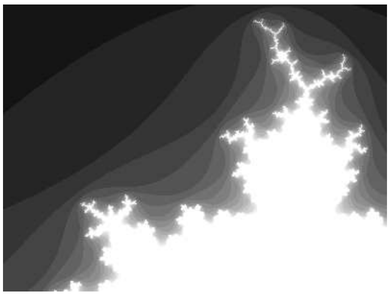
Les Nombres Complexes

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

23 septembre 2016



Les nombres complexes sont d'une grande utilité tant en mathématiques qu'en sciences physiques. Ils permettent en particulier l'étude de circuits électroniques en régime sinusoïdal et ils jouèrent un rôle déterminant dans la théorie de diffusion de la chaleur, de l'électricité et de la lumière développée par Maxwel.

1 Définitions

1.1 Le corps des complexes

DÉFINITION 1 : **Corps des Nombres Complexes**
On appelle "i" un nombre tel que $i^2 = -1$.

$$\text{L'ensemble } \mathbb{C} = \{a + i.b \mid (a,\ b) \in \mathbb{R}^2\} \text{ muni de } \left\{ \begin{array}{l} \text{l'addition usuelle} \\ \text{la multiplication usuelle} \end{array} \right. \text{ est appelé :}$$

le **Corps des nombres complexes**

$i\mathbb{R}$ est appelé l'ensemble des **imaginaires purs**.

Remarque 1. Le "nombre" i a été découvert au XVI^{ieme} siècle par Cardan lors d'une étude sur la résolution des équations du 3^{ieme} et 4^{ieme} degré.

Construction officielle de $(\mathbb{C},\ +,\ \times)$

1. Au départ, $\mathbb{C}$ est en fait l'ensemble des couples de nombres réels : $\mathbb{C} = \{(x,\ y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$.
2. Cet ensemble est alors muni des deux opérations (appelées *lois de composition internes*) suivantes :
   (a) $+$ définie par : $(x,\ y) + (a,\ b) = (x + a,\ y + b)$
   (b) $\times$ définie par : $(x,\ y) \times (a,\ b) = (xa - yb,\ xb + ya)$
3. On constate que $+$ et $\times$ vérifient les propriétés nécessaires pour donner à $\mathbb{C}$ la structure de "corps" (cf le cours sur les structures algébriques) : associativité, commutativité, existence d'éléments neutres, existence de symétriques.
4. Changement de notation :
   (a) L'élément $(0,\ 1)$ est noté i.
   (b) Les éléments de la forme $(x,\ 0)$ sont notés x.
   On constate que les complexes $(x,\ y)$ s'écrivent alors $x + i.y$
   (c) On vérifie également qu'avec ces nouvelles notations :
      i. on a alors bien $i^2 = -1$
      ii. les 2 relations qui définissent les 2 lois sont bien conservées.

Définition 2 : **Partie réelle, imaginaire**
Soit $z = a + ib$, un nombre complexe.
- $a = \mathrm{Re}(z)$ est la *partie réelle* de z
- $b = \mathrm{Im}(z)$ est la *partie imaginaire* de z.

Remarque 2.
1. L'expression $z = a + ib$ est appelée la *forme algébrique* du complexe z.
2. Deux complexes seront égaux si et seulement si ils ont les mêmes parties réelles et les mêmes parties imaginaires.

Proposition 1 : **La linéarité de** $\mathrm{Re}()$ **et de** $\mathrm{Im}()$
Soient $z,\ z' \in \mathbb{C}$.
On a alors :

1. $\mathrm{Re}(z + z') = \mathrm{Re}(z) + \mathrm{Re}(z')$
2. $\mathrm{Im}(z + z') = \mathrm{Im}(z) + \mathrm{Im}(z')$
3. $\mathrm{Re}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Re}(z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
4. $\mathrm{Im}(\lambda z) = \lambda\,\mathrm{Im}(z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Preuve 1 : Pas de difficulté.

Remarque 3. Dans quel cas peut-on affirmer que $\mathrm{Re}(z.z') = \mathrm{Re}(z).\,\mathrm{Re}(z')$?

Définition 3 : **Conjugué d'un complexe**
Soit $z = a + ib$ un nombre complexe. Le *conjugué* de z est le nombre complexe : $\boxed{\bar{z} = a - ib}$

Remarque 4. Remarquons que si $z = a + ib$ alors $z\bar{z} = a^2 + b^2 \in \mathbb{R}^+$.
On peut alors définir la division d'un complexe z par un complexe non nul z' de la façon suivante : $\dfrac{z}{z'} = z \times \dfrac{\bar{z'}}{z'\bar{z'}}$

Théorème 2 : $\forall (z,\ z') \in \mathbb{C}^2$, on a les propriétés suivantes :

1. $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$
2. $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$
3. $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}} \quad (z' \neq 0)$
4. $\bar{\bar{z}} = z$

Preuve 2 : Il suffit de faire les calculs à l'aide de la forme algébrique.

Remarque 5. On dit que la propriété B est *une caractérisation* de la propriété A si l'on a : $A \iff B$.
Les caractérisations sont très intéressantes en pratique car elles donnent d'autres approches possibles (et souvent plus simples) pour démontrer une propriété donnée.

Théorème 3 : **Caractérisation de l'égalité de 2 complexes**
Soit $z,\ z' \in \mathbb{C}$, on a :

1. $z = z' \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}$
2. $z = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = 0 \\ \mathrm{Im}(z) = 0 \end{cases}$

Preuve 3 : Immédiat compte-tenu de la définition d'un complexe.

`Exemple 1.` $(*)$ Trouver les complexes vérifiant la relation : $z + i\bar{z} = 2$

Proposition 4 : **Caractérisation des réels et des imaginaires purs**

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $\boxed{\mathrm{Re}(z) = \dfrac{z+\overline{z}}{2}}$ et $\boxed{\mathrm{Im}(z) = \dfrac{z-\overline{z}}{2i}}$

On en déduit des caractérisations du fait qu'un complexe soit réel ou imaginaire pur :

$$\begin{cases} z \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z} = z \quad \Longleftrightarrow \quad z - \bar{z} = 0 \\ z \in i\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z} = -z \quad \Longleftrightarrow \quad z + \bar{z} = 0 \end{cases}$$

Preuve 4 : Immédiat.

Remarque 6. Ainsi, pour prouver que :

1. z est un réel, on pourra calculer $\bar{z} - z$ et montrer que cette quantité est nulle.
2. z est un imaginaire pur, on pourra calculer $\bar{z} + z$ et montrer que cette quantité est nulle.

`Exemple 2.` $(*)$ Trouver tous les complexes z tels que $\dfrac{z+1-i}{z+1} \in \mathbb{R}$.

1.2 Le plan complexe

Définition 4 : **Affixe, image**
Ici, le plan $\mathcal{P}$ (affine ou vectoriel) est supposé muni d'un repère orthonormé direct $R(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Les applications $\begin{cases} f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ a+ib & \mapsto & M(a,\ b) \end{array} \\ \\ f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathcal{P} \\ a+ib & \mapsto & \overrightarrow{u}(a,\ b) \end{array} \end{cases}$ sont des bijections de $\mathbb{C}$ dans $\mathcal{P}$.

1. Si $M(a,\ b)$ est un point de $\mathcal{P}$ alors le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé *affixe* de M.
2. Si $\overrightarrow{u}(a,\ b)$ un vecteur de $\mathcal{P}$ alors le nombre complexe $z = a + ib$ est appelé *affixe* de $\overrightarrow{u}$.
3. Si $z = a + ib$ un élément de $\mathbb{C}$ alors le point $M(a,\ b)$ de $\mathcal{P}$ est appelé le *point image* de z.
4. Si $z = a + ib$ un élément de $\mathbb{C}$ alors le vecteur $\overrightarrow{u}(a,\ b)$ de $\mathcal{P}$ est appelé le *vecteur image* de z.

Remarque 7.

1. Du fait de l'existence des bijections précédentes, il pourra parfois nous arriver de confondre un point M (ou un vecteur $\overrightarrow{u}$) et son affixe z.
2. On appellera *plan complexe* le plan affine (resp : vectoriel) muni d'un repère orthonormé direct (resp : d'une base orthonormée directe) où les points (resp : vecteurs) sont repérés par leurs affixes.

Affixe d'un point M du plan.	Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{u}$ du plan.	Affixe d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$ du plan.

Remarque 8. M et $\overrightarrow{OM}$ ont les mêmes coordonnées : ils ont donc la même affixe.

Remarque 9. Reconnaître les transformations du plan suivantes :

$f:\ z \mapsto \bar{z}$	$f:\ z \mapsto -z$	$f:\ z \mapsto -\bar{z}$

PROPOSITION 5 : Soient $\overrightarrow{u}_1$ et $\overrightarrow{u}_2$ deux vecteurs d'affixes respectives z_1 et z_2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Alors le vecteur somme $\overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{u}_2$ a pour affixe $z_1 + z_2$ et le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}_1$ a pour affixe λz_1.

Preuve 5 : Il suffit de faire les calculs.

Remarque 10. Soit $u \in \mathbb{C}$. La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z+u \end{array}$ représente la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe u.

`Exemple 3.` A quoi correspondent les transformations du plan d'expressions complexes suivantes : $\begin{cases} f:\ z \mapsto \bar{z}+i \\ g:\ z \mapsto 1-\bar{z} \end{cases}$?

1.3 Module d'un complexe

DÉFINITION 5 : **Module d'un nombre complexe**
C'est le réel défini par

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2+b^2}} \qquad (= \sqrt{z\bar{z}})$$

Si M est le point d'affixe z, alors $|z|$ représente la distance $\|\overrightarrow{OM}\|$.
Si $\overrightarrow{u}$ est le vecteur d'affixe z, alors $|z|$ représente $\|\overrightarrow{u}\|$.
Si A est le point d'affixe a, $|z-a|$ représente alors la distance $\|\overrightarrow{AM}\|$.

Remarque 11. Un complexe z et son conjugué ont le même module : $|z| = |\bar{z}|$

Interprétation géométrique :	L'ensemble $\{M(z) \mid |z-a| = r\}$	L'ensemble $\{M(z) \mid |z-a| \leq r\}$

Remarque 12. Si $z \in \mathbb{R}$, le module se confond avec la valeur absolue.

`Exemple 4.` Déterminer une caractérisation complexe du cercle de centre $\Omega(\omega)$ et de rayon R.

PROPOSITION 6 : **Propriétés du module**
Pour tout $(z,\ z') \in \mathbb{C}^2$ (avec éventuellement $z' \neq 0$) et $\lambda \in \mathbb{R}$, nous avons les propositions suivantes :

1. $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$
2. $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ (si $z \neq 0$)
3. $|z.z'| = |z|.|z'|$
4. $|\lambda.z| = |\lambda|.|z|$
5. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
6. $\left|z+z'\right|^2 = |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\big(z.\bar{z'}\big) + |z'|^2$

Preuve 6 : Il suffit de faire les calculs en pensant à utiliser la relation $|z|^2 = z.\bar{z}$

`Exemple 5.` $(*)$ Soient a et b, deux complexes de module 1. Démontrer que $\dfrac{(a+b)^2}{ab},\ \dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.

Exercice : 1

$(*)$ A résoudre par "équivalences successives" :

1. Prouvez que pour tout $x,\ y \in \mathbb{C}^*$, on a : $\left|\dfrac{x}{|x|^2} - \dfrac{y}{|y|^2}\right| = \dfrac{|x-y|}{|x||y|}$
2. Si $a,\ b$ et c sont des complexes de module 1, prouver que : $|ab+bc+ca| = |a+b+c|$
3. Soit $a,\ b \in \mathbb{C}$. Montrer que : $|a| + |b| \leq |a+b| + |a-b|$.

PROPOSITION 7 : **Inégalité entre module et parties réelle-imaginaire**
Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$.
On a les inégalités suivantes : $\big|\mathrm{Re}(z)\big| \leq |z|$ et $\big|\mathrm{Im}(z)\big| \leq |z|$

Preuve 7 : Par équivalences successives en exprimant $z = a + ib$ et en élevant les relations au carré. Attention cependant à vérifier les équivalences.

Dans quels cas a-t-on des égalités ?

THÉORÈME FONDAMENTAL 8 : **Inégalités triangulaires**
Pour tout $z,\ z' \in \mathbb{C}$, on a :

$$\Big||z| - |z'|\Big| \quad \leq \quad |z+z'| \quad \leq \quad |z| + |z'|$$

Lorsque $z' \neq 0$, on a $|z+z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z = \lambda z'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

Preuve 8 :

1. On commence par démontrer la deuxième inégalité en l'élevant au carré (vérifier l'équivalence !) et en utilisant la proposition précédente.
2. On procède de même pour la première.
3. On a : $|z+z'| = |z| + |z'| \Longleftrightarrow \mathrm{Re}(z\bar{z}') = |z\bar{z}'| \Rightarrow z\bar{z}' \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow z = \lambda z'$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^+$.
   On traite alors la réciproque...

Remarque 13. Que peut-on en déduire sur les longueurs des côtés d'un triangle ?

$\lvert z+z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$	$\Big\lvert\lvert z\rvert - \lvert z'\rvert\Big\rvert \leq \lvert z+z'\rvert$

`Exemple 6.` ($*$) Pour tout complexe a et b, montrer que : $|1+a|+|a+b|+|b| \geq 1$

Exercice : 2

($**$) Prouver que pour tout $x,\ y,\ z \in \mathbb{C}$, on a : $|x||y-z| \leq |y||z-x|+|z||x-y|$.
En déduire l'inégalité de Ptolémée :

$$\forall x,\ y,\ z,\ t \in \mathbb{C}, \quad \text{on a : } |x-y||z-t| \leq |x-z||y-t|+|x-t||y-z|$$

Corollaire 9 :
Pour n complexes $z_1, \dots, z_n$ quelconques, on a :

$$|z_1+\cdots+z_n| \ \leq \ |z_1|+\cdots+|z_n|$$

Preuve 9 : Cette inégalité se déduit de l'inégalité triangulaire par récurrence.

Exercice : 3

($**$) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.
Prouver que les solutions complexes de l'équations $pz^p = z^{p-1}+\cdots+z^2+z+1$ sont toutes de module inférieur à 1.
Aide : vous pourrez utiliser le fait que si $x > 1$ alors $x^k < x^{p-1}$ pour tout $k \in [\![0, p-1]\!]$.

Théorème 10 : **Groupe** $(\mathbb{U}, \times)$
Soit $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 : $\boxed{\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}}$

Cet ensemble :
1) Possède l'élément 1 (élément neutre pour la multiplication).
2) Est stable par multiplication (si z et z' sont de module 1 alors $z.z'$ est de module 1).
3) Est stable par inversion (si z est de module 1, alors $\dfrac{1}{z}$ existe et est de module 1).

Comme d'autre part, $\times$ est associative, $\mathbb{U}$ muni de la multiplication a une structure de groupe.

Preuve 10 : Les 3 propriétés citées sont facilement vérifiables.
Nous verrons plus en détail la structure de groupe dans le chapitre sur les structures algébriques.

2 Exponentielle imaginaire et applications en trigonométrie

2.1 L'exponentielle imaginaire

Définition 6 : **Exponentielle imaginaire**
Soit θ un réel quelconque. On note

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i.\sin\theta}$$

Remarque 14. On note $j = e^{\frac{i2\pi}{3}}$ ou plutôt $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

Proposition 11 : **Calculs avec l'exponentielle imaginaire**
Soient θ et θ' des réels quelconques.

1. $|e^{i\theta}| = 1$
2. $\overline{e^{i\theta}} = \dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
3. $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$
4. $-1 = e^{i\pi}$
5. $e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
6. $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

Preuve 11 : Ces résultats se démontrent sans difficulté à l'aide des formules trigonométriques.

PROPOSITION 12 : Soit θ un réel.

$$e^{i\theta} = 1 \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$$

Conséquence : $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \iff \theta = \theta' [2\pi]$.

Preuve 12 : Pas de difficulté.

LEMME 13 : Soient $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$. On a alors l'équivalence suivante :

$$a^2 + b^2 = 1 \iff \exists! \theta \in]-\pi,\ \pi] \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} a = \cos\theta \\ b = \sin\theta \end{cases}$$

Preuve 13 : La réciproque est immédiate.
Pour le sens direct, on commence par montrer que $a \in [-1,\ 1]$.

Remarque 15. Ce lemme est très régulièrement utilisé. Il est important de le connaître parfaitement.

`Exemple 7.` Prouver que pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de norme 1, il existe un unique $\theta \in]-\pi,\ \pi]$ tel que $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$.

THÉORÈME 14 : **Morphisme canonique** de $(\mathbb{R},\ +)$ dans $(\mathbb{U},\ \times)$

$$e\ :\ \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathbb{U},\times) \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array} \qquad \text{est un morphisme de groupes surjectif.}$$

Preuve 14 : e est un morphisme de groupes car :

1. $(\mathbb{R},\ +)$ et $(\mathbb{U},\ \times)$ ont une structure de groupes (voir cours sur les structures algébriques)
2. $e(\theta + \theta') = e(\theta) \times e(\theta')$

La surjectivité est une conséquence du lemme précédent.

Remarque 16.

1. Comme les antécédents de 1 (élément neutre pour la multiplication) sont les éléments de $2\pi\mathbb{Z}$ ($e(\theta) = 1 \iff \theta \in 2\pi\mathbb{Z}$), alors on dit que son noyau ($\ker e$) est $2\pi\mathbb{Z}$.
2. Comme $\{e(\theta),\ \theta \in \mathbb{R}\} = \mathbb{U}$, on dit que l'image de e ($\operatorname{Im} e$) est $\mathbb{U}$.

2.2 Formules et applications

THÉORÈME 15 : **Formules de Moivre**

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \boxed{e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n} \text{ c'est à dire } \boxed{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (cos\theta + i\sin\theta)^n}$$

Preuve 15 : Pour $n \in \mathbb{N}$, on démontre facilement par récurrence que $e^{in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^n$ puis que $e^{-in\theta} = \left(e^{i\theta}\right)^{-n}$.

Remarque 17. Le mathématicien français Abraham De Moivre (XVII ème siècle) est l'auteur de cette formule souvent attribuée injustement à Stirling.

APPLICATION : Pour exprimer $\cos n\theta$ ou $\sin n\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$.

1. On remarque que $\cos n\theta = \operatorname{Re}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n]$ et que $\sin n\theta = \operatorname{Im}[(\cos\theta + i\sin\theta)^n]$
2. Puis on utilise la formule du binôme pour développer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$
3. On en extrait alors la partie réelle et la partie imaginaire pour obtenir $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$.

`Exemple 8.` $(*)$ Soit $P(\theta) = \sin 6\theta \cos 4\theta$. Exprimer $P(\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice : 4

Polynômes de Tchebytchev.
Il est possible d'exprimer $\cos n\theta$ uniquement à l'aide de $\cos\theta$ sous la forme $T_n(\cos\theta)$.
$T_n(x)$ est un polynôme appelé le nième polynôme de Tchebychev.
Pour cela, il suffit de transformer les termes en $\sin\theta$ en utilisant la formule $\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta$.
Déterminer les 5 premiers polynômes de Tchebytchev.

THÉORÈME 16 : **Formules d'Euler**
Soit θ un réel quelconque. Alors :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \quad et \quad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

Preuve 16 : Immédiat !

Remarque 18. Leonhard Euler (1707-1783), de nationalité suisse, est l'un des plus talentueux mathématiciens. Il a découvert un nombre incroyable de formules.

`Exemple 9.` $(*)$ Soit $z \in \mathbb{U}$. Peut-on trouver un réel a tel que $z = \dfrac{1+ia}{1-ia}$?

Remarque 19. Ces formules permettent de linéariser (transformer des produits en sommes) des expressions trigonométriques. Cette transformation est particulièrement utile lors du calcul d'intégrales.

APPLICATION : Pour *linéariser* un produit de sinus et de cosinus :

1. On remplace les $\cos(a.\theta)$ et les $\sin(b.\theta)$ à l'aide des formules d'Euler.
2. On développe l'expression obtenue à l'aide de la formule du binôme.
3. On regroupe les termes conjugués entre eux.
4. On réutilise les formules d'Euler pour retrouver des cosinus et des sinus.

`Exemple 10.` $(*)$

1. Linéariser l'expression suivante : $P(x) = \sin 2x \cos^2 x$
2. Linéariser l'expression suivante : $P(x) = \cos x \cos^2 2x \cos^3 3x$.
   Réponse : $\dfrac{1}{32}(\cos 14x + \cos 12x + 2\cos 10x + 5\cos 8x + 4\cos 6x + 7\cos 4x + 9\cos 2x + 3)$

Exercice : 5

$(**)$ Linéariser $\cos^n\theta$ et $\sin^n\theta$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Remarque : Ceci est une question régulièrement rencontrée dans les problèmes !

TECHNIQUE très UTILE : Factorisation par l'angle moitié.

Cette technique est TRES utilisée (ex : recherche de la forme trigonométrique d'un complexe).
Remarquons que :

$$\boxed{\begin{cases} e^{ix}+e^{iy} = e^{\frac{i(x+y)}{2}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}}+e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right) = 2e^{i\frac{x+y}{2}}\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ e^{ix}-e^{iy} = e^{\frac{i(x+y)}{2}}\left(e^{\frac{i(x-y)}{2}}-e^{-\frac{i(x-y)}{2}}\right) = 2ie^{i\frac{x+y}{2}}\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \end{cases}} \quad \forall x,\ y \in \mathbb{R}$$

Remarque 20. En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on obtient :

1. $e^{ix}+1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}+e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2e^{\frac{ix}{2}}\cos\left(\frac{x}{2}\right)$
2. $e^{ix}-1 = e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{\frac{ix}{2}}-e^{-\frac{ix}{2}}\right) = 2ie^{\frac{ix}{2}}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$

TECHNIQUE : Pour retrouver les formules trigonométriques :

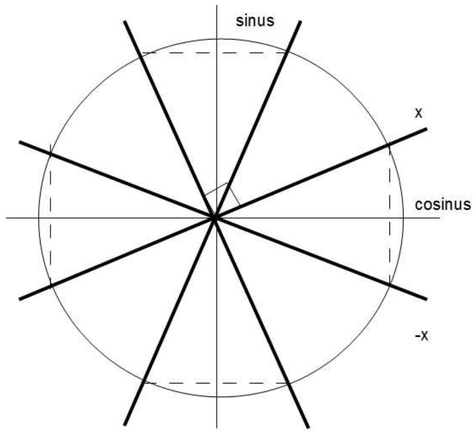
L'exponentielle imaginaire et les formules précédentes permettent de retrouver facilement les formules usuelles de trigonométrie. Retrouver ainsi les formules suivantes :

1. $\sin p + \sin q = \dots$
2. $\cos a \sin b = \dots$
3. $\cos(a+b) = \dots$

`Exemple 11.` Sauriez-vous retrouver la formule de factorisation de $\sin p + \cos q$?

Formules trigo de base

1. $\cos(\pi - x) = -\cos x$
2. $\cos(x+\pi) = -\cos x$
3. $\sin(\pi - x) = \sin x$
4. $\sin(x+\pi) = -\sin x$
5. $\cos(x+\frac{\pi}{2}) = -\sin x$
6. $\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin x$
7. $\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x$
8. $\sin(x-\frac{\pi}{2}) = -\cos x$



Les formules suivantes sont à connaître impérativement car elles permettent de retrouver la plupart des autres formules trigonométriques.

1. $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
2. $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$
3. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$
4. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2.\cos^2 a - 1 = 1 - 2.\sin^2 a$
5. $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$
6. $\tan 2a = \dfrac{2.\tan a}{1-\tan^2 a}$

Remarque 21. Saurez-vous en déduire les formules permettant de "développer" : $\cos(a-b)$, $\sin(a-b)$ et $\tan(a-b)$?

Caractérisation de l'égalité de deux sinus, de deux cosinus ou de deux tangentes

Nous avons :

$$\begin{array}{lcll}
\cos a = \cos b & \Longleftrightarrow & a = b[2\pi] \quad \text{ou} & a = -b[2\pi] \\
\sin a = \sin b & \Longleftrightarrow & a = b[2\pi] \quad \text{ou} & a = \pi - b[2\pi] \\
\tan a = \tan b & \Longleftrightarrow & a = b[\pi] &
\end{array}$$

Ces équivalences nous serons très utiles pour résoudre des équations trigonométriques.

`Exemple 12.` Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos 2x + 4\cos x + 3 = 0$
2. $\sin 2x = \cos(\pi - x)$
3. $\tan 2x = 1$

METHODE : Transformation de $a\cos t + b\sin t$ en $A\cos(t-\varphi)$

1. Il est évident que $A\cos(t-\varphi)$ peut s'écrire sous la forme $a\cos t + b\sin t$ (il suffit de développer !)
2. L'opération inverse est aussi possible en procédant ainsi :
   (a) On écrit : $a\cos t + b\sin t = \sqrt{a^2+b^2}\big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos t + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin t\big)$
   (b) On remarque alors que $\big(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\big)^2 + \big(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\big)^2 = 1$.
   D'après le lemme 13 précédent, il existe $\varphi \in]-\pi,\ \pi]$ tel que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$ et $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$.
   (c) Il ne reste plus qu'à appliquer la formule $\cos(a-b) = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b$.

   La valeur $A > 0$ est appelée l'amplitude du signal et φ est la phase.

`Exemple 13.` Déterminer l'amplitude et la phase des signaux : $f(t) = \cos t - \sin t$ et $g(t) = \cos t + \sqrt{3}\sin t$

METHODE : Pour calculer des sommes trigonométriques :

En remarquant que $\begin{cases}\cos\theta = \mathrm{Re}(e^{i\theta})\\ \sin\theta = \mathrm{Im}(e^{i\theta})\end{cases}$ on peut parfois se ramener à une expression de la forme $\sum_{k=0}^{n} a^k$.

Si $a \neq 1$ on peut alors utiliser la formule bien connue : $\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.

Pour simplifier le résultat obtenu et revenir à une expression réelle, on utilise la formule de factorisation par l'angle moitié et on extrait la partie réelle ou imaginaire.

Exercice : 6

$(**)$ Simplifier les expressions suivantes où $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos k$
2. $S_2 = \sum_{k=1}^{n} \sin^3(2.k)$
3. $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(1+2k)$

2.3 Argument d'un nombre complexe

Définition 7 : **Argument d'un nombre complexe**

Soit un nombre complexe z non-nul. Alors :

$$\text{Il existe un réel } \theta \text{ tel que} \quad : \quad z = |z|.e^{i\theta}$$

On dit que θ est un *argument* de z.

1. Les arguments de z sont tous égaux modulo 2π. Un argument quelconque sera noté $\arg(z)$.
   En général, on choisira pour argument, celui contenu dans $[0,\ 2\pi[$ ou dans $]-\pi,\ \pi]$.
2. L'expression $z = |z|.e^{i\theta}$ obtenue est appelée *la forme trigonométrique* ou *la forme exponentielle* de z.

Preuve : On considère le complexe $Z = \frac{z}{|z|}$ et on applique la surjectivité du morphisme e.

Remarque 22. Réciproquement : que dire si $z = \lambda e^{i\theta}$?
Réponse : $z = \lambda.e^{i\theta}$ est la forme trigonométrique d'un complexe, uniquement lorsque $\lambda > 0$.
Dans le cas où $\lambda < 0$, on pourra penser à écrire : $\lambda = -\lambda e^{i\pi}$ (dans ce cas, $-\lambda > 0$).

Pour déterminer l'argument d'un complexe :

On détermine l'argument d'un complexe en mettant celui-ci sous la forme : $z = |z|.e^{i\theta}$.
On a alors $\arg(z) = \theta[2\pi]$.
On pourra :

1. soit transformer z en mettant $|z|$ en facteur,
2. soit transformer z à l'aide des expressions complexes des différents facteurs.

`Exemple 14.` $(*)$ Déterminer le module et un argument de :

1. i
2. -1
3. $1+i$
4. $\sqrt{3}-i$
5. $z = 1+e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Exemple 15. $(*)$ Mettre les complexes suivants sous forme trigonométrique :

1. $z_1 = 2\cos^2\theta + i\sin 2\theta$ où $\theta \in [0;\ 2\pi]$.
2. $z_2 = \left(\dfrac{1+\cos\theta + i\sin\theta}{1+\cos\theta - i\sin\theta}\right)^n$ où $\theta \neq \pi[2\pi]$

Proposition 17 : **Caractérisation de l'égalité de deux complexes**
Soient z et z' deux complexes non nuls.
On a : $$z = z' \Longleftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z')[2\pi] \end{cases}$$

Preuve 17 : Pas de difficulté.

Proposition 18 : Soient $\begin{cases} (z,\ z') \in \mathbb{C}^{*2} \\ n \in \mathbb{N} \end{cases}$. On a alors : $\begin{cases} 1)\ \arg(z \times z') = \arg z + \arg z'\ [2\pi] \\ 2)\ \arg(z^n) = n.\arg(z)\ [2\pi] \\ 3)\ \arg(z^{-1}) = -\arg(z)\ [2\pi] \\ 4)\ \arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ [2\pi] \\ 5)\ \arg(z/z') = \arg z - \arg z'\ [2\pi] \end{cases}$

Preuve 18 : Pas de difficulté en utilisant la forme trigonométrique des complexes.

Remarque 23. Ces formules ressemblent de très près aux formules connues pour le logarithme népérien.

Exercice : 7
$(*)$ Soit $z,\ z' \in \mathbb{C}$. Prouver que $|z+z'| = |z-z'| \Longleftrightarrow \arg(z) = \arg(z') + \dfrac{\pi}{2}[\pi]$
Interpréter géométriquement ce résultat.

Proposition 19 : Interprétation géométrique
Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan d'affixe $u,\ v \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $\arg(u) = (\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{u})\ [2\pi]$.
2. $\arg(\dfrac{u}{v}) = (\overrightarrow{v},\ \overrightarrow{u})\ [2\pi]$.

Soient A, B, C et D d'affixes respectives $a,\ b,\ c$ et d. Alors :

1. $\arg(b-a) = (\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$.
2. $\arg(\dfrac{b-a}{d-c}) = (\overrightarrow{CD},\ \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$.

Preuve 19 : On démontre que $\arg(u) = (\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{u})\ [2\pi]$ en remarquant que $u = |u|\cos(\arg(u)) + i|u|\sin(\arg(u))$.
Les autres résultats s'en déduisent facilement.

$\arg(z)$	$\arg(z-a)$	$\arg\left(\dfrac{z-a}{z-b}\right)$

Proposition 20 : Soit $z \in \mathbb{C}^*$, on a :

1. $z \in \mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \arg(z) = 0\ [\pi]$.
2. $z \in \mathbb{R}^{+*} \Longleftrightarrow \arg(z) = 0\ [2\pi]$.
3. $z \in \mathbb{R}^{-*} \Longleftrightarrow \arg(z) = \pi\ [2\pi]$.
4. $z \in i\mathbb{R}^* \Longleftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$.
5. $z \in i\mathbb{R}^{+*} \Longleftrightarrow \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.
6. $z \in i\mathbb{R}^{-*} \Longleftrightarrow \arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Preuve 20 : Pas de difficulté en utilisant l'interprétation géométrique de l'argument.

Caractérisation par l'argument

`Exemple 16.` $(*)$ A tout point M d'affixe z, on fait correspondre le point $f(M)$ d'affize $Z = \dfrac{1}{z-2i}$.
Déterminer les ensembles suivants :

1. $f(Cercle(A(0,\ 2),\ 2))$
2. $f^{-1}(\Delta : y = x)$

2.4 L'exponentielle complexe

Définition 8 : **Exponentielle complexe**
Pour $z = a + ib \in \mathbb{C}$, on définit l'exponentielle du complexe z, notée e^z ou $\exp(z)$, par la formule :

$$e^z = e^{a+ib} = e^a e^{ib} \quad \text{(Attention aux différents sens de } e\text{)}$$

Son module vaut e^a et son argument b.

Remarque 24. Soient $(z,\ z') \in \mathbb{C}^2$. On a $e^z = e^{z'} \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')[2\pi] \end{cases}$.
Cette exponentielle est donc périodique de période $T = 2i\pi$.

Méthode : résolution de $e^z = a$ (avec $a \neq 0$)

1. On commence par noter $z = x + iy$ et $a = |a|e^{i\theta}$.
2. On a alors : $e^z = a \iff e^x e^{iy} = |a|e^{i\theta} \iff \begin{cases} e^x = |a| \\ y = \theta\ [2\pi] \end{cases} \iff z = \ln|a| + i\theta\ [2i\pi]$

`Exemple 17.` $(*)$ Résoudre l'équation complexe $e^z = 1 - i\sqrt{3}$.

Proposition 21 : **Morphisme, noyau et image**

On considère l'application $\begin{array}{cccc} \exp : & (\mathbb{C},\ +) & \longrightarrow & (\mathbb{C}^*,\ \times) \\ & z & \mapsto & e^z \end{array}$.

1. La fonction exp est un morphisme de groupes, c'est à dire :
   (a) $(\mathbb{C},\ +)$ et $(\mathbb{C}^*,\ \times)$ sont deux groupes
   (b) Pour tout $z,\ z' \in \mathbb{C}$, on a : $\exp(z + z') = \exp(z).\exp(z')$.
2. Le noyaux de l'exponentielle est : $\ker \exp = 2i\pi\mathbb{Z}$
3. L'image de l'exponentielle est : $\mathrm{Im}\exp = \mathbb{C}^*$

Preuve 21 : Par de difficulté.
Rappelons que pour une application $f : E \to F$ où E et F sont des groupes, on a

1. $\ker f = \{x \in E \mid f(x) = e_F\}$ où e_F est l'élément neutre du groupe F (ici $e_F = 1$)
2. $\mathrm{Im} f = \{f(x) \mid x \in E\}$

Exercice : 8

(∗∗) Soit la fonction f qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ tel que $z' = e^z$.
Déterminer l'image des droites d'équations $x = a$ et $y = b$ par f.

3 Applications géométriques des complexes

.

Proposition 22 : **Module et argument de** $\dfrac{c-a}{c-b}$

En notant A, B et C les points d'affixe $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$ tels que $B \neq C$, on a :

1. $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{AC}{AB}$
2. $\arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) = \left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right)$

Preuve 22 : Pas de difficulté.

`Exemple 18.` Soient $A(1,\ 2)$, $B(0,\ -1)$.
Déterminer un point C tel que le triangle ABC soit rectangle isocèle en B.

Corollaire 23 : **Alignement et orthogonalité**
Soit A, B et C les points dictincts d'affixe $a,\ b,\ c \in \mathbb{C}$ on a :

A, B et C alignés $\iff \dfrac{c-a}{c-b} \in \mathbb{R}$ et $\overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB} \iff \dfrac{c-a}{c-b} \in i\mathbb{R}$

Preuve 23 : Pas de difficulté.

`Exemple 19.` Soient $A(1,\ 2)$, $B(0,\ -1)$.
Déterminer un équation complexe de la droite (AB) et du cercle de diamètre $[AB]$.

`Exemple 20.` Soient $A(1,\ 2)$, $B(0,\ -1)$ et $C(3,\ -2)$.
Le triangle ABC est-il rectangle ?

Exercice : 9

Déterminer les complexes z tels que $M(z)$, $N(i)$ et $P(iz)$ soient alignés.

Proposition 24 : **Nature de l'application d'expression complexe** $z' = az + b$
Soient $(a,\ b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq 0$.

la transformation du plan $f\ :\ \begin{array}{ccccc} \mathcal{P} & \longrightarrow & & \mathcal{P} & \\ M(z) & \mapsto & M'(z') & \text{tel que} & z' = az + b \end{array}$ est :

1. Si $a = 1$: f est une translation et b est l'affixe du vecteur de cette translation.
2. Si $a \neq 1$: f est la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre :
   (a) On cherche le centre en recherchant l'unique point fixe.
   (b) le rapport de l'homothètie est donné par $|a|$.
   (c) L'angle de la rotation est donné par $\mathrm{Arg}(a)$.

On dit alors que f est une similitude directe.

Preuve 24 : Soit f la transformation du plan définie par $z' = az + b$.

1. Lorsque $a = 1$ on obtient une translation.
2. Sinon, on montre que f admet un unique point fixe $\Omega(\omega)$.
   On traduit alors le fait que $M' = f(M)$ en faisant intervenir ω.
3. On en déduit que f est alors la composée d'une homothétie et d'une rotation (de même centre !).

Remarque 25. En résumé!!
Soit la transformation $f : z \mapsto z'$ du plan définie par la relation : $z' = az + b$.

Si $a = 1$,	f	est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe b.
Si $a \in \mathbb{R}^*\backslash\{1\}$,	f	est une homothétie de rapport a et de centre l'unique point invariant.
Si $a = e^{i\theta}$ avec $\theta \neq 0$ $[2\pi]$,	f	est une rotation d'angle θ et de centre l'unique point invariant.
Si $a = k.e^{i\theta}$ avec $k \notin \{0;1\}$,	f	est la composée d'une rotation d'angle θ et d'une homothétie de rapport k de même centre (correspondant à l'unique point invariant).

`Exemple 21.` $(*)$ Reconnaître la transformation du plan dont l'expression complexe est $z' = 2jz + 3i - 2$.

Proposition 25 : **Caractérisation de l'image d'un vecteur par une rotation**
Soient $\overrightarrow{u}$ d'affixe $u \in \mathbb{C}^*$, $\overrightarrow{v}$ d'affixe $v \in \mathbb{C}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
On a alors la caractérisation suivante :

$$\overrightarrow{v} \text{ est l'image de } \overrightarrow{u} \text{ par la rotation vectorielle d'angle } \theta \quad \Longleftrightarrow \quad v = e^{i\theta}u$$

Preuve 25 : Pas de difficulté!

`Exemple 22.` $(*)$ Soit $ABCD$ un carré dont les sommets A et B sont à coordonnées entières.
Démontrer qu'il en est alors de même pour C et D.

Exercice : 10

$(*)$ On suppose connu le fait que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.
Montrer qu'un triangle équilatéral ne peut avoir ses 3 sommets à coordonnées entières.

Exercice : 11

$(**)$ Soient u, v et w trois complexes de module 1 tels que $u + v + w = 0$.
Montrer que $u = jv = j^2w$ ou que $u = jw = j^2v$.

4 Résolution d'équations complexes

4.1 Racines carrées d'un complexe

Définition 9 : **Racines carrés d'un complexe**
On appelle racine carrée du nombre complexe z $\boxed{\text{tous}}$ les complexes Z vérifiant $Z^2 = z$.

Remarque 26. Ainsi dans $\mathbb{C}$, 4 admet 2 et -2 pour racines carrées.

Proposition 26 : **Recherche des racines carrées sous forme algébrique**
Rechercher les racines carrées $Z = X + iY$ de $z \in \mathbb{C}$ revient à résoudre le système : $\begin{cases} X^2 - Y^2 = \mathrm{Re}(z) \\ X^2 + Y^2 = |z| \\ XY \text{ du signe de } \mathrm{Im}(z) \end{cases}$

Preuve 26 : En notant $z = x+iy$, on montre facilement que Z est une racine carrée de $z \Longleftrightarrow \begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases}$.
On montre alors le résultat attendu en traitant indépendamment le sens direct et le sens indirect.

Remarque 27. Le système $\begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ X^2 + Y^2 = \sqrt{x^2 + y^2} \\ XY \text{ du signe de y} \end{cases}$ est plus facile à résoudre que le système $\begin{cases} X^2 - Y^2 = x \\ 2XY = y \end{cases}$

COROLLAIRE 27 :
Tout nombre complexe non nul admet donc 2 racines carrées distinctes opposées.

Preuve 27 : Déduction quasi-immédiate du théorème précédent.

Remarque 28. Comme il est impossible de distinguer a priori les 2 racines d'un complexe z (on sait seulement qu'elles sont opposées l'une à l'autre), la notation $\sqrt{z}$ n'a aucun sens et sera donc INTERDITE ! !

`Exemple 23.` (∗) Rechercher les racines carrées des complexes : $z_1 = 7 - 24i$ et $z_2 = 4 - 3i$.

Recherche des racines carrées sous forme trigonométrique

Soit z un complexe non nul.

1. On écrit $z = r.e^{i\theta}$ avec $r > 0$.
2. On cherche Z sous la forme $Z = \rho e^{i\alpha}$ vérifiant $Z^2 = z$.
3. On trouve alors deux racines distinctes : $Z_1 = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $Z_2 = -Z_1$

`Exemple 24.` (∗) Trouver les racines carrées de $z = \dfrac{1-i}{\sqrt{3} - i}$

Exercice : 12

(∗) En utilisant la résolution trigonométrique et algébrique de $z^2 = a$ (où a est un complexe bien choisi), déterminer les valeurs de $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

4.2 Equations du second degré.

Méthode de résolution de : $az^2 + bz + c = 0$ avec $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{C}^3$ et $a \neq 0$

1. On introduit le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.
2. (a) si $\Delta = 0$, on trouve une unique solution $z = -\dfrac{b}{2a}$,

   (b) si $\Delta \neq 0$, on trouve deux solutions $\begin{cases} z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a} \\ \\ z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a} \end{cases}$ où δ est une racine carrée complexe de Δ.

Preuve : Il suffit d'utiliser la décomposition canonique de $az^2 + bz + c$.

`Exemple 25.` (∗) Résoudre l'équation complexe suivante : $z^2 - (5 - 4i)z + 3(1 - 3i) = 0$.

Exercice : 13

(∗)
1. Résoudre l'équation complexe : $z^2 - 2z(\cos u + i \sin u) + 2i \sin u(\cos u + i \sin u) = 0$ où $u \in]-\pi, \pi[$
2. Factoriser dans $\mathbb{C}$ l'expression polynômiale : $P(z) = z^3 + (1 + 3i)z^2 + (3i - 2)z - 2$

Lorsque les coefficients $(a,\ b,\ c)$ sont réels, alors $\Delta \in \mathbb{R}$ et :

1. Si $\Delta > 0$, il y a deux solutions réelles $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
2. Si $\Delta = 0$, il y a une racine double : $x = -\dfrac{b}{2a}$
3. $\boxed{\text{Si } \Delta < 0}$, il y a deux racines complexes conjuguées : $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$, $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$

Exercice : 14

($*$) Une équation de degré 2 complexe peut-elle avoir $\Delta \geq 0$ et des racines non réelles ?

Proposition 28 : **Equivalence entre "equation de degré 2" et "système"**
Soit $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^2$.

Les solutions de $az^2 + bz + c = 0$ sont les solutions du système $\begin{cases} z + z' = -\dfrac{b}{a} \\ z.z' = \dfrac{c}{a} \end{cases}$

Preuve 28 : On appelle z_1 et z_2 les racines.

$\Rightarrow$ Il suffit d'utiliser les expressions formelles des racines

$\Leftarrow$ Il suffit de remarquer que z_1 et z_2 sont solution de $(z - z_1)(z - z_2) = 0$

Remarque 29. Ainsi, si $\begin{cases} z_1 + z_2 = s \\ z_1.z_2 = p \end{cases}$ alors z_1 et z_2 sont les solutions de $z^2 - sz + p = 0$.

Exercice : 15

($**$) Montrer (sans calculer les racines), que si A et B sont les images des solutions de l'équation $z^2 - (2m+1)z + mi = 0$, (m étant un réel) alors les bissectrices des droites (OA) et (OB) ont des directions fixes (indépendantes de m).

Exercice : 16

($*$) Comment choisir $m \in \mathbb{C}$ pour que l'équation $z^2 - (2 + im)z - (1 + im) = 0$ admette deux racines imaginaires pures conjuguées ? *Aide : on procèdera par Analyse/synthèse.*

4.3 Racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité

Soit un entier non nul $n \in \mathbb{N}^*$.
Une racine n$^{\text{ième}}$ de l'unité est une solution de l'équation : $z^n = 1$

Proposition 29 : L'ensemble des racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité est :

$$U_n = \{1,\ \omega,\ \omega^2, \ldots,\ \omega^{n-1}\} \quad \text{où} \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

Preuve 29 : On les cherche sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$ et l'on trouve exactement les n racines n$^{\text{ième}}$ distinctes :

$$U_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}};\ k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

Remarque 30. Si on appelle A le point d'affine 1, on obtient les différents point d'affixes respectives $\omega,\ \ldots,\ \omega^{n-1}$ par rotation de A autour de O d'angles $\dfrac{2\pi}{n}, \ldots, \dfrac{2(n-1)\pi}{n}$.

Représentation graphique des racines 6$^{\text{ième}}$ de l'unité :

Remarque 31. Les racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité sont 2 à 2 conjuguées.

Théorème 30 : **Groupe des racines de l'unité**
L'ensemble des racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité $(U_n, \times)$ est un groupe fini de cardinal n.

Preuve 30 : Il s'agit de prouver que cet ensemble est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\ \times)$. Pour cela, on montre que :

1. Cet ensemble est bien inclus dans $\mathbb{C}^*$.
2. Cet ensemble contient 1, l'élément neutre de $(\mathbb{C}^*,\ \times)$.
3. Cet ensemble est stable par la multiplication.
4. Cet ensemble est stable par symétrisation.

THÉORÈME 31 : **La somme des racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité est nulle**

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0 \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}\backslash\{0,\ 1\}$$

Preuve 31 : Il suffit de faire le calcul ...

`Exemple 26.` $(*)$ Soit un entier relatif $p \in \mathbb{Z}$. Calculer la somme : $\quad W_p = \displaystyle\sum_{u \in U_n} u^p$.

DÉFINITION 10 : On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on a les relations :

$$U_3 = \{1,\ j,\ j^2\}, \quad \text{avec} \quad 1 + j + j^2 = 0 \quad \text{et} \quad j^2 = \frac{1}{j} = \overline{j}$$

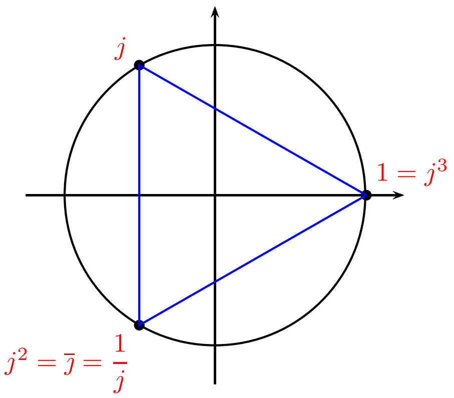


FIGURE 1 – racines cubiques de l'unité

Exercice : 17

$(**)$ Soient A, B et C trois points du plan d'affixe respectives a, b et c.
Déterminer une CNS pour que ABC soit équilatéral.

Remarque 32.

Les racines carrées de l'unité sont :	1 et -1
Les racines cubiques de l'unité sont :	1, j et $\overline{j}$
Les racines quatrièmes de l'unité sont :	1, i, -1 et $-i$

Exercice : 18

$(**)$

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^5 - (z+1)^5 = 0$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^n + x^{n-1} + \cdots + x + 1 = 0$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
   En déduire les solutions de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
3. Calculer le produit de toutes les racines n$^{\text{ième}}$ de l'unité.

4.4 Racines nièmes d'un nombre complexe

METHODE 1 : Recherche de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un complexe

Soit un nombre complexe non nul $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}^*$.
Chercher les racines $n^{\text{ième}}$ de z, c'est résoudre l'équation $Z^n = z$.
On cherchera les solutions Z sous la forme $Z = \rho e^{i\alpha}$.
On trouve alors n solutions distinctes.
En notant $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, les solutions sont :

$$\mathcal{S} = \{ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} \omega^k \ ; \ k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

Remarque 33. Lorsque $n > 2$, il est inutile d'envisager la recherche de racines nièmes en utilisant une méthode algébrique !!

Remarque 34. Si n est impair ($n = 2p + 1$), alors les racines $n^{\text{ième}}$ de z sont aussi : $\mathcal{S} = \{ \sqrt[n]{r} e^{i\frac{\theta}{n}} \omega^k \ ; \ k \in [\![-p, p]\!]\}$

METHODE 2 : Recherche de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un complexe

Si z_0 est une racine nième de z, alors les racines $n^{\text{ième}}$ de z sont :

$$z_0,\ z_0\omega,\ z_0\omega^2, \ldots,\ z_0\omega^{n-1} \quad \text{où} \quad \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$$

Remarque 35. Les images des racines $n^{\text{ième}}$ d'un complexe forment un polygône régulier à n côtés, centré en O.

PROPOSITION 32 : La somme des racines $n^{\text{ième}}$ d'un complexe est nulle.

Preuve 32 : On calcule $z_0 + z_0\omega + z_0\omega^2 + \cdots + z_0\omega^{n-1} = \ldots$

`Exemple 27.` ($*$) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 8$.

`Exemple 28.` ($*$) Déterminer les racines $4^{\text{ième}}$ de $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Exercice : 19

($*$)

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$.
2. Calculer $(2+i)^6$.
   En déduire les racines sixièmes de $117 - 44i$, de $117 + 44i$ et de $44 + 117i$.
3. Sachant que $(2-i)^8 = -527 + 336i$, construire à l'aide d'une règle et d'un compas les images des huit racines huitièmes de $-527 + 336i$.

5 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Réponses attendues
1.	Dans quel cas peut-on affirmer que $\mathrm{Re}(z.z') = \mathrm{Re}(z).\,\mathrm{Re}(z')$?	cf cours
2.	A quoi correspond la transformation d'expression : $z \to -\bar{z}$?	cf cours
3.	Connaissez-vous la caractérisation complexe de la colinéarité et de la perpendicularité ?	cf cours
4.	Développer $\|z - z'\|^2$	$\|z\|^2 - 2\,\mathrm{Re}(z\bar{z}') + \|z'\|^2$
5.	Savez-vous prouver que $\|\mathrm{Re}(z)\| \leq \|z\|$	cf cours
6.	Connaissez-vous les inégalités triangulaires ? Savez-vous les démontrer ?	cf cours
7.	Quand a-t-on $\|z + z'\| = \|z\| + \|z'\|$?	cf cours
8.	Pouvez-vous prouver que $(\mathbb{U},\ \times)$ est un groupe ?	cf cours
9.	A quelle condition a-t-on l'égalité de deux exponentielles imaginaires ?	cf cours
10.	Comment peut-on écrire les réels a et b lorsque $a^2 + b^2 = 1$?	cf cours
11.	Que savez-vous du morphisme canonique de $(\mathbb{R},\ +)$ dans $(\mathbb{U},\ \times)$?	cf cours
12.	A quoi sert la formule de Moivre ? Et les formules d'Euler ?	cf cours
13.	Savez-vous factoriser : $e^{i\theta} + 1$? $e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{i\frac{\pi}{3}}$? $1 - e^{i\theta}$?	cf cours
14.	Factoriser $\cos p - \cos q$.	$-2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$
15.	Savez-vous exprimer $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$ en fonction de $\tan\dfrac{x}{2}$?	cf cours
16.	Calculer $S = 1 + \cos 2 + \cos 4 + \cos 6 + \cdots + \cos 100$	$\dfrac{\cos 51 \sin 51}{\sin 1}$
17.	Savez-vous redéfinir la notion d'*argument* d'un complexe ?	cf cours

18.	Quel est le module et l'argument de $z = 1 + e^{130i}$?	$\begin{cases} \lvert z\rvert = -2\cos 65 \\ \arg z = 65 + \pi \end{cases}$
19.	Existe-t-il une analogie entre les fonctions arg et ln ?	cf cours
20.	Savez-vous exprimer à l'aide des complexes l'angle entre deux vecteurs ?	cf cours
21.	Donner l'expression algébrique du complexe : $z = e^{2-i}$	$z = e^2(\cos 1 - i\sin 1)$
22.	Comment reconnaître la transformation $z' = az + b$?	cf cours
23.	Caractérisation complexe de "$\overrightarrow{u}$ et l'image de $\overrightarrow{v}$ par la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$" ?	$u = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)v$
24.	Déterminer les racines carrées de $z = 2 - 3i$	$\pm\left(\sqrt{\frac{2+\sqrt{13}}{2}} - i\sqrt{\frac{\sqrt{13}-2}{2}}\right)$
25.	Déterminer les racines carrés de $z = 3e^{i\frac{\pi}{3}}$	$\pm\frac{1}{2}(3 + i\sqrt{3})$
26.	Trouver deux complexes dont la somme vaut $\sqrt{3}$ et le produit vaut $-i$.	$\begin{cases} z_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 2 + i) \\ z_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} - 2 - i) \end{cases}$
27.	Savez-vous calculer la somme et le produit des racines nième de l'unité ?	cf cours
28.	Justifiez que l'ensemble des racines nème de 1 muni de la multiplication est un groupe.	cf cours
29.	Quelles sont les racines carrés, cubiques et quatrième de l'unité ?	cf cours
30.	Savez-vous déterminer les racine 5ième de $z = 1 + i$?	$\sqrt[5]{2}e^{i\frac{\pi}{20}(1+8k)}$ tq $k \in [\![0, 4]\!]$
31.	Savez-vous reconnaître la transformation du plan d'expression $z' = iz + 1 - i$?	
31.	Savez-vous déterminer l'expression complexe de la similiture $\begin{cases} \text{d'angle } \frac{\pi}{4} \\ \text{de centre } \Omega(1,\ -1) \\ \text{de rapport } 2 \end{cases}$?	
32.	Savez-vous caractériser avec les complexes un alignement de 3 points ?	cf cours
33.	Savez-vous caractériser une angle droit à l'aide des complexes ?	cf cours

6 Exercices de TD

Rappel Méthodologique :

La résolution d'un exercice passe en général par les étapes de réflexion suivantes :

1. Appropriation des données de l'exercice :
   Un exercice commence par introduire des données sur lesquelles vont porter les questions. Il faut prendre le temps de bien assimiler ces différentes données et leurs particularités. Pour s'aider dans ce travail, on pourra en particulier utiliser des schémas ou des représentations graphiques. On peut aussi dès cette étape d'appropriation, effectuer des déductions immédiates qui seront probablement utiles pour résoudre les questions qui suivent.

2. Identification de la forme de la question donnée :
   Selon la formulation de la question, il existe des méthodes spécifiques de raisonnement. Ces méthodes peuvent être générales (voir le tableau distribué en début d'année) ou bien spécifique au chapitre concerné. On choisit alors judicieusement une méthode parmi toutes celles qui sont envisageables : ce choix devient de plus en plus facile au fur et à mesure que l'on pratique le raisonnement mathématiques.

3. La méthode générale étant choisie, soit le raisonnement se fait alors naturellement, soit il faut rechercher dans le cours des théorèmes susceptibles de nous aider à répondre à la question.

4. On commence alors la rédaction et éventuellement les calculs...

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

6.1 Les Complexes - Forme algébrique

On peut rechercher les solutions complexes z d'un problème en les exprimant sous leur forme algébriques : $z = x + iy$ avec $x,\ y \in \mathbb{R}$.

Exercice de TD : 1

($*$) Résoudre l'équation : $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$.

Exercice de TD : 2

(♡♡) Sachant qu'une solution est imaginaire pure, résoudre l'équation : $(i-1)z^3-(5i-11)z^2-(43+i)z+9+37i = 0$.

Exercice de TD : 3

(♡♡) soient $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$. On s'intéresse au système d'inconnues $x,\ y,\ z \in \mathbb{C}$: $\begin{cases} x+y+z=a \\ x+jy+j^2z=b \\ x+j^2y+jz=c \end{cases}$

1. Calculer le déterminant du système. Qu'en déduire ?
2. Résoudre ce système par analyse\synthèse en remarquant que $1 + j + j^2 = 0$.
3. Donner une CNS simple pour que les solutions soient réelles.

Exercice de TD : 4

($*$) Trouver tous les complexes $z \in \mathbb{C}^*$ tels que $|z + \dfrac{1}{z}| = 2$.

6.2 Interprétation géométrique

1. On rappelle les équivalences suivantes : $\begin{cases} \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff u = v \\ AB = CD \iff |b-a| = |d-c| \\ \widehat{(\overrightarrow{BA},\ \overrightarrow{BC})} = \alpha \iff \arg(\dfrac{c-b}{a-b}) = \alpha[2\pi] \end{cases}$.

2. Parfois, les problèmes sur les complexes se résolvent mieux en passant dans le domaine géométrique (Principe du parapluie). Et inversement...

Exercice de TD : 5

(♡) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $|z-i| = |z+1|$.

Exercice de TD : 6

(♡♡♡) Trouver par analyse\synthèse les complexes a, b et c de module 1 tels que $\begin{cases} a+b+c=1 \\ abc=1 \end{cases}$

Exercice de TD : 7

($***$) Déterminer une CNS sur les entiers naturels n et p pour que le système $\begin{cases} z^n = 1 \\ (z+1)^p = 1 \end{cases}$ admette des solutions.

Exercice de TD : 8

($***$) Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre le système : $\begin{cases} \cos a + \cos(a+x) + \cos(a+y) = 0 \\ \sin a + \sin(a+x) + \sin(a+y) = 0 \end{cases}$

6.3 Les Complexes - Forme trigonométrique

1. La forme trigonométrique d'un complexe non nul z est $z = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
2. La forme trigonométrique est particulièrement utile car l'exponentielle imaginaire vérifie les propriétés des puissances.
3. Les complexes z de module 1 sont de la forme $z = e^{i\theta}$.
4. $f : A \to B$ est une bijection lorsque tout élément de B admet un unique antécédent dans A.

Exercice de TD : 9

(♡) Soit $\alpha \in]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ et $\theta \in [0,\ \pi]$.
Donner le module et l'argument des complexes suivants :

1. $(1+i)^{2n}$
2. $(1+j)^{2n}$
3. $\left(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}\right)^{1515}$
4. $\dfrac{(1+i\tan\alpha)^2}{1+\tan^2\alpha}$
5. $\dfrac{1+\sin\theta + i\cos\theta}{1+\sin\theta - i\cos\theta}$.

On rappelle que $j = e^{2i\pi/3}$.

Exercice de TD : 10

(♡♡) **Bijections**.

1. (a) Montrer que $f : z \mapsto \dfrac{z+i}{z-i}$ induit une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ sur $\mathbb{C} \setminus \{1\}$.
   (b) Déterminer les ensembles $f(\mathbb{R})$, $f(\mathbb{U} \setminus \{i\})$ et $f(i\mathbb{R} \setminus \{i\})$.
2. Montrer que $z \mapsto \dfrac{1+z}{1-z}$ induit une bijection de $\mathbb{U} \setminus \{1\}$ sur $\mathbb{R}i$.
3. De même, montrer que $z \mapsto \dfrac{1+iz}{1-iz}$ induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{U} \setminus \{-1\}$.

Exercice de TD : 11

($**$) Dans le cas où x appartient à un ensemble à préciser, prouver les 2 égalités suivantes à l'aide d'un seul calcul :

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} = \frac{\sin(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{\cos^k x} = \frac{\cos^{n+1} x - \cos(n+1)x}{\sin x \cos^n x}$

Exercice de TD : 12

($*$) Soit $x \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{C}$ de module 1.
Montrer que $|x-u| = |1-xu|$ et interpréter géométriquement le résultat.

6.4 Racine d'un complexe - Résolution d'équations

1. Les racines nième de l'unité sont les $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0, n-1]\!]$.
2. On trouve facilement les racines nième d'un complexe quelconque en les recherchant sous leur forme trigonométrique.
3. On peut rechercher sous forme algébrique les racines carrés d'un complexe et se ramenant à un système simple.
4. Les racines d'un polynômes sont les valeurs de la variable qui annulent ce polynôme.

Exercice de TD : 13

(♡♡) Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $P(z) = (z+1)^n - e^{i2n\alpha}$

1. Déterminer les racines complexes de $P(z)$.
2. En exprimant $P(z)$ sous sa forme factorisée, comparer le produit des racines de P et la valeur de $P(0)$.
3. En déduire une expression simple de :

$$X = \prod_{k=0}^{n-1} \sin(\alpha + \frac{k\pi}{n})$$

Exercice de TD : 14

(♡♡) Montrer que : $\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$.

On pourra considérer les solutions de l'équation : $z^{11} = -1$.

Exercice de TD : 15

(♡) Résoudre algébriquement les équations $z^2 = z_0$, lorsque z_0 vaut respectivement :

1. $2+i$
2. $4i-3$
3. $8i-15$
4. $9+40i$

Exercice de TD : 16

(♡♡)

1. Résoudre l'équation : $27(z-i)^6 - (z+i)^6 = 0$.
2. Donner des expressions algébriques (forme $a+bi$) des solutions.

Exercice de TD : 17

(♡♡♡)

1. Trouver les solutions complexes de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$.
2. Si z est une des solutions précédentes et $x = z + 1/z$, montrer que x vérifie une équation simple.
3. En déduire une expression algébrique de $\cos\frac{2\pi}{5}$.

6.5 Exponentielle complexe

Exercice de TD : 18

(♡♡) Le but de cet exercice est de montrer l'existence de points fixes de l'exponentielle complexe.
Il s'agit donc de montrer qu'il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $e^z = z$.

1. Pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, on pose : $f(x) = \exp(\frac{x}{\tan x}) - \frac{x}{\sin x}$.
   Déterminer les limites de f en 0 et en $\frac{\pi}{2}$.
2. En déduire qu'il existe $b \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $f(b) = 0$.
3. On pose $a = \frac{b}{\tan b}$ et $z = a + ib$.
   (a) Montrer que $\frac{e^z}{z} = \frac{e^a \cos b}{a}$.
   (b) En déduire que $e^z = z$.

6.6 Applications géométriques et arithmétiques

1. Caractérisation de l'orthogonalité de 2 vecteurs : "$\vec{u}(u) \perp \vec{v}(v) \iff \frac{u}{v} \in i\mathbb{R}$ ou $v = 0$"
2. Caractérisation de l'alignement de 3 points : "$A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ sont alignés" $\iff \frac{a-c}{b-c} \in \mathbb{R}$ ou $b = c$"
3. Une équation complexe d'une partie Δ du plan est une relation $f(z) = 0$ telle que :

$$M(z) \in \Delta \iff f(z) = 0$$

Exercice de TD : 19

(♡♡) Montrer que toute droite du plan a une équation complexe de la forme : $\alpha z - \overline{\alpha z} = \beta$ avec $\alpha \in \mathbb{C}^*$ et $\beta \in i\mathbb{R}$.

Exercice de TD : 20

$(***)$ Soient A et B deux points distincts du plan d'affixe $a,\ b \in \mathbb{C}$.
Déterminer l'expression analytique complexe de la symétrie orthogonale par rapport à (AB).

Exercice de TD : 21

$(**)$ **Construction d'un pentagône**

1. Soit $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.
   En utilisant la somme $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4$, montrer que $1 + 2.\cos\dfrac{2\pi}{5} + 2.\cos\dfrac{4\pi}{5} = 0$.
2. Calculer le produit $\cos\dfrac{2\pi}{5}.\cos\dfrac{4\pi}{5}$
3. En déduire les valeurs de $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$
4. Application géométrique :
   On dispose d'une règle graduée, d'un compas et d'une figure comportant uniquement les points $O(0,\ 0)$ et $A(1,\ 0)$.
   (a) Comment peut-on construire les points $A'(-1,\ 0)$, $I(0,\ 1)$ et H le milieu de $[OA']$?
   (b) Calculer la longueur HI.
   (c) Soit B le point de O_x tel que $\overline{HB} = HI$. Calculer OB.
   (d) Construire à la règle et au compas le pentagône régulier.

Exercice de TD : 22

(♡♡) On suppose le plan muni d'un repère orthonormé direct.
Soit A, B et C trois points du plan d'affixes respectives a, b et c.

1. (a) Déterminer une caractérisation vectorielle du fait que (ABC) est un triangle équilatéral direct.
   (b) En déduire que : (ABC) est un triangle équilatéral direct si et seulement si $a + bj + cj^2 = 0$.
2. Montrer que : (ABC) est un triangle équilatéral si et seulement si $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca$.

Exercice : 20

$(**)$ Déterminer les complexes z tels que les points d'affixes z, z^2 et z^3 forment un triangle équilatéral.

Exercice de TD : 23

$(**)$ Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes.

1. Ecrire l'identité dite de Lagrange, obtenue en écrivant l'identité $|z|^2\,|z'|^2 = |zz'|^2$ avec x, y, x', y'.
2. Application : sachant que $\left\{\begin{array}{l} 13 = 9 + 4 \\ 29 = 25 + 4 \end{array}\right.$, décomposer 377 en somme de 2 carrés de 2 façons différentes.