les valeurs des sommes : $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ puis $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2$ en posant $j = n-k$.

5.3 Systèmes linéaires

Les sytèmes linéaires se résolvent à l'aide de la méthode de Gauss !
On peut savoir s'ils admettent une unique solution en vérifiant si leur déterminant est bien non nul.

Exercice de TD : 18

($\heartsuit\heartsuit$) Notons a, b, c, $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les élements caractéristiques d'un triangle ABC non trivial.

1. Montrer que l'on a : $\begin{cases} a = b\cos C + c\cos \hat{B} \\ b = c\cos A + a\cos \hat{C} \\ c = a\cos B + b\cos \hat{A} \end{cases}$.

2. Dans cette question, on considère que les inconnues du système ci-dessus sont $\cos \hat{A}$, $\cos \hat{B}$, $\cos \hat{C}$.
   Cela sous-entend que les longueurs a, b et c sont données.
   (a) Expliquer géométriquement pourquoi ce système admet une unique solution.
   (b) Retrouver ce résultat en calculant le déterminant du système.
   (c) Résoudre le système.

3. Maintenant on considère que les inconnues sont a, b, c. Les angles sont alors donnés.
   (a) Quel est selon vous la nature de l'ensemble des solutions ?
   (b) Prouvez-le en calculant le déterminant.
   (c) Résoudre le système.

Exercice de TD : 19

(♡) Calculer l'inverse de la matrice complexe A suivante : $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 2i \\ i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$.

Aide : on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$.

Il s'agit alors de déterminer la matrice B telle que les systèmes $AX = Y$ et $BY = X$ soient équivalents

Exercice de TD : 20

(♡♡) Soit $n \in \mathbb{N}$ supérieur ou égal à 2 et $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Résoudre dans $\mathbb{R}^n$ le système suivant : $\begin{cases} ax_1 + b = x_2 \\ ax_2 + b = x_3 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \\ ax_{n-1} + b = x_n \\ ax_n + b = x_1 \end{cases}$

Exercice de TD : 21

(∗) **Jeu Ouest-France**