Généralités
sur
les Fonctions réelles à variable réelle

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal DELAHAYE

7 octobre 2016

Dans ce chapitre, nous allons nous intéresser aux fonctions dont la variable est réelle mais dont les valeurs peuvent être soit réelles soit complexes.

1 Définition, Graphe et Opérations

Définition 1 : **Ensemble de définition**
Soit $f\ :\ x \mapsto f(x)$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) \in \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

L'*ensemble de définition* de la fonction f est $\mathcal{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ existe}\}$.

On pourra cependant restreindre la fonction f à toute partie $I \subset \mathbb{R}$ telle que $I \subset \mathcal{D}_f$.
Cette restriction pourra être notée : $f_{|I}$

`Exemple 1.` Donner l'ensemble de définition des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f(x) = \ln(1 + 2\sin x)$
2. $g(x) = \sqrt{1-x} + i\dfrac{\ln(3-x)}{1-x}$
3. $h(x) = \tan\dfrac{1}{x}$

Définition 2 : **Représentation Graphique d'une fonction réelle**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$.
La représentation graphique de la fonction f est l'ensemble des points du plan défini par

$$\mathcal{C}_f = \{M(x,\ f(x)) \mid x \in I\}$$

On ne définit pas la représentation graphique d'une fonction à valeurs complexes.

La fonction $\sin$	**La fonction** $x \mapsto x^2$	**La fonction** $\ln$

DÉFINITION 3 : **Equation cartésienne d'une courbe**
On considère le plan muni d'un repère $\mathcal{R}(O,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$, $\mathcal{C}$ une courbe du plan et $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
On dira que "$f(x,\ y) = 0$" est une *équation cartésienne* de la courbe $\mathcal{C}$ lorsque :

$$M(x,\ y) \in \mathcal{C} \quad \Longleftrightarrow \quad f(x,\ y) = 0$$

Une équation cartésienne se détermine donc par équivalences successives...

`Exemple 2.` La représentation graphique d'une fonction $f \in \mathcal{F}(I,\ \mathbb{R})$ admet pour équation cartésienne : $y = f(x)$

`Exemple 3.` $(*)$ Dans le plan muni d'un ron, déterminer des équations cartésiennes des ensembles suivants :

1. Le cercle de centre $\Omega(-1,\ 2)$ et de rayon $R = 3$
2. L'ensemble des points M vérifiant $MH = 2OM$ où H est le projeté orthogonal de M sur O_y.

1.1 Transformations usuelles

Connaissant le graphe de la fonction $x \mapsto f(x)$, les graphes des fonctions suivantes (où $a \in \mathbb{R}$) s'obtiennent par des transformations simples du plan ...

$x \mapsto f(x) + a$: Translation de vecteur $\overrightarrow{u}(0,\ a))$	$x \mapsto f(x + a)$: Translation de vecteur $\overrightarrow{u}(-a,\ 0)$	$x \mapsto f(-x)$: Symétrie $\perp$ par rapport à O_y

$x \mapsto f(a - x)$ Symétrie $\perp$ par rapport à $x = \frac{a}{2}$	$x \mapsto f(ax)$ Affinité $\perp$ d'axe $0y$, de rapport $\frac{1}{a}$	$x \mapsto af(x)$ Affinité $\perp$ d'axe $0x$, de rapport a

`Exemple 4.` $(*)$ Tracer les représentations graphiques des fonctions définies par :

1. $f(x) = 2\cos(\frac{1}{3}x)$
2. $g(x) = 3\ln(4 - x)$
3. $h(x) = e^{-\frac{x}{2}} - 1$

1.2 Résolution graphique d'équations et d'inéquations

Remarque 1. Les équations ou inéquations de la forme suivante se résolvent facilement graphiquement (aux erreurs d'approximation près)...

$f(x) = \lambda$	$f(x) \leq \lambda$	$f(x) \leq g(x)$

Exemple 5. $(*)$ Donner graphiquement les solutions approximatives des équations et inéquations suivantes :

1. $x^2 - x + 1 \leq 0$
2. $\ln(2x) = 3\sin x$
3. $\dfrac{2}{1-x} \geq \sqrt{2+x}$

1.3 Opérations sur les applications

Définition 4 : **Opérations sur les fonctions**

Dans l'ensemble $\mathcal{F}(I,\ \mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on définit les lois de composition internes (lci) et externe (lce) et les opérateurs suivants :

Loi	Notation	Définition
Addition :	$(f+g)$	$\forall x \in I, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x)$
Multiplication par un réel :	$\lambda.f$	$\forall x \in I, \quad (\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$
Multiplication :	$f \times g$	$\forall x \in I, \quad (f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
Valeur absolue (ou module) d'une fonction :	$\|f\|$	$\forall x \in I, \quad \|f\|(x) = \|f(x)\|$

Remarque 2.

1. Les opérations $\times$ et $+$ dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$ sont commutatives et associatives et $\times$ est distributive par rapport à $+$.
   On dira que $(\mathcal{F}(I,\mathbb{C}),\ +,\ .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que $(\mathcal{F}(I,\mathbb{C}),\ +,\ \times)$ est un anneau.
2. ⚠ : $f \times g = 0$ ne signifie pas que l'une des deux fonctions est nulle.
   On dira que l'anneau $(\mathcal{F}(I,\mathbb{C}),\ +,\ \times)$ n'est pas intègre.

Définition 5 : **Composition de deux fonctions**
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Lorsque pour tout $x \in I$, on a $f(x) \in J$ (cela s'écrit $f(I) \subset J$) alors on peut définir l'application $x \mapsto g(f(x))$.
Cette application est notée $g \circ f$:

$$g \circ f \ : \ \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array} \quad \text{et donc} \quad \forall x \in I,\ g \circ f(x) = g(f(x))$$

`Exemple 6.` Reconnaître les fonctions qui composent les expressions suivantes :

1. $a(x) = \dfrac{1}{\sin(1-x)}$
2. $b(x) = \ln((\tan^2(x)))$
3. $c(x) = 2 + (e^{x-1} + 1)^2$

Remarque 3. La loi de composition est associative mais pas commutative.

2 Parité et périodicité

2.1 Parité

Dans cette partie, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 6 : **Fonctions paires, impaires**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.
On dit que :

$$\begin{array}{lll} f \text{ est } \textit{paire} & \text{ssi} & \forall x \in I, \quad f(-x) = f(x) \\ f \text{ est } \textit{impaire} & \text{ssi} & \forall x \in I, \quad f(-x) = -f(x) \end{array}$$

Remarque 4.

1. Nous avons les caractérisations graphiques suivantes :
   (a) f est paire $\Longleftrightarrow \mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à O_y
   (b) f est impaire $\Longleftrightarrow \mathcal{C}_f$ symétrique par rapport à O
2. Si f et g sont paires (resp. impaires) alors, $f+g$, et λf le sont aussi.
   On dira que l'ensemble des fonctions paires (resp. impaires) de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ forment un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$. *(Voir le cours sur les espaces vectoriels)*

Fonction paire	**Fonction paire**

`Exemple 7.` $(*)$ Etudier la parité de la fonction f définie par $f(x) = \ln(\sqrt{1+x^2} - x)$.

Exercice : 1
$(*)$ Démontrer que toute fonction de la variable réelle se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire ?
Appliquer le résultat précédent à la fonction exponentielle.

2.2 Périodicité

Définition 7 : **Fonctions périodiques**
Une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique ssi $\quad \exists T > 0, \quad \forall x \in I, \quad f(x+T) = f(x)$

Fonction périodique

`Exemple 8.` (∗) Vérifier que la fonction f définie par $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$ est une fonction périodique.

PROPOSITION 1 : **Les fonctions périodiques usuelles**
Si $a \in \mathbb{R}^{+*}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a :

1. $\left\{\begin{array}{l} x \mapsto \cos(ax+b) \\ x \mapsto \sin(ax+b) \end{array}\right.$ sont $T = \dfrac{2\pi}{a}$ périodiques
2. $x \mapsto \tan(ax+b)$ est $T = \dfrac{\pi}{a}$ périodique

Preuve 1 : Simple vérification...

Remarque 5.
Si f et g sont périodiques de même période T, alors $f+g$, $f.g$, f/g et λf sont aussi périodiques de période T.
On dira que l'ensemble des fonctions périodiques de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ forme une sous-algèbre de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
(Voir le cours sur les espaces vectoriels)

`Exemple 9.` (∗) Déterminer une période de la fonction définie sur I par : $f(x) = \dfrac{\cos(5x+3)}{1+\tan^2(x/3)}$.

3 Variations, Encadrements et Extrema

Dans cette partie, les fonctions sont uniquement à valeurs dans $\mathbb{R}$.

3.1 Sens de variation

DÉFINITION 8 : **Fonctions monotones**

On dit que f est croissante sur I	ssi	$\forall(x,\ y) \in I^2$		$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
On dit que f est décroissante sur I	ssi	$\forall(x,\ y) \in I^2$		$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.
On dit que f est monotone	ssi elle est	croissante	ou	décroissante.
On dit que f est *strictement* croissante sur I	ssi	$\forall(x,\ y) \in I^2$		$x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
On dit que f est *strictement* décroissante sur I	ssi	$\forall(x,\ y) \in I^2$		$x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.

Remarque 6. Une fonction constante est à la fois croissante et décroissante.

`Exemple 10.` Soit $f\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que fof est croissante tandis que $fofof$ est strictement décroissante.
Montrer que f est strictement décroissante.

Exercice : 2
Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f \circ f = \text{id}_{\mathbb{R}}$. Montrer que $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

PROPOSITION 2 : **Règle des signes pour la composition**
Soient $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions monotones.
Si $f(I) \subset J$, on peut définir $g \circ f : I \mapsto \mathbb{R}$.
Dans ce cas, $g \circ f$ est monotone et l'on peut utiliser une règle équivalente à la règle des signes pour retrouver la monotonie de $g \circ f$:

f	g	$g \circ f$
$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Preuve 2 : Applications simples des définitions précédentes.

`Exemple 11.` (∗) Quel est le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = \tan^2 x$ sur $]-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}[$?

3.2 Majorant, minorant, maximum et minimum

DÉFINITION 9 : **Majorants, minorants d'une fonction**
Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$.
On dira que :

- f est *majorée* par un réel $M \in \mathbb{R}$ sur I lorsque : $\forall x \in I,\ f(x) \leq M$.
  Majorer f sur I signifie donc : "Trouver un réel M tel que $\forall x \in I,\ f(x) \leq M$".

- f est *minorée* par un réel $m \in \mathbb{R}$ sur I lorsque : $\forall x \in I,\ m \leq f(x)$.
  Minorer f sur I signifie donc : "Trouver un réel m tel que $\forall x \in I,\ m \leq f(x)$".

Remarquez que les valeurs M et m sont indépendantes de la variable x.

Majorants et Minorants d'une fonction f

Pour montrer qu'une fonction f est majorée sur I

Il s'agit de rechercher $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I$ on a $f(x) \leq M$".
Plusieurs méthodes sont alors possibles :

1. Par majorations successives en partant de $x \in I$
2. En effectuant l'étude de la fonction f sur I
3. En majorant $f(x)$ en valeur absolue *(Cette méthode prouve également que f est bornée)*

Remarque 7. Même principe pour montrer qu'une fonction est minorée sur I.

DÉFINITION 10 : **fonction bornée sur I**
On dit qu'une fonction f est bornée sur $I \subset \mathbb{R}$ si et seulement si $A = \{f(x) \mid x \in I\}$ est bornée.

En d'autres termes : f est bornée sur $I \subset \mathbb{R}$ ssi $\exists m,\ M \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \in I,\quad m \leq f(x) \leq M$.

Ou encore : f est bornée sur $I \subset \mathbb{R}$ ssi $\exists M \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in I,\quad |f(x)| \leq M$.

Preuve 2 : On vérifie sans difficulté que les deux définitions sont équivalentes.

Remarque 8. Nous verrons aussi plus tard le théorème de Weierstrass qui dit que toute fonction réelle continue sur un segment est bornée sur ce segment.

Fonction bornée sur I	**Fonction non bornée sur I**

`Exemple 12.` (∗) Montrer que la fonction A définie par $A(x) = \dfrac{\sin x - 2\cos x}{e^{\sin x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Définition 11 : **Maximum et minimum d'une fonction sur I**
Soit f une fonction réelle définie sur I.

1. Lorsque $\{f(x) \mid x \in I\}$ admet un maximum alors cette valeur est appelée le *maximum* de f sur I
2. Lorsque $\{f(x) \mid x \in I\}$ admet un minimuml alors cette valeur est appelée le *minimum* de f sur I

Maximum et minimum d'une fonction sur I

Définition 12 : **Maximum et minimum local d'une fonction sur I**
Soit f une fonction réelle définie sur I et $x_0 \in I$.
On dira que :

1. $f(x_0)$ est un maximum local de f lorsque c'est un maximum de f sur un intervalle ouvert contenant x_0.
2. $f(x_0)$ est un minimum local de f lorsque c'est un minimum de f sur un intervalle ouvert contenant x_0.

Remarque 9. Nous verrons plus loin que la dérivée permet de déterminer les extrema locaux d'une fonction dérivable.

4 Continuité

Définition 13 : **Continuité**
Soit f une fonction définie sur un intervalle I à valeur dans $\mathbb{R}$.
On dira que f est continue en un point $x_0 \in I$ lorsque :

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$$

On dira que f est continue sur l'intervalle I lorsque f est continue en tout point de I.

Remarque 10. Intuitivement, la notion de continuité correspond au fait que l'on peut tracer le graphe de la fonction sans avoir à lever le stylo.

Remarque 11. Les fonctions usuelles (cos, sin, tan, ln, exp, polynomiales, rationnelles) sont continues sur leur ensemble de définition.

Remarque 12.
On dira que f est continue à droite en un point $x_0 \in I$ lorsque : $f(x) \xrightarrow[x\to x_0^+]{} f(x_0)$.
On dira que f est continue à gauche en un point $x_0 \in I$ lorsque : $f(x) \xrightarrow[x\to x_0^-]{} f(x_0)$.
f est alors continue en x_0 ssi elle est continue à droite et à gauche en x_0.

Méthodes pour étudier la continuité d'une fonction :

- Continuité en un point x_0 :
  (a) Méthode 1 : On vérifie que : $f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} f(x_0)$.
  (b) Méthode 2 : Si l'expression de f différe d'un côté et de l'autre de x_0.
  On montre que $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to x_0^+]{} f(x_0) \\ f(x) \xrightarrow[x\to x_0^-]{} f(x_0) \end{cases}$.
- Continuité sur un intervalle I : On utilise les théorèmes généraux sur la continuité :

  La somme, le produit et les combinaisons linéaires de deux f° continues sur I sont continues sur I.
  Le rapport de deux f° continues sur I est continue sur I si la fonction au dénominateur ne s'annule pas.
  La composée $g \circ f$, de f continue sur I et de g continue sur $f(I)$ est continue sur I.

`Exemple 13.` (∗)

1. Etudier la continuité en 0 de la fonction f définie par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = x^3 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
2. Etudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions f et g définies par $f(x) = \ln(e^x + 1)$ et $g(x) = \frac{x+x^2}{1+|x|}$.

Définition 14 : **Prolongement par continuité**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f\ :]a,\ b] \to \mathbb{R}$.
Si la fonction f admet une limite finie l à droite en a, on pourra alors *prolonger* f en une fonction

$$\begin{array}{cccc} \tilde{f} & : &]a,\ b] \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a,\ b] \\ l & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

La fonction $\tilde{f}$ ainsi construite est continue à droite au point a.
On dit que $\tilde{f}$ est le *prolongement par continuité* de f au point a.

Prolongement par continuité

Remarque 13.

1. Pour éviter de compliquer les notations, on confondra souvent f et $\tilde{f}$
2. De même, si f est définie sur $[a; b[$, on peut définir le prolongement par continuité de f en b.

`Exemple 14.` Prolongez par continuité en 0 les deux fonctions suivantes :

1. $f(x) = x.\ln x$
2. $g(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Exercice : 3

Soit $x \geq 0$.
Prouver que la fonction f définie sur $]0, \dfrac{\pi}{2}]$ par $f(t) = (\sin t)^x$ est prolongeable par continuité.
La notation x^α pour $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est définie par sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$.

5 Eléments de calcul différentiel

5.1 Définition

Définition 15 : **Dérivée d'une fonction**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et un point $x_0 \in I$.

On définit le *taux d'accroissement* de la fonction f au point x_0 :

$$\Delta_{x_0} : \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$$

1. On dit que f est *dérivable* en $x_0 \in I$ lorsque : $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta_{x_0}(x)$ existe et est finie.
   On note $f'(x_0)$ cette limite que l'on appelle *nombre dérivée de f en x_0*.
2. On dit que la fonction f est :
   a) *dérivable à droite* en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} \Delta_{x_0}(x)$ existe et est finie
   b) *dérivable à gauche* en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} \Delta_{x_0}(x)$ existe et est finie
   On note alors $f'_d(x_0)$ (*dérivée à droite en x_0*) et $f'_g(x_0)$ (*dérivée à gauche en x_0*) ces deux limites.

Théorème 3 : **Caractérisation de la dérivabilité en un point x_0**

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff \left\{ \begin{array}{l} f \text{ dérivable à droite en } x_0 \\ f \text{ dérivable à gauche en } x_0 \end{array} \right. \text{ et } f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$$

`Exemple 15.`
$(*)$ Prouver que les fonctions suivantes sont dérivables en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et déterminer leur nombre dérivée en ce point.

1. $f(x) = \sin x$
2. $f(x) = x^2$
3. $f(x) = \sqrt{x}$ pour $x_0 > 0$

`Exemple 16.` $(*)$ Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(1 + \sqrt{|x|})$.

Lorsqu'elle existe, la dérivée d'une fonction f en un point $x_0 \in \mathbb{R}$
est le coefficient directeur de la tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$.
Celle-ci a donc pour équation cartésienne :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Remarque 14. Lorsque $\Delta_{x_0}(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} \pm\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente verticale en x_0.

DÉFINITION 16 : Dérivabilité sur un intervalle
On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I ouvert ssi elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$.

On définit alors la fonction dérivée : $f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f'(x) \end{array}$

Remarque 15. Abus de notation !
Le "prime" de f' doit impérativement porter sur une fonction !! Ainsi, il est incorrect d'écrire $(x^2)'$, $(f(x))'$ etc...
Cependant, pour faciliter la rédaction, on pourra parfois utiliser cette notation, à condition de préciser à côté qu'il s'agit d'un "abus de notation" !

Remarque 16. Une fonction dérivable sur un intervalle I est aussi continue sur I. La réciproque est fausse...

Fonction continue mais non dérivable sur un intervalle I

Remarque 17. La fonction de Weierstrass définie par l'expression $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{2^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

Méthodes pour étudier la dérivabilité d'une fonction :

- Dérivabilité en un point x_0 :
  (a) Méthode 1 : On vérifie que : $\Delta_{x_0}(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} l \in \mathbb{R}$.

  (b) Méthode 2 : Si l'expression de f diffère d'un côté et de l'autre de x_0.

  On montre que $\left\{ \begin{array}{l} \Delta_{x_0}(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} l_1 \in \mathbb{R} \\ \Delta_{x_0}(x) \xrightarrow[x \to x_0^-]{} l_2 \in \mathbb{R} \end{array} \right.$ et que $l_1 = l_2$.

- Dérivabilité sur un intervalle I : On utilise les théorèmes généraux sur la continuité :

  La somme, le produit et les combinaisons linéaires de deux f° dérivables sur I sont dérivables sur I.
  Le rapport de deux f° dérivables sur I est dérivable sur I si la fonction au dénominateur ne s'annule pas.
  La composée $g \circ f$, de f dérivable sur I et de g dérivable sur $f(I)$ est dérivable sur I.

Exercice : 4

(∗∗) Soit f une fonction dérivable sur $[0,\ 1]$ telle que $f(0) = f(1)$ et g définie par : $\left\{ \begin{array}{ll} g(x) = f(2x) & \text{si } x \in [0,\ \frac{1}{2}] \\ g(x) = f(2x-1) & \text{si } x \in [\frac{1}{2},\ 1] \end{array} \right.$.

1. Vérifier que g est définie sur $[0,\ 1]$
2. Déterminer une CNS pour que g soit dérivable en $\frac{1}{2}$?

Dérivées des fonctions usuelles

Expression de la fonction	Ensemble de dérivabilité	Expression de la dérivée
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R}$	$1+\tan^2(x)$ ou $\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\ln(x)$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x
x^n où $n \in \mathbb{N}$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
x^n où $n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
x^n où $n \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{R}^{+*}$	nx^{n-1}

Remarque 18. En particulier, on retiendra que si $f(x) = \sqrt{x}$ alors $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5.2 Formules de dérivation

PROPOSITION 4 : **Régles de calcul de la fonction dérivée**

Lorsque les fonctions f et g sont dérivables sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

1. $(f+g)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(\lambda.f)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$: $(\lambda.f)'(x) = \lambda.f'(x)$
3. $(f.g)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$: $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
4. $(\dfrac{f}{g})$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$: $(\dfrac{f}{g})'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ (si $g(x) \neq 0$)

Lorsque g est dérivable sur I et f dérivable sur $g(I)$ alors :

5. $(f \circ g)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$

`Exemple 17.` $(*)$ Calculez les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \tan x$
2. $g(x) = x.\cos(2x)$
3. $h(x) = \ln(\sin x)$
4. $k(x) = \sqrt{x^2}$

`Exemple 18.` $(*)$

1. Sachant que $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, en déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ \cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$
2. Prouver que si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est paire alors sa fonction dérivée est impaire.
3. Prouver que si une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ est T périodique alors sa fonction dérivée l'est aussi.
4. Retrouver des formules trigonométriques en dérivant des formules connues.

Exercice : 5

$(*)$ Calculez la dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2}{\ln(x.e^{\sin 2x})}$.

5.3 Dérivées partielles

DÉFINITION 17 : **Dérivée partielle**
Soit f une fonction de deux variables x et y.

1. En fixant y, lorsque f est dérivable par rapport à x, alors cette dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et est appelée *dérivée partielle par rapport à x*. Il s'agit d'une fonction de x et y.

2. En fixant x, lorsque f est dérivable par rapport à y, alors cette dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ et est appelée *dérivée partielle par rapport à y*. Il s'agit d'une fonction de x et y.

`Exemple 19.` $(*)$ Les gaz parfaits vérifient la loi physique "$PV = nRT$" où :

1. P est la pression
2. V est le volume du gaz
3. n est le nombre de moles
4. T est la température

Calculer $\dfrac{\partial P}{\partial V}$, $\dfrac{\partial P}{\partial T}$, $\dfrac{\partial n}{\partial P}$, $\dfrac{\partial n}{\partial T}$, $\dfrac{\partial T}{\partial P}$ et $\dfrac{\partial T}{\partial n}$.

Exercice : 6
$(*)$ Montrer que la fonction définie par l'expression $f(x,\ y) = y.\ln(x^2 - y^2)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x,\ y)}{y^2}$$

Exceptionnellement, on ne précisera pas le domaine sur lequel varient x et y

5.4 Monotonie

THÉORÈME 5 : **Fonctions constantes, monotones**

On suppose que : $\begin{cases} f \text{ est une fonction continue sur le segment } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur l'intervalle ouvert }]a,b[\end{cases}$

On a alors les résultats suivants :

1) Si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) \geq 0$ alors : f est croissante sur$[a,b]$.
2) Si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) > 0$ alors : f est strictement croissante sur $[a,b]$.
3) Si $\forall x \in]a,b[,\ f'(x) = 0$ alors f est constante sur le segment $[a,b]$.

Rem : Il suffit de connaître le signe sur $]a,\ b[$ pour en déduire le sens de variation sur $[a,\ b]$.

Remarque 19.

1. Ce théorème nous permet de construire le tableau de variation d'une fonction dérivable f
2. ⚠ Il existe des fonctions monotones et non-dérivables en tout point.
3. ⚠ Si la fonction est définie sur une réunion d'intervalles (par exemple $\mathbb{R}^*$), ce n'est pas parce que la dérivée s'annule que la fonction est constante. Considérer par exemple la fonction f définie par $f(x) = signe(x).1$

Tableau de variation de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{x^2}}{x}$

`Exemple 20.`

1. Prouver les inégalités suivantes en introduisant des fonctions bien choisies :
   (a) $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sin x \leq x$
   (b) $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$, $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comparer les expressions $f(x) = (1+x)^n$ et $g(x) = 1+nx$

Quand étudier la monotonie d'une fonction ?

1. Lorsque l'on souhaite tracer la représentation graphique d'une fonction
2. Lorsque l'on souhaite connaître le signe d'une fonction réelle
3. Lorsque l'on souhaite démontrer une inégalité pour tout $x \in I$
4. Lorsque l'on souhaite utiliser entre autres, l'un des théorèmes suivants :
   - Le théorème de la bijection
   - Le théorème de la limite monotone
   - $x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$

5.5 Dérivées successives

Définition 18 : **Dérivées successives**
Lorsqu'elle existe, on définit la fonction f'' par la fonction dérivée de f'.
Plus géréralement on définit de façon récursive :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} f^{(0)} = f \\ f^{(k+1)} = (f^{(k)})' \qquad (= (f')^{(k)}) \end{cases}$$

On notera $\mathcal{D}^n(I)$ l'ensemble des fonctions n fois dérivables sur l'intervalle I.

`Exemple 21.` $(*)$ Déterminer l'expression des dérivées n-ème des fonctions suivantes :

1. $g \mid g(x) = (x+1)^N$ $(N \in \mathbb{N}^*)$
2. $h \mid h(x) = e^{2x}$
3. $f \mid k(x) = \dfrac{1}{x+1}$

Proposition 6 : Pour $n \in \mathbb{N}$, les dérivées $n$ième des fonctions cos et sin sont données par les formules :

$$\cos^{(n)}(x) = \cos(x + n\frac{\pi}{2}) \qquad \sin^{(n)}(x) = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$$

Preuve 6 : Par récurrence...

Définition 19 : **Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$**
Soit une fonction $f\ :\ I \mapsto \mathbb{R}$ définie sur sur l'intervalle I.

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur l'intervalle } I \text{ ssi } \begin{cases} \text{elle est } k\text{-fois dérivable sur l'intervalle } I \\ \text{La fonction } f^{(k)} \text{ est continue sur l'intervalle } I \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I.
On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle I.

`Exemple 22.` Les résultats suivants pourront-être utilisés dans les exercices :
— La fonction exp, les fonctions polynomiales, les fonctions cos et sin sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
— Les fonctions rationnelles, tan, ln sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.

Proposition 7 : **Régles de calcul de la fonction dérivée**

Lorsque les fonctions f et g sont $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

1. $(f+g)$ est $\mathcal{C}^n$ sur I et $\forall x \in I$: $(f+g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) + g^{(n)}(x)$
2. $(\lambda.f)$ est $\mathcal{C}^n$ sur I et $\forall x \in I$: $(\lambda.f)^{(n)}(x) = \lambda.f^{(n)}(x)$
3. $(f.g)$ est $\mathcal{C}^n$ sur I
4. $(\frac{f}{g})$ est $\mathcal{C}^n$ sur I (si $g(x) \neq 0$)

Théorème 8 : **Formule de Leibniz**
Soient $f,\ g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I.
Alors la fonction (fg) est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I et on a la formule de Leibniz qui exprime la dérivée nième du produit :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

Preuve 8 :
Par récurrence en posant : (P_n) : "Si f et g sont $\mathcal{C}^n(I)$, alors $f.g$ est $\mathcal{C}^n(I)$ et $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$"

`Exemple 23.` $(*)$ Déterminer la dérivée $n$ème des fonctions f définies par :

1. $f(x) = x^2(1+x)^n$.
2. $f(x) = (1+x^2)e^x$.

Exercice : 7
$(**)$ Prouver que la fonction f définie par $f(x) = \tan(x)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$f^{(n)}(x) = P_n(\tan x)$$

Quelles conjectures pouvez-vous faire quant aux propriétés du polynômes P_n ?

Définition 20 : **Points d'inflexion**
On dit que la représentation graphique d'une fonction f sur un intervalle I admet un point d'inflexion $x_0 \in I$ lorsque la courbe change de concavité en x_0.
Lorsque f est deux fois dérivable sur I, on a alors la caratérisation suivante :

$$f \text{ admet un point d'inflexion en } x_0 \iff f'' \text{ s'annule et change de signe en } x_0$$

`Exemple 24.` Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ admet un point d'inflexion sur $\mathbb{R}^{+*}$.

5.6 Dérivation d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{C}$

Remarque préliminaire :

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
Alors il existe deux fonctions $f_1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f = f_1 + i.f_2$.
f_1 est la *partie réelle* de f et f_2 est la *partie imaginaire* de f.

Définition 21 : **Dérivabilité d'une fonction complexe**
Soit f une fonction de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{C}$. Notons f_1 et f_2 sa partie réelle et sa partie imaginaire.
On dira que f est dérivable sur I si et seulement si f_1 et f_2 sont dérivables sur I.
Et dans ce cas :

$$\boxed{f' = f_1' + i.f_2'}$$

`Exemple 25.` $(*)$ Déterminer la dérivée de la fonction complexe f définie par $f(t) = \dfrac{1}{t-\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$.

Proposition 9 : **Régles de calcul d'une dérivée complexe**

Lorsque les fonctions f et g sont dérivables sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{C}$ alors :

1. $(f+g)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $(\lambda.f)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$: $(\lambda.f)'(x) = \lambda.f'(x)$
3. $(f.g)$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$: $(f.g)'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$
4. $(\dfrac{f}{g})$ est dérivable sur I et $\forall x \in I$: $(\dfrac{f}{g})'(x) = \dfrac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ (si $g(x) \neq 0$)

Remarque 20. On rappelle que $e^{a+ib} = e^a.e^{ib} = e^a.(\cos b + i \sin b)$.

Théorème 10 : **Dérivation de** $t \mapsto e^{\varphi(t)}$

1. Soit $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$ et $\boxed{f(t) = e^{\alpha t}}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $\boxed{f'(t) = \alpha e^{\alpha t}}$.
2. Soit $\varphi : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$, et $\boxed{g(t) = e^{\varphi(t)}}$,
   alors g est dérivable sur I et $\forall t \in I$, $\boxed{g'(t) = e^{\varphi(t)}\varphi'(t)}$.

Preuve 10 : Il suffit d'appliquer la définition précédente.

`Exemple 26.` $(*)$ Calculer la dérivée nième de la fonction f définie par $f(x) = \cos x e^{\sqrt{3}x}$.

Exercice : 8

$(*)$ Soient $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer une primitive des fonctions $x \mapsto e^{ax} \cos bx$ et $x \mapsto e^{ax} \sin bx$ sur $\mathbb{R}$ en remarquant qu'il s'agit des parties réelles et imaginaires de $x \mapsto e^{(a+ib)x}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive de $x \mapsto e^{2x} \cos x$ sur $\mathbb{R}$.

6 Bijections

Définition 22 : **Bijection et bijection réciproque**

On dit qu'une application $f\ : I \to \mathbb{R}$ est bijective de I dans J lorsque :

"tout élément y de J admet par f un unique antécédent x dans I"

Formalisation :

$$f\ : I \to J \text{ est bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall y \in J,\ \exists! x \in I \text{ tel que } y = f(x)$$

Lorsqu'une application est bijective de I dans J, on peut définir son application réciproque $f^{-1}\ : J \to I$ qui à tout y de J associe x, l'unique antécédent de y par f. On a alors :

$$\begin{cases} \forall x \in I, & f^{-1} o f(x) = x \\ \forall x \in J, & f o f^{-1}(x) = x \end{cases}$$

Fonction bijective	Fonction non bijective

Exemple 27. ($*$) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{1-x}$.

1. Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ dans un intervalle à déterminer.
2. Déterminer sa bijection réciproque.

Remarque 21. Si f est une bijection, les graphes de f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $y = x$.

Graphe de la bijection réciproque d'une fonction $f\ :\ I \to J$

Proposition 11 : **Conservation des équivalences**
Soit $f\ : I \to J$ une bijection.
Si $a,\ b \in I$, alors :

$$a = b \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) = f(b)$$

Equivalence très utile lors de la résolution d'équations ou la démonstration d'égalités par "$\Longleftrightarrow$ successives".

Preuve 11 : Pas de difficulté.

Exemple 28. ($*$) Résoudre l'équation $1 + \ln x = \ln(2x+1)$.

Proposition 12 : **Théorème de la bijection**
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est $\begin{cases} \text{continue} \\ \text{strictement monotone} \end{cases}$ sur I alors elle est bijective de I dans $J = f(I)$.
De plus, J est un intervalle dont les bornes sont les images (ou les limites) des bornes de I.

Fonction continue et strictement monotomne

Exemple 29.
(∗) Prouver que la fonction f définie par $f(x) = e^{2x} - 2e^x$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle à déterminer.

Remarque 22. La continuité n'est pas nécessaire pour établir la bijectivité. Elle permet cependant d'affirmer que J est un intervalle.

Exercice : 9
(∗) Soit f une fonction de $I \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Montrer que si f est une fonction strictement croissante sur I alors f est une bijection de I dans $f(I)$

Remarque 23. Une fonction bijective peut-être ni continue ni monotone...

Exercice : 10
(∗) Soit f la fonction définie par $f(x) = x + \ln x$.

1. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. On notera f^{-1} sa bijection réciproque.
2. Résoudre $x + \ln x = 1$
3. Donner le sens de variation de f^{-1}, calculer $f^{-1}(1)$.
4. Comparer $f^{-1}(x)$ à x et à $x - \ln x$ pour $x \geq 1$.

Théorème Fondamental 13 : **Dérivation de la fonction réciproque**
Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$.

On suppose que : $\begin{cases} f : I \mapsto \mathbb{R} \text{ est bijective de } I \text{ dans } J = f(I) \text{ avec } I \text{ et } J \text{ des intervalles} \\ f \text{ est dérivable sur l'intervalle } I \\ \forall x \in I,\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$

alors la fonction $f^{-1} : J \to I$ existe et est dérivable sur l'intervalle J avec :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$$

Remarque 24. Interprétation géométrique :

1. Une bijection réciproque f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ lorsque :
   — f est dérivable en x_0
   — la tangente en $M_0(x_0,\ y_0)$ n'est pas horizontale.

2. $f^{-1}(y_0)$ est le coefficient directeur de la droite symétrique par rapport à $\Delta : y = x$ de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_0.

Interprétation géométrique de $f^{-1}(y_0)$

Exemple 30. (∗)

1. Justifiez que la fonction sinus est une bijection de $[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ dans $[-1,\ 1]$.
2. Prouvez que sa bijection réciproque est dérivable sur $]-1,\ 1[$ et donnez l'expression de sa dérivée.
3. Faites de même avec les fonctions cosinus et tangente.

Exercice : 11
(∗) Soit $f\ :\ [0;\ \frac{\pi}{2}] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\sin x} + x$.

Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que f^{-1} est dérivable sur cet intervalle.

THÉORÈME 14 : **Caractérisation des bijections**
Soit $f : I \subset \mathbb{R} \to J$.

$$f \text{ est une bijection } \iff \exists g : J \to I \text{ telle que } \begin{cases} g \circ f = \mathrm{id}_I \\ f \circ g = \mathrm{id}_J \end{cases}$$

Preuve 14 :

1. $\Rightarrow$ Immédiat car f^{-1} convient
2. $\Leftarrow$ Si $y \in J$ alors $g(y)$ est un antécédent de y par f. On montre alors facilement que l'antécédent est unique.

7 Etude d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$

Plan d'étude d'une fonction

1. Trouver le domaine de définition si celui-ci n'est pas donné.
2. Etudier la parité et la périodicité éventuelles.
   En déduire une réduction de l'intervalle d'étude.
3. Justifier la dérivabilité, calculer la dérivée, la factoriser, et étudier son signe.
4. Construire le tableau de variations. On précise les valeurs *exactes* remarquables, les limites et les prolongements éventuels (on étudie alors la dérivabilité de la fonction prolongée). On peut éventuellement rajouter certaines valeurs utiles.
5. Identifier les asymptotes horizontales et verticales éventuelles.
6. Faire un tracé approximatif de la courbe $y = f(x)$.
   Pour cela, on commence par représenter les points particuliers, les asymptotes, les tangentes horizontales et verticales.

Remarque 25. ⚠ La construction d'un tableau de valeurs numériques obtenues à l'aide de la calculatrice ne présente en général aucun intérêt !

`Exemple 31.` Déterminer la représentation graphique des fonctions suivantes :

1. f définie par : $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$
2. g définie par : $g(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Remarque 26. Les études de fonctions sont également utilisées pour :

1. la détermination de minimum et de maximum
2. la détermination du signe d'une expression

Symétrie par rapport à $x = a$.	Symétrie par rapport à $M(a,\ b)$
$f(a+t) = f(a-t)$ ou $f(2a-t) = f(t)$	$\dfrac{f(a+t)+f(a-t)}{2} = b$

Axes et centres de symétrie

`Exemple 32.`
$(*)$

1. Déterminer l'axe de symétrie du graphe de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
2. Déterminer le centre de symétrie du graphe de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$.

Exercice : 12

1. Etudier les fonctions définies par :

   (a) $f(x) = x\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{1+x^2}$ (b) $g(x) = x\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2}$ (c) $h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ (d) $l(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{3+x^2}}$

2. Déduire de l'étude de g les solutions de l'inéquation : $x\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x^2} \geq 1$.
3. Montrer que la fonction h est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,\ 1]$ et déterminer l'expression de sa bijection réciproque.
4. Montrer que la fonction l est bijective de $[-1,\ 1]$ dans $[0,\ 1]$ et montrer que sa bijection réciproque est dérivable sur $[0,\ 1[$. Que vaut $l'^{-1}(0)$?

8 Exercices

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs $\heartsuit$ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs $\heartsuit$ correspond à la difficulté des exercices.

1) La dérivation

1. Les méthodes utilisées dans les exercices suivants ont été vues dans les chapitres précédents.
2. $f'(x_0)$ donne la pente de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en $M_0(x_0,\ f(x_0))$.
3. La tangente à $\mathcal{C}_f$ en $M_0(x_0,\ f(x_0))$ admet pour équation cartésienne : $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$
4. Se rappeler de la méthode pour démontrer une inégalité à l'aide de l'étude d'une fonction.

Exercice de TD : 1

($\heartsuit$) Etudier l'ensemble de définition, de continuité et de dérivabilité des fonctions f définies par :

1. $f(x) = \dfrac{x}{|x|+1}$
2. $g(x) = x|x|$
3. $h(x) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

Intéressez-vous éventuellement au caractère $\mathcal{C}^1$ de ces fonctions.

Exercice de TD : 2

($*$) Etablir les inégalités suivantes :

1. $\forall x \in]1,\ +\infty[,\quad \dfrac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$
2. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\quad e^x \geq 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$.

Exercice de TD : 3

($\heartsuit\heartsuit$) En procédant par analyse\synthèse, déterminer toutes les applications f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x,\ y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exercice de TD : 4

($**$) En procédant par analyse\synthèse, déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}$, dérivables telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \text{on a} \quad f(xy) = f(x) + f(y)$$

Exercice de TD : 5

($\heartsuit$) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Etablir que : $\forall t \in \mathbb{R}^*$, on a : $(1+t)^p \geq 1 + t^p$
2. En déduire que : $\forall x,\ y \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $(x+y)^p \geq x^p + y^p$

Exercice de TD : 6

($\heartsuit$) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{x+\lambda}{x^2+1}$.

1. Montrer que les tangentes en 0 aux courbes des fonctions f sont toutes parallèles.
2. Montrer que les tangentes en 1 aux courbes des fonctions f sont toutes concourantes.

2) Etudes de fonctions

Une fonction s'étudie en suivant la procédure suivante :

1. Détermination de l'ensemble de définition : "$f(x)$ existe ssi.... "
2. Etude des symétries éventuelles (parité...)
3. Etude du sens de variation.
   En général, on détermine l'ensemble de dérivabilité de la fonction (à l'aide des théorèmes généraux) puis on calcule la dérivée de la fonction. Le signe de la dérivée donne alors le sens de variation.
4. Tableau de variation avec les valeurs et limites aux bornes.
5. Représentation graphique faisant apparaître les valeurs particulières, les tangentes en ces points et les asymptotes éventuelles. Inutile d'ajouter d'autres points !!

Exercice de TD : 7
(♡) Etudier les fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$
2. $g(x) = x^2e^{-x}$
3. $h(x) = \dfrac{2\ln x + 3}{x}$
4. $m(x) = \dfrac{x^2+x}{|x|+1}$
5. $u(x) = \cos x + \dfrac{1}{2}\cos(2x)$
6. $v(x) = \sqrt{\tan x}$

3) Dérivées nièmes

On rencontre les deux types de questions suivantes :

1. Justification de l'existence d'une dérivée nième (en général à l'aide des théorèmes généraux)
2. Recherche de la dérivée nième :
   (a) souvent par conjecture\validation
   (b) parfois en utilisant la formule de Liebniz

Exercice de TD : 8
(♡♡) Déterminer la dérivée nième de la fonction f définie par $f(x) = x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$.
Aide : On pourra commencer par effectuer une conjecture.

Exercice de TD : 9
(♡♡) Calculer de deux façons différentes la dérivée nième de f définie par $f(x) = x^{2n}$.
En déduire une expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2$.

Exercice de TD : 10
(♡♡) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arctan x$.
Il s'agit de la bijection réciproque de la fonction tan restreinte à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver que l'on a : $f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin(nf(x) + n\frac{\pi}{2})$.
2. En déduire les racines de $f^{(n)}(x)$.

4) Bijections

1. Par définition $f : A \to B$ est une bijection lorsque pour tout élément $y \in B$ il existe un unique $x \in A$ tel que $f(x) = y$
2. Pour prouver qu'une fonction réelle à valeur réelle est une bijection, on utilise souvent le théorème de la bijection. Cependant, on préfèrera la définition lorsque la bijection réciproque est demandée.
3. Le théorème de la bijection est un cas particulier du TVI : il permet de justifier l'existence et l'unicité d'une valeur x telle que $f(x) = 0$.
4. Lorsque qu'un suite est définie par les racines x_n d'une équation $\mathcal{E}_n : f_n(x) = 0$ avec $n \in \mathbb{N}$, on dit qu'il s'agit d'une suite définie de façon implicite. Pour étudier une telle suite, on utilise des encadrements obtenus grâce au sens de variation de la fonction f_n.
5. Pour justifier la dérivabilité de la bijection réciproque $f^{(-1)}$ sur J et éventuellement calculer son expression, on applique le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque.

Exercice de TD : 11
(♡) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x - 1$ s'annule exactement en 3 points.

Exercice de TD : 12
(♡) **Les fonctions homographiques**.
Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec $a,\ b,\ c$ et d des réels tels que $\begin{cases} c \neq 0 \\ ad - bc \neq 0 \end{cases}$.
Prouver que f est une bijection de $\mathbb{R}\backslash\{-\frac{d}{c}\}$ dans un ensemble que l'on déterminera et déterminer sa bijection réciproque.

Exercice de TD : 13
(♡♡) Pour $n \geq 3$, on considère l'équation $e^x = x^n$.

1. En utilisant la fonction logarithme, pouver que cette équation admet deux solutions distinctes x_n et y_n dans $\mathbb{R}^+$ avec $x_n < y_n$.
2. Montrer que pour tout n, on a : $1 < x_n < e < y_n$

Exercice de TD : 14

($**$) Pour $n \geq 1$, on considère l'équation $x - \ln x = n$.

1. Prouver que cette équation admet une unique solution x_n supérieur à 1.
2. Montrer que la suite implicite (x_n) ainsi construite diverge vers $+\infty$
3. En déduire que $\frac{x_n}{n} \to 1$. (on dit alors que x_n est équivalent à n)

Exercice de TD : 15

($**$) Déterminer en fonction de $p,\ q \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $x^3 = px + q$.

Exercice de TD : 16

($**$) Soit P_n la fonction polynomiale définie par : $P_n(x) = -1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

1. Montrer que pour $n \geq 1$. P_n admet une unique racine positive que l'on note x_n.
   Vérifier que $0 < x_n \geq 1$.
2. Etudier le sens de variation de (x_n) et en déduire sa convergence.
3. Montrer que $(x_n)^n \to 0$ et en déduire que $(x_n) \to \frac{1}{2}$.