Inégalités dans $\mathbb{R}$

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal DELAHAYE

5 octobre 2017

1 la relation $\leq$

"x est inférieur à y" s'écrit $x \leq y$.

On écrira que $x < y$ lorsque $\begin{cases} x \leq y \\ x \neq y \end{cases}$ et on dira alors que "x est strictement inférieur à y".

Définition 1 : Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$
La relation $\leq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ dans la mesure où elle vérifie les propriétés suivantes :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\quad x \leq x$ $\quad$ Réflexivité
2. Pour tout $x,\ y \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x \leq y \\ y \leq x \end{cases} \Rightarrow x = y$ $\quad$ Antisymétrie
3. Pour tout $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} x \leq y \\ y \leq z \end{cases} \Rightarrow x \leq z$ $\quad$ Transitivité

`Exemple 1.` $(*)$ Vérifiez que l'inclusion est une relation d'ordre sur les parties d'un ensemble.

Remarque 1. On peut munir $\mathbb{R}^2$ de l'ordre lexicographique ou de l'ordre produit.

`Exemple 2.` $(*)$ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

Théorème 1 : Opérations sur les inégalités

1. Si $a \leq b$ alors $-a \geq -b$
2. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$. (⚠ on ne peut pas soustraire 2 inégalités)
3. Si $\boxed{0 \leq}\ a \leq b$ et $\boxed{0 \leq}\ c \leq d$ alors $0 \leq ac \leq bd$ (⚠ bien effectuer la vérif. avant de multiplier)
4. Si $a \leq b$ et $\boxed{c \geq 0}$ alors $ac \leq bc$. (⚠ bien effectuer la vérif. avant de multiplier)

Remarque 2. ⚠ On retiendra donc que :

1. On ne peut pas soustraire ni diviser membre à membre deux inégalités.
2. Il faut vérifier que tous les termes sont positifs avant de multiplier membre à membre deux inégalités.
3. Lorsqu'on multiplie une inégalité par une quantité c, il faut :
   — soit vérifier que $c \geq 0$ ou que $c \leq 0$

— soit distinguer différents cas selon le signe de c.

4. Evitez si possible les inégalités strictes : elles sont source d'erreurs ....

`Exemple 3.` **Encadrements successifs**

($*$) Sachant que $\left\{\begin{array}{l} x \in [-1,\ 2] \\ y \in]1,\ 4] \end{array}\right.$ encadrez les deux expressions suivantes : $f(x) = \dfrac{x+2y}{(x+2)y}$ et $g(x) = \dfrac{2x+y}{y^2}$

PROPOSITION 2 : **Conservation des inégalités par les fonctions**
Soit $f\ :\ I \to \mathbb{R}$.

1. Si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est croissante sur } I \\ a,\ b \in I \end{array}\right.$ alors $\left\{\begin{array}{lcl} a < b & \Rightarrow & f(a) \leq f(b) \\ a \leq b & \Rightarrow & f(a) \leq f(b) \end{array}\right.$

2. Si $\left\{\begin{array}{l} f \text{ est strictement croissante sur } I \\ a,\ b \in I \end{array}\right.$ alors $\left\{\begin{array}{lcl} a < b & \Longleftrightarrow & f(a) < f(b) \\ a \leq b & \Longleftrightarrow & f(a) \leq f(b) \end{array}\right.$

⚠ Seules les fonctions strictement monotones permettent de conserver les équivalences.

Preuve 2 : Par définition des fonctions croissantes et strictement croissantes.

Remarque 3. On a bien entendu, une proposition équivalente pour les fonctions (strictement) décroissantes.

COROLLAIRE 3 : **Equivalences à retenir**
Complètez les propositions suivantes pour les rendre VRAIES :

1.	$x \leq y$	$\Longleftrightarrow$	$x^2 \leq y^2$	lorsque :	$x,\ y \in$
3.	$x \leq y$	$\Longleftrightarrow$	$x^2 \geq y^2$	lorsque :	$x,\ y \in$
3.	$x \leq y$	$\Longleftrightarrow$	$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}$	lorsque :	$x,\ y \in$
4.	$x \leq y$	$\Longleftrightarrow$	$\sin x \leq \sin y$	lorsque :	$x,\ y \in$
5.	$x \leq y$	$\Longleftrightarrow$	$e^x \leq e^y$	lorsque :	$x,\ y \in$
6.	$x \leq y$	$\Longleftrightarrow$	$\ln x \leq \ln y$	lorsque :	$x,\ y \in$

Preuve 3 : On choisit des intervalles sur lesquels les fonctions sont strictement croissantes ou décroissantes.

`Exemple 4.` ($*$) Résoudre les inéquations :

1. $\ln(2x+1) < \ln x + 1$.
2. $\sqrt{2x-1} < \sqrt{x+1} + 1$.

Méthodes pour prouver une inégalité $f(x) \leq g(x)$ pour tout $x \in I$:

1. On peut procéder par équivalences successives : "Soit $x \in I$, on a : $f(x) \leq g(x) \Longleftrightarrow \cdots \Longleftrightarrow$ VRAI"
2. On peut effectuer une étude sur I de la fonction $h\ /\ h(x) = f(x) - g(x)$ pour étudier son signe.
3. On peut procéder par déduction (inégalités successives) en retrouvant $f(x) \leq g(x)$ à partir de $x \in I$.
4. On peut procéder par récurrence lorsque $I = \mathbb{N}$.
5. On peut enfin utiliser :
   (a) la convexité d'une fonction bien choisie (Désormais hors-programme)
   (b) des formules particulières (Inégalité de Cauchy-Schwarz, Comparaison des moyennes arithmétique et géométrique, Inégalités Triangulaires...)

`Exemple 5.` ($*$) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, on a : $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

`Exemple 6.` ($*$) Démontrer les inégalités suivantes :

1. $\forall a,\ b \in \mathbb{R},\ ab \leq \dfrac{1}{2}(a^2+b^2)$.
   En déduire que $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, on a : $ab + ac + bc \leq a^2 + b^2 + c^2$.

2. $\forall a,\ b \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\dfrac{1}{2}(\ln a + \ln b) \leq \ln \dfrac{a+b}{2}$.

3. $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$.
   En déduire que $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$, on a : $(a+b)^4 \leq 8(a^4+b^4)$

Exercice : 1

$(*)$ Déterminer le nombre de chiffres dans l'écriture binaire un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

2 Valeur absolue

Définition 2 : **Valeur absolue, distance entre deux réels**
On définit la valeur absolue d'un réel x quelconque de la façon suivante : $|x| = \max(x, -x)$
La quantité $\mathrm{d}(x,\ y) = |x-y|$ mesure la distance entre deux réels x et y.
En particulier, $|x|$ représente la distance de x à 0 sur l'axe des réels.

Remarque 4. En particulier, nous avons les équivalences importantes suivantes :

$$\boxed{|x-x_0| \leq \varepsilon \iff x_0-\varepsilon \leq x \leq x_0+\varepsilon} \quad \text{et} \quad \boxed{|x| \leq M \iff -M \leq x \leq M}$$

Exemple 7. $(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ |x| < \varepsilon \iff x = 0$.

Elimination des valeurs absolues :

D'après la définition, il est possible d'éliminer les valeurs absolues de $|A(x)|$ dès lors que l'on connaît le signe du terme $A(x)$:

$$\begin{cases} |A(x)| = A(x) & \text{lorsque} \quad A(x) \geq 0 \\ |A(x)| = -A(x) & \text{lorsque} \quad A(x) \leq 0 \end{cases}$$

Cette technique permet de résoudre des équations et inéquations par disjonction de cas.

Exemple 8. $(*)$ Résoudre dans $\mathbb{R}$:

- $x|x-1| = 1 - |2x+1|$
- $|2x-4| \leq |x-1|$

Définition 3 : **Partie positive et partie négative d'un réel**
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. La partie positive de x est définie par : $x^+ = \max(x,\ 0)$
2. La partie négative de x est définie par : $x^- = \max(-x,\ 0)$

On a alors les formules : $x^+ = \dfrac{|x|+x}{2}$ et $x^- = \dfrac{|x|-x}{2}$. Ces deux valeurs sont positives.

Exemple 9.

1. Lorsque $x = 2.56$ on a : $\begin{cases} x^+ = 2.56 \\ x^- = 0 \end{cases}$.
2. Lorsque $x = -12.3$ on a : $\begin{cases} x^+ = 0 \\ x^- = 12.3 \end{cases}$.

Théorème 4 : **Propriétés immédiates de la valeur absolue.**
Soit $x,\ y \in \mathbb{R}$:

1. $|x| \geq 0$ et $|-x| = |x|$
2. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $|xy| = |x||y|$ et $|\dfrac{x}{y}| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$
4. $\forall n \in \mathbb{Z},\ |x^n| = |x|^n$ et donc $|x|^2 = x^2$
5. $\sqrt{x^2} = |x|$
6. $\forall x \in \mathbb{R},\quad -|x| \leq x \leq |x|$
7. $|\sin x| \leq |x|$

Preuve 4 : Petites démonstrations qui ne posent pas de réel problème.
Pour $|\sin x| \leq |x|$, on pourra utiliser un raisonnement géométrique.

Remarque 5. On constate qu'il est également possible d'éliminer une valeur absolue par élévation au carré. Cette technique présente cependant l'inconvénient d'augmenter le degré de l'expression.

`Exemple 10.` $(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, on a : $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$.

`Exemple 11.` $(*)$ Prouver que : $\forall a,\ b \in \mathbb{R}^+,\ |\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}$

Proposition 5 : Soit $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \leq x \leq b$ alors $|x| \leq \max(|a|,\ |b|)$

Preuve 5 : Pas de difficulté en traitant séparément les 3 cas : $0 \leq a$, $b \leq 0$ et $a \leq 0 \leq b$.

`Exemple 12.` $(*)$ Sachant que $x \in]-2,\ 5]$, que pouvez-vous dire de $|x|$?

Théorème 6 : **Inégalités triangulaires**
Pour tout réels x et y, on a :

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x+y| \leq |x| + |y|$$

Preuve 6 :

M1 : On constate que c'est un cas particulier des inégalités triangulaires sur les complexes.

M2 : Pour chacune des deux inégalités, on procède par équivalences successives en élevant au carré.

`Exemple 13.` $(*)$ Sachant que $|x| \leq \dfrac{1}{2}$, déterminer un encadrement de $|\dfrac{1}{1+x}|$.

Remarque 6. La généralisation $|\sum_{k=1}^{n} x_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ de l'inégalité triangulaire s'obtient facilement par récurrence.

`Exemple 14.` $(*)$ Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\left|\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2\right| \leq n^3$.

Exercice : 2

$(*)$ Pour $x \in [2,\ 3]$, encadrer $f(x) = \dfrac{x-1}{e^x+1}$ en utilisant tour à tour les 3 méthodes suivantes :

1. En étudiant la fonction f
2. Par encadrements successifs
3. Par majoration en valeur absolue

Remarque 7. L'exemple précédent nous a permis de mettre en évidence différentes méthodes possibles d'encadrement :

	Méthodes	Commentaires
1.	Par une étude de fonction	Méthode très précise mais qui n'aboutit pas forcément
2.	Par encadrements successifs	Méthode assez rapide et moyennement précise
3.	Par majoration en valeur absolue	Méthode rapide mais très imprécise

3 Majorant, minorant, maximum et minimum

Définition 4 : **Majorants, minorants d'une partie de $\mathbb{R}$**
Soit A une *partie* de $\mathbb{R}$ (on dit aussi un *sous-ensemble* de $\mathbb{R}$) non vide.
On dira que :

- Un réel $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de la partie A ssi tout élément de A est inférieur à M : $\forall x \in A,\ x \leq M$
  On dit alors que A est *majorée* (par M).
- Un réel $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de la partie A ssi tout élément de A est supérieur à m : $\forall x \in A,\ m \leq x$
  On dit alors que A est *minorée* (par m).

Remarque 8. Que pouvez-vous dire de l'existence et de l'unicité d'un majorant et d'un minorant ?

Majorants en Minorants d'une partie

`Exemple 15.` (∗) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver que la somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k}$ est majorée par 2.

Définition 5 : **Partie bornée**
Soit une partie $A \subset \mathbb{R}$ non vide.

Par définition : A est bornée si et seulement si $\exists m,\ M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in A, m \leq x \leq M$.

Ou encore : A est bornée si et seulement si $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in A, |x| \leq M$.

Preuve 6 : Il faut vérifier que les deux propositions précédentes sont bien équivalentes.

Définition 6 : **Plus grand (maximum), plus petit élément (minimum) d'une partie**

1. Un réel $a \in \mathbb{R}$ est un *plus grand élément* de A ssi : $a \in A$ et $\forall x \in A,\ x \leq a$
   S'il existe, le plus grand élément est unique et on le note $\boxed{a = \max A}$
2. Un réel $b \in \mathbb{R}$ est un *plus petit élément* de A ssi : $b \in A$ et $\forall x \in A,\ x \geq b$
   S'il existe, le plus petit élément est unique et on le note : $\boxed{b = \min A}$

Remarque 9.

1. Le plus grand élément est aussi appelé l'*élément maximal* et le plus petit élément l'*élément minimal*.
2. Le maximum de A est un majorant qui appartient à A tandis que le minimum de A ...
3. Existence et unicité ?

4 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Définition 7 : **Droite réelle achevée**
On note $\overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, et on étend la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\infty < x < +\infty$

Définition 8 : **Intervalles de $\mathbb{R}$**
Soient deux réels $a < b$.

— On appelle *segment* $[a,\ b]$, la partie de $\mathbb{R}$ définie par $[a,\ b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
— De même on définit les parties : $[a,\ b[$, $]a,\ b]$, $]a,\ b[$, $[a,\ +\infty[$, $]-\infty,\ b]$, $]a,\ +\infty[$, $]-\infty,\ b[$, $\mathbb{R}$

Une partie de $\mathbb{R}$ ayant l'une des 9 formes précédentes est appelée *un intervalle de* $\mathbb{R}$

Remarque 10.

1. Il est important de ne pas confondre les notions de *segment*, d'*intervalle* et de *partie* de $\mathbb{R}$. Certains théorèmes ne sont valables sur des segments et d'autres sur des intervalles quelconques.
2. Un intervalle sera dit *ouvert* s'il est de la forme $]a,\ b[$, $]a,\ +\infty[$ ou $]-\infty,\ b[$.

Proposition 7 : Caractérisation d'un intervalle
Soit $I \subset \mathbb{R}$ non vide.

$$I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R} \iff \forall x_1,\ x_2 \in I,\ [x_1,\ x_2] \subset I$$

Exercice : 3

$(*)$ Soit $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.
Montrer que $I = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ est : soit un intervalle, soit $\emptyset$ soit enfin un singleton.

5 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Réponses attendues
1.	Connaissez-vous les notions de *minorant* et *majorant* d'une partie de $\mathbb{R}$? Connaissez-vous les notions de *plus petit* et *plus grand* élément d'une partie de $\mathbb{R}$?	Cf cours
2.	Donner s'ils existent des minorant, majorant, plus petit élément, plus grand élément, de l'ensemble : $\Delta = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^*\}$.	min, ppe : 0 maj, pge : 2
3.	Peut-on multiplier des inégalités entre elles ? Peut-on diviser des inégalités entre elles ? Si "non", comment faire ? Peut-on additionner des inégalités entre elles ? Peut-on soustraire des inégalités entre elles ? Si "non", comment faire ? Peut-on inverser des inégalités entre elles ? Peut-on multiplier une inégalité par un réel ?	Oui si... NON Oui NON Oui si... Oui mais...
4.	Quand peut-on affirmer que $a < b \iff f(a) > f(b)$?	f st^t $\searrow$ sur I $a,\ b \in I$
5.	Donner 2 définitions d'une partie bornée.	cf cours
6.	Donner 3 méthodes usuelles permettant d'encadrer une expression. Discuter...	cf cours
7.	Dans quel cas dit-on qu'un ensemble est un intervalle de $\mathbb{R}$.	cf th du cours
8.	Rappelez les deux inégalités triangulaires. Comment les démontrer ?	cf cours
9.	Comment se simplifie $\sqrt{x^2}$ lorsque $x \in \mathbb{R}$?	$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert$
10.	Comment simplifier $\lvert A(x) \rvert$?	On fait des cas selon le signe de $A(x)$

11.	Traduire par un encadrement $\vert 2x-3\vert \leq 2$	$-2 \leq 2x-3 \leq 2$ ou $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$

6 Exercices

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs $\heartsuit$ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs $\heartsuit$ correspond à la difficulté des exercices.

1) Inégalités, encadrements

1. $f(x) \leq g(x) \Longleftrightarrow f(x)^2 \leq g(x)^2$ uniquement lorsque $f(x)$ et $g(x)$ sont positifs.
2. Plus généralement, si $a,\ b \in I$ et :
   (a) T est strictement croissante sur I, alors : $a \leq b \Longleftrightarrow T(a) \leq T(b)$
   (b) T est strictement décroissante sur I, alors : $a \leq b \Longleftrightarrow T(a) \geq T(b)$
3. Les équations et inéquations comportant des valeurs absolues peuvent se traiter par équivalences en élevant au carré ou par disjonction de cas.
4. Une inégalité se prouve en général :
   (a) Soit à l'aide d'une étude de fonctions
   (b) Soit par un raisonnement par équivalences (attention à bien justifier les $\Longleftrightarrow$)
   (c) Soit par inégalités successives
   (d) Soit par récurrence

Exercice de TD : 1

($*$) Montrer que pour tout $x,\ y \in]-1,\ 1[$, on a $1+xy \neq 0$.

Exercice de TD : 2

($*$) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ des réels de même signe tous strictement supérieurs à -1.

Montrer que : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1-a_k) > 1+\sum_{k=0}^{n} a_k$.

Exercice de TD : 3

($\heartsuit$) Pour $m \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

1. $e^{x^2+x} \leq e$
2. $0 \leq (m+1)x+2-m$
3. $0 \leq \dfrac{x}{1+x} \leq 1$

Exercice de TD : 4

($*$) Montrer que pour tout $x,\ y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$.

Exercice de TD : 5

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une formule donnant le nombre de chiffres contenus dans l'écriture décimale de n.

Exercice de TD : 6

($**$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le but de cet exercice est de prouver sans passer par une étude de fonction que $(1+\dfrac{1}{n})^n < 3$.

On considère $u_k = \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$.

1. Montrer que $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $u_k \leq \frac{1}{2^{k-1}}$
3. En déduire que $(1+\frac{1}{n})^n < 3$.

Exercice de TD : 7

(♡) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{k}{n^2}$.

1. Montrer que pour tout $x \geq 0$, on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.
2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice de TD : 8

($*$) Soit $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = \sum_{k=1}^{n} q_k = 1$.

1. Prouver que pour tout $x > 0$, on a $\ln x \leq x - 1$.
2. En déduire que l'on a : $\sum_{k=1}^{n} p_k \ln q_k \leq \sum_{k=1}^{n} p_k \ln p_k$

Exercice de TD : 9

($***$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^{+*}$. Prouver que : $(a_1 + \cdots + a_n)(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}) \geq n^2$.
On exprimera le membre de gauche comme une somme rectangulaire que l'on décomposera en 3 sommes judicieuses. On fera alors intervenir la fonction f d'expression $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Exercice de TD : 10

(♡)

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\frac{xy}{x+y} \leq \frac{x+y}{4}$
2. En déduire que pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{a+b+c}{2}$.

Exercice de TD : 11

(♡♡)

1. Montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a : $(x+y)^2 \geq 4xy$
2. En déduire que pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $(b+c)(c+a)(a+b) \geq 8abc$.
3. En déduire que $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$

Exercice de TD : 12

($**$) Soient a, b et c, 3 réels strictement positifs.
Montrer que l'on a $\frac{(a+b+c)^3}{abc} \geq 27$.
On pourra étudier la fonction $a \mapsto \frac{(a+b+c)^3}{abc}$.

Exercice de TD : 13

($**$) Soit a et b deux réels tels que $0 < a \leq b$.
Après avoir étudié les variation de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{\ln(1+bx)}$ sur un $\mathbb{R}^+$, démontrer que :

$$\ln(1 + \frac{a}{b}) \ln(1 + \frac{b}{a}) \leq (\ln 2)^2$$

Exercice de TD : 14

(♡) Prouver l'inégalité suivante : $\forall a, b \in \mathbb{R}^{+*}, \forall n \in \mathbb{N}^*$: $(n-1)a^n + b^n \geq n a^{n-1} b$.
On pourra commencer par se ramener à une inégalité plus simple en divisant par b^n.

Exercice de TD : 15

($*$) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(x+k)^2} < \frac{1}{x} - \frac{1}{x+n}$.

Exercice de TD : 16

(♡) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Prouver que pour tout $x > 0$, on a : $\ln(1+x) \leq x$.
2. En déduire que $S_n \geq \ln(1+n)$, puis que $S_n \to +\infty$.

Il est important de retenir le résultat : $\boxed{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \to +\infty}$.

Exercice de TD : 17

$(**)$ Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs. Il s'agit de prouver que : $\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} \geq 4$.

1. Montrer que l'on peut imposer $a + b + c + d = 1$.
   Pour cela, on posera $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ et $d' = \lambda d$.
2. Montrer qu'il existe trois réels x, y et z strictement positifs tels que : $\frac{a+c}{a+b} + \frac{b+d}{b+c} + \frac{c+a}{c+d} + \frac{d+b}{d+a} = \frac{x}{y(1-y)} + \frac{1-x}{z(1-z)}$.
3. Montrer que pour tout $t \in [0,\ 1]$, on a $t(1-t) \leq \frac{1}{4}$.
4. En déduire la minoration demandée.

Exercice de TD : 18

$(***)$ Soient a, b et c, 3 réels de l'intervalle $[0; 1]$.
Montrer que l'un au moins des réels $a(1-b),\ b(1-c)$ *et* $c(1-a)$ est inférieur ou égal à $\frac{1}{4}$.

Exercice de TD : 19

$(**)$ **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soit $a_1,\ \dots,\ a_n \in \mathbb{R}$ non tous nuls et $b_1,\ \dots,\ b_n \in \mathbb{R}$ également non tous nuls. On pose : $\begin{cases} A = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \\ B = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} \end{cases}$.

1. Montrer que pour tout $x,\ y \in \mathbb{R}$, on a $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. En déduire que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $a_k b_k \leq \frac{1}{2}(\frac{B}{A} a_k^2 + \frac{A}{B} b_k^2)$.
   On pourra poser $x = \lambda a_k$ et $y = \mu b_k$ avec $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}^{+*}$ dans l'inégalité précédente.
3. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}$$

Exercice de TD : 20

$(**)$ Soit $a_1,\ \dots,\ a_n \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a : $\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} a_i a_j = \big(\prod_{k=1}^{n} a_k\big)^{n-1}$.
   On pourra procéder par récurrence.
2. En déduire que : $\displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i + a_j) \geq \big(2^n \prod_{k=1}^{n} a_k\big)^{\frac{n-1}{2}}$.
   On pourra commencer par vérifier que pour tous réels $x,\ y$, on a $(x+y)^2 \geq 4xy$.

Exercice de TD : 21

$(\heartsuit\heartsuit)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n} \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$.

On commencera par prouver que : $\displaystyle (n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1)$.

2) Valeurs absolues

1. Pour les majorations, on pourra procéder :
   - par équivalences successives et/ou
   - appliquer l'inégalité triangulaire : $|x + y| \leq |x| + |y|$
2. Pour la résolution d'équations et d'inéquations faisant apparaître $|A(x)|$ et $|B(x)|$, on cherchera à éliminer les valeurs absolue :
   - soit en élevant au carré chacun des 2 membres (attention : ça augmente le degré !)
   - soit en effectuant une disjonction de cas selon les signes de $A(x)$ et $B(x)$.
     On fera pour cela un tableau de signes

Exercice de TD : 22

$(*)$ Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1. $\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x+1|}=1$
2. $\frac{1}{|x|}+\frac{1}{|x+1|}\geq 1$
3. $x|x-1|=|x|(x-1)$
4. $x|x-1|<|x|(x-1)$
5. $|x^2+x+1|>|x-4|$
6. $\left|x+\frac{1}{x}\right|>3$
7. $|x|+|x+1|+|x+2|=3$
8. $|x|+|x+1|+|x+2|\leq 3$

Exercice de TD : 23

$(**)$ Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|\cos k|\geq\frac{n}{4}$.

Vous pourrez remarquer que lorsque $x\in[0,\ 1]$, on a $0\leq x^2\leq x$.

Exercice de TD : 24

($\heartsuit$)

1. Montrer que pour tout (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$: $\quad 1\leq|1+x|+|x+y|+|y+z|+|z|$
2. Montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$: $\quad 1+|xy-1|\leq(1+|x-1|)(1+|y-1|)$
3. Montrer que pour tout (x,y) de $\mathbb{R}^2$: $\quad |x|+|y|\leq|x-y|+|x+y|$.
   Vous commencerez par traiter le cas où $|x|\leq|y|$.

Exercice de TD : 25

($\heartsuit$) Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$. Montrer que : $\quad\forall x,\ y\in\mathbb{R},\quad g(x+y)\leq g(x)+g(y)$.