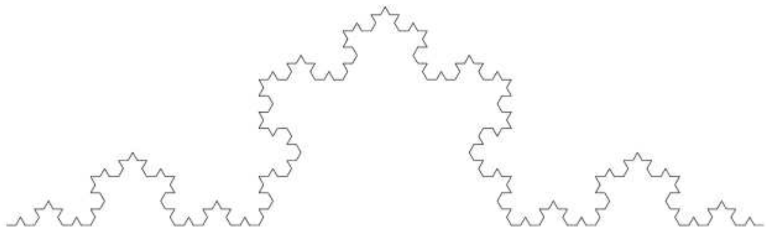
Les fonctions usuelles

MPSI-Cauchy Prytanée National Militaire

Pascal DELAHAYE

25 octobre 2017



Le flocon de Von Koch est un objet de dimension $\frac{\ln 4}{\ln 3} \approx 1.26$

1 Rappels

1.1 Fonctions polynomiales et rationnelles

PROPOSITION 1 : $\left\{\begin{array}{l}\text{Les fonctions polynomiales}\\ \text{Les fonctions rationnelles}\end{array}\right.$ sont $\left\{\begin{array}{l}\text{continues}\\ \text{dérivables}\end{array}\right.$ sur leurs ensembles de définition.

Preuve 1 : Résultats connus !

1.2 Logarithme népérien

DÉFINITION 1 : **La fonction logarithme**

La fonction $f : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \mapsto & 1/x \end{array}$ est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$.
Elle admet donc des primitives.
On appelle "fonction logarithme népérien" l'unique primitive de f qui s'annule en $x = 1$.
Cette fonction est notée :

$$\boxed{\ln : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}}$$

PROPOSITION 2 : **Rappel des propriétés principales**

1. ln est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ et $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\boxed{(\ln)'(x) = \frac{1}{x}}$.
2. La fonction ln vérifie : $\forall x,\ y > 0$, $\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$ et $\begin{cases} \ln(1/x) = -\ln x \\ \ln(x/y) = \ln x - \ln y \\ \ln x^n = n \ln x \quad \forall n \in \mathbb{Z} \end{cases}$
3. On a : $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$ et $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$
4. On a l'inégalité classique : $\forall x > 0$, $\boxed{\ln(x) \leq x - 1}$
5. On a la limite connue : $\boxed{\frac{\ln(x+1)}{x} \xrightarrow[x \to 0]{} 1}$

Preuve 2 :

1. Par définition de la fonction logarithme
2. (a) On dérive la fonction $f_y(x) = \ln(xy) - \ln x - \ln y$ où y est un paramètre strictement positif.
   (b) Les deux autres formules s'en déduisent.
3. (a) La démonstration de la limite en $+\infty$ fait appel à des théorèmes vus dans le cours sur la dérivabilité.
   (b) La limite en 0^+ s'en déduit.
4. On étudie le signe de la fonction $f(x) = \ln x - (x - 1)$.
5. C'est la traduction de la dérivabilité du logarithme en 0.

Remarque 1. Les résultats précédents permettent d'obtenir le graphe de la fonction ln.

Graphe de la fonction logarithme

Exercice : 1

Prouver que pour tout entier $n > 3$, la dérivée n^{ieme} de la fonction $f(x) = x^2.\ln x$ est donnée par :

$$f^{(n)}(x) = 2.(-1)^{n-1}\frac{(n-3)!}{x^{n-2}}$$

Remarque 2. En physique ou SI, on utilise sous la fonction logarithme décimal définie par l'expression : $\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$.

1.3 Exponentielle

DÉFINITION 2 : **La fonction exponentielle**

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur $I = \mathbb{R}^{+*}$.
Elle réalise donc une bijection de $I = \mathbb{R}^{+*}$ vers $\ln(I) = \mathbb{R}$.

On définit la fonction exponentielle comme sa bijection réciproque : $\begin{array}{rccc} exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ & x & \mapsto & exp(x) \end{array}$.

En raison des propriétés particulières de la fonction exponentielle, on notera plutôt :

$$exp(x) = e^x$$

Remarque 3. Vous verrez en deuxième année que l'on peut définir la fonction exponentielle par :

$$x \mapsto e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Proposition 3 : **Rappel des propriétés principales**

1. exp est dérivable sur $J = \mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{exp'(x) = exp(x)}$
2. exp est un morphisme de groupes : $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2$, $\boxed{e^{x+y} = e^x e^y}$ et $\left\{ \begin{array}{ll} e^{nx} = (e^x)^n & \forall n \in \mathbb{Z} \\ e^{-x} = 1/e^x & \end{array} \right.$
3. On a l'inégalité classique : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{e^x \geq 1 + x}$
4. Limites : $\boxed{\lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+}$ et $\boxed{\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$.
5. Autre limite importante : $\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$.

Preuve 3 :

1. On applique le théorème de dérivation d'une fonction réciproque
2. C'est une conséquence de la relation fonctionnelle $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
   Les deux autres formules se déduisent facilement de la première.
3. On étudie la fonction $f(x) = e^x - (1 + x)$.
4. Ces deux limites se déduisent immédiatement des limites en 0^+ et en $+\infty$ de la fonction logarithme.
5. C'est la traduction de la dérivabilité de l'exponentielle en 0.

Remarque 4. On obtient le graphe de la fonction exp par symétrie du graphe de ln par rapport à la première bissectrice.

Dessin

Graphe de la fonction exponentielle

1.4 Fonctions puissance $x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$ (où $\alpha \in \mathbb{R}$! !)

Définition 3 : **Définition de x^n pour $n \in \mathbb{Z}$**

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$	On a par définition	$x^n = x \times x \times \cdots \times x$	(n fois)
Pour $x \in \mathbb{R} * n$ et $n \in \mathbb{Z} \backslash \mathbb{N}$	On a par définition	$x^n = \frac{1}{x^{-n}}$	
Pour $x \in \mathbb{R}$	On a par convention	$x^0 = 1$	

DÉFINITION 4 : **Définition de x^α pour $\alpha \notin \mathbb{Z}$**

Pour $\alpha \notin \mathbb{Z}$, on définit : $f_\alpha \ : \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^\alpha = e^{\alpha \ln x} \end{array}$

Remarque 5. Vérifier la cohérence de cette définition avec les définitions connues de x^n lorsque $n \in \mathbb{Z}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

PROPOSITION 4 : Les fonctions puissances vérifient les propriétés usuelles des puissances entières.

Ainsi, $\left\{ \begin{array}{l} \forall(\alpha,\ \beta) \in \mathbb{R}^2 \\ \forall x \in \mathbb{R}^{+*} \end{array} \right.$: $\begin{array}{llcl} 1. & x^\alpha . x^\beta & = & x^{\alpha+\beta} \\ 2. & (x^\alpha)^\beta & = & x^{\alpha.\beta} \\ 3. & \frac{x^\alpha}{x^\beta} & = & x^{\alpha-\beta} \end{array}$

Preuve 4 : La vérification est immédiate !

`Exemple 1.` Démontrer les formules $\ln(x^\alpha) = \alpha . \ln x$ et $(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Remarque 6. Les fonctions puissances montre que le flocon de Von Koch est un objet fractal de dimention $\frac{\ln 4}{\ln 3}$.

DÉFINITION 5 : **Les fonctions "racine nième"**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
La fonction $f : x \mapsto x^n$ est $\left\{ \begin{array}{l} \text{continue} \\ \text{strictement croissante} \end{array} \right.$ sur $\mathbb{R}^+$. Elles sont donc bijectives de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

Leur bijection réciproque est appelée "racine nième" et est notée : $f^{-1} \ : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \sqrt[n]{x} \end{array}$.

Remarque 7. On vérifie facilement que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

PROPOSITION 5 :

1. f_α est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (fonction composée) et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f_a'(x) = \alpha x^{\alpha-1}}$.
2. En notant $I =]0,+\infty[$,
   - Si $\alpha = 0$, f_α est constante et vaut 1.
   - Si $\alpha > 0$, f_α est strictement croissante sur I.
   - Si $\alpha < 0$, f_α est strictement décroissante sur I.

Preuve 5 : Vérifications immédiates !

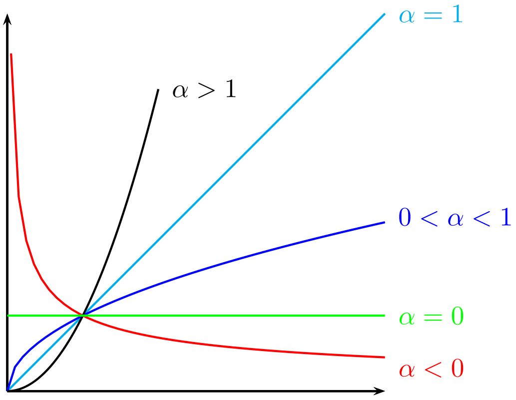


FIGURE 1 – Fonctions puissance x^α

Proposition 6 : Continuité et dérivabilité en 0

1. Lorsque $\alpha > 0$, on peut prolonger par continuité f_α et 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$.
2. Dérivabilité en 0 :
   — Si $\alpha > 1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0) = 0$.
   — Si $\alpha = 1$, f_α est dérivable en 0 avec $f'_\alpha(0) = 1$.
   — Si $0 < \alpha < 1$, f_α n'est pas dérivable en 0 (demi-tangente verticale).

Preuve 6 : Simples calculs de limites !

Proposition 7 : Inverse d'une fonction puissance
La fonction f_α est bijective de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ et :

$$f_\alpha^{-1} = f_{\frac{1}{\alpha}}$$

Preuve 7 : On démontre facilement en vérifiant que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad f_\alpha o f_{\frac{1}{\alpha}}(x) = f_{\frac{1}{\alpha}} o f_\alpha(x) = x$

Exercice : 2
Justifiez la dérivabilité de la fonction f définie sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = (\cos^2 x)^{\ln x}$.
Calculez sa dérivée.

Proposition 8 : Une nouvelle Forme Indéterminée

Lors du calcul de limite, la forme $\boxed{1^\infty}$ est une forme indéterminée !

Preuve 8 : Il suffit de calculer les limites en 0 des fonctions définies par $f_1(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ et $f_2(x) = (1-x)^{\frac{1}{x}}$.

Remarque 8. Rappel des différentes formes indéterminées : $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$ et $+\infty - \infty$.

Remarque 9. ⚠ Ne jamais prendre la limite d'une puissance qui dépend de la variable !!
On évite ce problème en exprimant l'expression à l'aide de la forme exponentielle qui définit la fonction puissance.

1.5 Comparaison des fonctions ln, exp et puissances

Définition 6 : Notation de Landau
Soit a une notation qui représente, soit un réel, soit $\pm\infty$ ($a \in \bar{\mathbb{R}}$).
Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a, avec g ne s'annulant pas au voisinage de a privé de a.
On dira que f est *négligeable* devant g au voisinage de a lorsque :

$$\lim_{x \mapsto a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \qquad \text{et on écrira :} \qquad f(x) = o(g(x))$$

Théorème 9 : Comparaison des fonctions usuelles en $\boxed{+\infty}$
Soient α, β, γ trois réels strictement positifs.

1) Comparaison puissance et exponentielle : en $+\infty$: $x^\alpha = o(e^{\beta x})$

2) Comparaison ln et puissance : en $+\infty$: $\ln^\gamma x = o(x^\alpha)$ d'où $x^\alpha \ln^\beta x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$

3) Comparaison ln et exponentielle : en $+\infty$: $\ln^\gamma x = o(e^{\beta x})$

Preuve 9 :
1. On se ramène à l'étude de la limite de $\frac{e^x}{x^\theta}$ en $+\infty$. Puis on étudie la fonction $f(x) = \frac{e^{x/2}}{x^\theta}$.
2. On se ramène à la situation précédente en posant $y = \ln x$.
3. On utilise les deux résultats précédents.

`Exemple 2.` Calculez les limites suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x}.\ln(3x)$ en 0^+.
2. $g(x) = \frac{3^{4x}}{x^3}$ en $+\infty$.
3. $h(x) = \ln x.\frac{x^3}{e^x}$ en $+\infty$.

2 Les fonctions circulaires et leurs réciproques

2.1 Rappels sur les fonctions circulaires

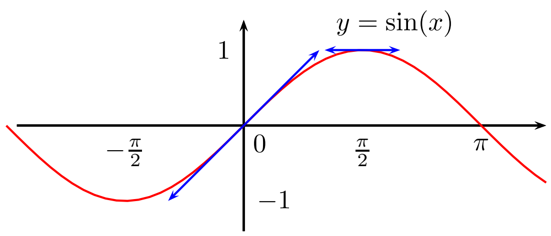
Proposition 10 :

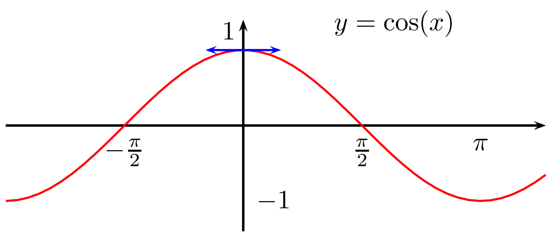
Les fonctions $\left\{\begin{array}{l} x \mapsto \cos x \\ x \mapsto \sin x \end{array}\right.$ sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \quad \left\{\begin{array}{l} (\cos x)' = -\sin x \\ (\sin x)' = \cos x \end{array}\right.}$.

La fonction $x \mapsto \tan x$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}\ [\pi]\}$ et : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}\ [\pi]\} : \quad (\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}}$

Preuve 10 : Résultats connus et admis !

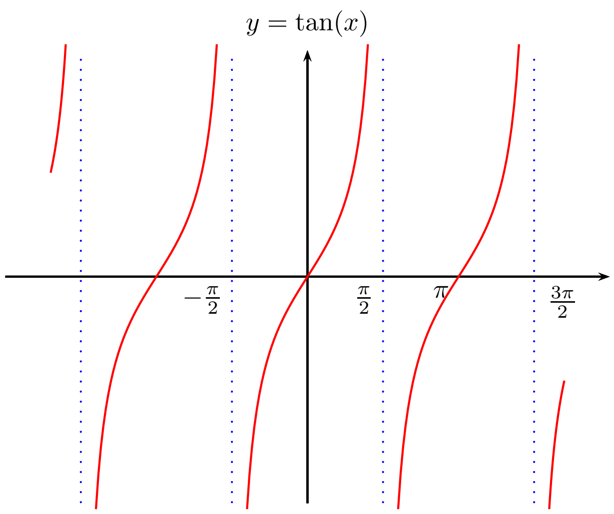
Remarque 10. Dans la proposition précédente, les notations $(\cos x)'$, $(\sin x)'$ et $(\tan x)'$ sont pratiques mais incorrectes ! On acceptera cependant cet *abus de notation*.





Je vous rappelle les formules de trigonométrie à connaître impérativement :

1. $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$
2. $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$
3. $\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$
4. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2.\cos^2 a - 1 = 1 - 2.\sin^2 a$
5. $\sin 2a = 2\sin a.\cos a$
6. $\tan 2a = \frac{2.\tan a}{1 - \tan^2 a}$



On obtient en posant $t = \tan\frac{\theta}{2}$:

1. $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
2. $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$
3. $\tan\theta = \frac{2t}{1-t^2}$

Remarque 11.
Les formules précédentes sont en particulier utiles dans le calcul d'intégrales ou de primitives de fonctions circulaires.

PROPOSITION 11 : **Comparaison au voisinage de 0**

1. $\frac{\sin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$
2. $\frac{\tan x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$
3. $\frac{1-\cos x}{x^2/2} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$

Preuve 11 :

1. Les deux premières limites se prouve géométriquement en appliquant le théorème des gendarmes et en comparant des aires dans le cercle trigonométrique.
   Les démonstrations utilisant la dérivée des fonctions sin et tan en 0 n'est pas acceptable car on utilise les valeurs de ces limites pour prouver leur dérivabilité.
2. On lève la forme indéterminée en multipliant numérateur et dénominateur par $1 + \cos x$.

2.2 La fonction arcsin

Sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, la fonction sinus est continue strictement croissante vers $[-1, 1]$.
Elle admet donc une bijection réciproque notée $\boxed{\arcsin : [-1, 1] \mapsto [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$.

La fonction arcsin :

Quelques valeurs particulières à connaître :

$$\arcsin(0) = 0 \qquad \arcsin(1/2) = \frac{\pi}{6} \qquad \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4} \qquad \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \qquad \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$$

"$\arcsin x$ est l'*arc* de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dont le *sinus* est x"

Remarque 12. Comme la fonction sin, la fonction arcsin est impaire et croissante

`Exemple 3.` Démontrer que $\forall x \in]-1, 1[, \quad \tan(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Attention : Piège !!!

La définition de la fonction arcsin nous donne deux relations : $\begin{cases} 1.\ \forall x \in [-1,\ 1] \text{ on a : } \sin(\arcsin x) = x \\ 2.\ \forall x \in [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}] \text{ on a : } \arcsin(\sin x) = x \end{cases}$

Mais que dire de $\arcsin(\sin x)$ pour x réel quelconque ?...

Exercice : 3

Etudier l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

Proposition 12 :
La fonction arcsin est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ (demi-tangentes verticales en -1 et 1) et

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Preuve 12 : Application du théorème de dérivation de la réciproque d'une fonction.

Remarque 13. ⚠ La fonction arcsin n'est pas dérivable aux bornes de son ensemble de définition.

Proposition 13 : **Limite**
On a la limite suivante : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$

Preuve 13 : Conséquence de la dérivabilité de la fonction arcsinus en 0.

2.3 La fonction arccos

Sur l'intervalle $[0,\pi]$, la fonction cosinus est continue strictement décroissante vers $[-1,1]$.
Elle admet donc une bijection réciproque notée $\boxed{\arccos : [-1,1] \mapsto [0,\pi]}$.

La fonction arccos :

Quelques valeurs particulières à connaître :

$\arccos(0) = \frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\arccos(1/2) = \frac{\pi}{3}$ $\quad$ $\arccos(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{\pi}{4}$ $\quad$ $\arccos(\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{\pi}{6}$ $\quad$ $\arccos(1) = 0$

"$\arccos x$ est l'*arc* de $[0,\ \pi]$ dont le *cosinus* est x"

Remarque 14. Comme la fonction cos, la fonction arccos est décroissante.

`Exemple 4.` Démontrer que $\forall x \in [-1,1],\ x \neq 0, \quad \tan(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$

Attention : Piège !!!
La définition de la fonction arccos nous donne deux relations : $\left\{\begin{array}{ll} 1.\ \forall x \in [-1,\ 1] \text{ on a : } & \cos(\arccos x) = x \\ 2.\ \forall x \in [0,\ \pi] \text{ on a : } & \arccos(\cos x) = x \end{array}\right.$
Mais que dire de $\arccos(\cos x)$ pour x réel quelconque ?...

Proposition 14 :
La fonction arccos est dérivable sur l'intervalle $]-1,1[$ (demi-tangente verticale en -1 et 1), et

$$\boxed{\forall x \in]-1,1[, \quad (\arccos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

Preuve 14 : Application du théorème de dérivation de la réciproque d'une fonction.

Remarque 15. La fonction arccos n'est pas dérivable aux bornes de son ensemble de définition.

PROPOSITION 15 :

$$\forall x \in [-1,1], \qquad \boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (1)} \quad \text{et} \quad \boxed{\arccos x + \arccos(-x) = \pi \quad (2)}$$

Preuve 15 : On peut par exemple étudier les dérivées des fonctions $\begin{cases} f(x) = \arcsin x + \arccos x \\ g(x) = \arccos x + \arccos(-x) \end{cases}$.

Formule 1	Formule 2

Remarque 16.

1. La relation (1) permet d'exprimer la fonction arccos en fonction de la fonction arcsin.
   On pourra ainsi l'utiliser pour remplacer $\arccos(x)$ par $\arcsin(x)$ dans les études de fonctions.
2. On peut utiliser la relation (2) pour prouver que le graphe de la f° arccos est symétrique par rapport à $A(0,\ \frac{\pi}{2})$.

`Exemple 5.` Etudier l'application f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arccos(\cos x)$.

Exercice : 4

Etudier la fonction f définie par $f(x) = \arcsin(\sin x) + \frac{1}{2}.\arccos(\cos 2x)$ dans le but de la représenter.

2.4 La fonction arctan

Sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, la fonction tangente est continue strictement croissante vers $\mathbb{R}$.
Elle admet donc une bijection réciproque notée $\boxed{\arctan : \mathbb{R} \mapsto]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.

Restriction de tan à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et fonction arctan :

Quelques valeurs particulières à connaître :

- $\arctan(0) = 0$
- $\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$
- $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$
- $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$

"$\arctan x$ est l'*arc* de $]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ dont la *tangente* est x"

Exercice : 5

(**) Soit $a_1,\ \dots, a_{13}$ des réels.
Montrer qu'il existe deux valeurs distinctes $p,\ q \in [\![1, 13]\!]$ telles que : $0 \leq \frac{a_p - a_q}{1 + a_p a_q} \leq 2 - \sqrt{3}$.

Attention : Piège ! ! !

La définition de la fonction arctan nous donne deux relations : $\begin{cases} 1.\ \forall x \in \mathbb{R} \text{ on a : } & \tan(\arctan x) = x \\ 2.\ \forall x \in]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[\text{ on a : } & \arctan(\tan x) = x \end{cases}$

Mais que dire de $\arctan(\tan x)$ pour x réel quelconque ?...

Exemple 6. Calculer $X = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{5} + \arctan\frac{1}{8}$

Exercice : 6

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Proposition 16 : La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{(\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

Preuve 16 : Par application du théorème de dérivation de la fonction réciproque.

Proposition 17 : **Comparaison en 0**
On a la limite suivante : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$

Preuve 17 : Conséquence de la dérivabilité de la fonction arctan en 0.

Proposition 18 : $\forall x \in \mathbb{R}^*$ $\boxed{\arctan x + \arctan\frac{1}{x} = \varepsilon\frac{\pi}{2}}$ $(\varepsilon = signe(x))$

Preuve 18 : Il suffit de dériver la fonction $f(x) = \arctan x + \arctan\frac{1}{x}$.

Exercice : 7

Soient $(a,\ x) \in \mathbb{R}^2$ tels que $ax \neq 1$.
Montrer que : $\arctan a + \arctan x = \arctan\frac{a+x}{1-ax} + \varepsilon\pi \quad (\varepsilon \in \{-1, 0, 1\})$

Pour simplifier une expression ou démontrer une formule comportant des fonctions trigonométriques circulaires, il existe en général trois méthodes possibles :

1. On peut effectuer un changement de variable judicieux
2. On peut s'intéresser à la tangente, au cosinus ou au sinus d'un des deux membres.
3. On peut effectuer une dérivation et reconnaître une dérivée connue.
   Attention dans ce cas à appliquer correctement le théorème de primitivation.

Exercice : 8

Simplifier pour $x \in]-1, 1[$, $\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

3 Les fonction hyperboliques

On définit les fonctions hyperboliques ch, sh et th sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :
Remarquer la correspondance avec les expressions complexes des fonctions circulaires ...

$\operatorname{ch} x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$	$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$
$\operatorname{sh} x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$	$\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$
$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Proposition 19 : Les fonctions hyperboliques sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:

$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$		$\cos' x = -\sin x$
$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$	à comparer à	$\sin' x = \cos x$
$\operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$		$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Preuve 19 : Pas de difficulté.

Proposition 20 : **Limites**
On a les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{th} x}{x} = 1$

Preuve 20 : Conséquence de la dérivabilité des fonctions sh et th en 0.

Formules à connaître :

$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$	$\cos x + i \sin x = e^{ix}$
$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$	$\cos x - i \sin x = e^{-ix}$
$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$	$\boxed{\cos^2 x + \sin^2 x = 1}$

Remarque 17.

1. les formules précédentes se démontrent par un simple calcul ...
2. Comme en trigonométrie circulaire, il existe des formules de trigonométrie hyperbolique.

   On pourra retrouver ces fomules en remplaçant : $\begin{cases} \sin \text{ par } i \operatorname{sh} \\ \cos \text{ par } \operatorname{ch} \\ \tan \text{ par } i \operatorname{th} \end{cases}$ dans les formules de trigonométrie circulaire.

   Retrouver ainsi les formules permettant d'exprimer $\operatorname{ch} 2x$ et $\operatorname{sh} 2x$ en fonction de $\operatorname{ch} x$ et $\operatorname{sh} x$.

Proposition 21 : **Branches infinies**.
La courbe d'équation $y = \frac{e^x}{2}$ est asymptote aux deux courbes d'équation $y = \operatorname{sh} x$ et $y = \operatorname{ch} x$ qui se positionnent de part et d'autre de cette asymptote.

Preuve 21 : On vérifie facilement que $\operatorname{sh} x - \frac{e^x}{2} \mapsto 0$ et $\operatorname{ch} x - \frac{e^x}{2} \mapsto 0$.

Une étude classique du sens de variation des fonctions hyperboliques permet d'obtenir les graphes suivants.

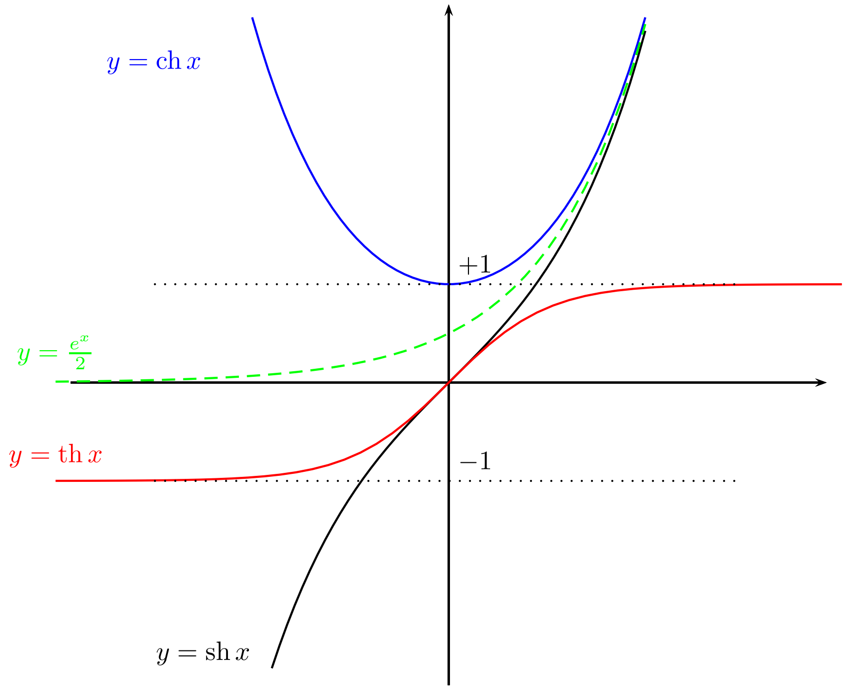


FIGURE 2 – Fonctions sh, ch et th

Remarque 18. La courbe de la fonction ch est appelée une *chaînette*. Il s'agit de la courbe obtenue en tenant une chaîne entre deux doigts. (Voir votre professeur de physique pour la démonstration)

PROPOSITION 22 : Retenir que $\forall x \in \mathbb{R}$,

- $\boxed{1 \leq \operatorname{ch} x}$
- $\boxed{\operatorname{sh} x < \operatorname{ch} x}$
- $\boxed{-1 < \operatorname{th} x < 1}$

Preuve 22 : Conséquences des études de fonctions.

Exercice : 9

$(*)$ Etudier la fonction définie par $f(x) = 2\arctan\big(\operatorname{th}(x)\big) - \arctan\big(\operatorname{sh}(2x)\big)$.

Exercice : 10

$(*)$ Montrer que $\quad \forall x \neq 0 \qquad \operatorname{th} x = \frac{2}{\operatorname{th} 2x} - \frac{1}{\operatorname{th} x}$ puis calculer $\quad S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} 2^k \operatorname{th}(2^k x)$.

4 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Réponses attendues
2.	Que faut-il vérifier pour pouvoir appliquer le théorème de la bijection ?	cf cours
3.	Que faut-il vérifier pour prouver que la bijection réciproque est dérivable ?	cf cours
5.	Donner l'expression de $(f \circ g)''$ Réponse : $f'' \circ g \times g'^2 + f' \circ g \times g''$	

6.	Savez-vous définir les fonctions ln, exp et $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$? Pouvez-vous justifier leur dérivabilité ?	cf cours
7.	Savez-vous démontrer que : $\frac{\ln(x+1)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, $\frac{e^x-1}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, $\frac{\arcsin x}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$?	cf cours
8.	Pourquoi peut-on affirmer que $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$ pour tout $x > 0$ et tout $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$?	cf cours
9.	Que dit le théorème de comparaison des fonctions exp., log. et puissances en $+\infty$? Sauriez-vous redémontrer que $e^x/x \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$?	cf cours
10.	Pouvez-vous tracer précisément les graphes des différentes fonctions exp., log. et puissances ?	cf cours
11.	Pouvez-vous redéfinir les fonctions arcsin, arccos, arctan et tracer précisément leur graphe ?	cf cours
12.	Que représentent les valeurs $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$?	cf cours
13.	Dans quels cas peut-on affirmer que : $\begin{cases} \arcsin(\sin x) = x \\ \arccos(\cos x) = x \\ \arctan(\tan x) = x \end{cases}$?	cf cours
14.	Savez-vous tracer les fonctions définies par $f(x) = \arcsin(sinx)$ et $g(x) = \arccos(\cos x)$?	cf cours
15.	Connaissez-vous et savez-vous retrouver les dérivées des fonctions arcsin, arccos, arctan ?	cf cours
16.	Existe-t-il un lien entre $\arcsin x$ et $\arccos x$? $\arccos x$ et $\arccos(-x)$? $\arctan x$ et $\arctan \frac{1}{x}$?	cf cours
17.	Sauriez-vous calculer la valeur $X = \arctan 2 + \arctan 5 + \arctan 8$?	$\frac{5\pi}{4}$
18.	Pouvez-vous redéfinir les 3 fonctions hyperboliques ? Connaissez-vous précisément leur dérivée ? Pouvez-vous les tracer sur un même graphique ?	cf cours
20.	Comment retrouver rapidement les formules de trigonométrie hyperbolique ? Exprimer $\operatorname{th} x$ en fonction de $t = \operatorname{th} \frac{x}{2}$?	cf cours $\operatorname{th} x = \frac{2t}{1+t^2}$
21.	Pouvez-vous prouver que $\arcsin(\operatorname{th} x) = \arctan(\operatorname{sh} x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$?	Par dérivation

5 Exercices

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

Pour toutes les fonctions usuelles vues en cours, il est essentiel de bien connaître :

1. Les définitions de ces fonctions
2. Leur ensemble de définition et l'ensemble des valeurs prises
3. Leur graphe (points particuliers, tangentes, asymptotes...) et leurs propriétés (parité, périodicité...)
4. Leur ensemble de dérivabilité et l'expression de leur dérivée
5. Les différentes formules faisant intervenir ces fonctions

1) Les fonctions puissances, exponentielles et logarithmes

1. Lorsque dans une expression, la puissance est un réel quelconque ou bien dépend de la variable, on commence par mettre l'expression sous forme exponentielle avant de commencer toute étude.
2. Bien connaître les formules avec les puissances ainsi que les relations caractéristiques de l'exponentielle et du logarithme.
3. Bien connaître les limites particulières, utiles pour lever les formes indéterminées.

Exercice de TD : 1

($*$) Soit la fonction f de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = (x + \sqrt{x^2+1})^{\frac{1}{x}}$.

1. Montrer que f se prolonge par continuité sur $\mathbb{R}$ en une fonction g.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
3. Etudier la parité de g.
4. Justifier la dérivabilité de g sur $\mathbb{R}^*$.
5. On admet que $\lim\limits_{x\to 0} g'(x) = 0$. Que peut-on en déduire sur la dérivabilité de g en 0 ?

Exercice de TD : 2

(♡♡) Soient a et b, 2 réels de $]1,\ +\infty[$.
Etudier la limite en $+\infty$ de la fonction $f(x) = \left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

Exercice de TD : 3

($**$) Etudier la limite en 0 de la fonction $f(x) = \frac{e^{\cos x} - e^{\operatorname{ch} x}}{\cos x - \operatorname{ch} x}$.
Aide : une mise en facteur devrait aider...

Exercice de TD : 4

($**$) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $2^x - 3^x = k$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice de TD : 5

($**$) Prouver que pour tout x appartenant à un intervalle à déterminer, nous avons : $x^x(1-x)^{1-x} \geq \frac{1}{2}$.

2) Les fonctions trigonométriques réciproques

1. Outre les ensembles de définition, de dérivabilité, les graphes et les expressions des dérivées, il faut également
   (a) connaître quelques formules...
   (b) savoir que $\arccos(\cos x)$, $\arcsin(\sin x)$ et $\arctan(\tan x)$ donnent x que sur certains intervalles.

2. Bien distinguer les deux types de questions suivantes :
   (a) Déterminer les valeurs de x vérifiant...
   Il s'agit ici de résoudre une équation et la méthode par analyse/synthèse sera en général utilisée
   (b) Prouver que pour tout $x \in I$, on a la relation suivante ...
   On choisira ici
      i. *une méthode de type "Soit $x \in I$, calculons" (avec éventuellement un changement de variable) ou*
      ii. *un raisonnement par équivalences successives ou enfin*
      iii. *une méthode utilisant une étude de fonction (qui aboutit à une dérivée nulle sur un intervalle)*

Exercice de TD : 6

1. (♡♡) Résoudre l'équation : $\arcsin(2x) = \arccos(x)$.
2. (♡♡♡) Résoudre l'équation : $\arcsin(x) + \arcsin(\frac{x}{2}) = \frac{\pi}{4}$.
3. (♡♡♡) Résoudre l'équation : $\arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice de TD : 7

($**$) Soit $x,\ y \in]-1,\ 1[$.
1. Montrer qu'il existe un unique $z \in \mathbb{R}$ tel que $\arctan x + \arctan y = \arctan z$
2. Déterminer cette valeur de z.

Exercice de TD : 8

($*$) Etudier la fonction f définie par $f(x) = (x + 2 + \frac{1}{x}) \arctan x$

Exercice de TD : 9

($*$) Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\arctan(\frac{x}{x+1})}{\arctan\left(\frac{1+2x-2x^2}{2}\right)}$.
1. Montrer que f est continue sur $I = [0,1]$.
2. Prouver que pour tout $x \in I$, on a : $f(x) + f(1-x) = 1$.
   Que peut-on en déduire ?
3. Montrer que $\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

Exercice de TD : 10

($**$) Après avoir déterminé son ensemble de définition, simplifier f définie par $f(x) = \arctan\left(\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}\right)$:
1. à l'aide des formules de trigonométrie.
2. par dérivation.

Exercice de TD : 11

(♡♡) Simplifier la fonction $f(x) = \arcsin(2x\sqrt{1-x^2})$ après avoir déterminé son ensemble de définition.

Exercice de TD : 12

($**$) Etudier la fonction définie par $f(x) = \arcsin\left(\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)}\right)$.

Exercice de TD : 13

($**$) Démontrer que : $\forall x \in [0;1], \quad \arcsin\sqrt{x} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.

Aide : on pourra procéder par dérivation, ou (et !!) utiliser la trigonométrie en posant $x = \sin^2 u$.

Exercice de TD : 14

($**$) Formule de Machin. Cette formule permit à M. Machin de déterminer 100 décimales de π en 1706.
Montrer que l'équation $4\arctan x - \arctan\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ et déterminer une méthode pour obtenir la forme exacte de cette solution.

3) Les fonctions hyperboliques

1. Bien connaître les ensembles de définition, de dérivabilité, les graphes et les expressions des dérivées
2. Savoir retrouver quelques relations simples de trigonométrie hyperbolique

Exercice de TD : 15

(♡♡) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $\arccos(\operatorname{th} x) + 2.\arctan(e^x) = \pi$.

Exercice de TD : 16

(∗∗)

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, calculer $\operatorname{sh}(\frac{x}{2^n})P_n(x)$ puis simplifier l'expression $P_n(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \operatorname{ch}(\frac{x}{2^k})$.
2. En déduire la limite lorsque $n \to +\infty$ de $P_n(x)$.
3. Pour $(n,\ x,\ y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tel que $x \neq y$, calculer l'expression $Q_n(x, y) = \frac{1}{2^n} \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \big(\operatorname{ch} \frac{x}{2^k} + \operatorname{ch} \frac{y}{2^k}\big)$.
4. En déduire la limite lorsque $n \to +\infty$ de $Q_n(x,\ y)$.

Exercice de TD : 17

(♡) Calculer $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{ch}(a + kb)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \operatorname{sh}(a + kb)$.

Exercice de TD : 18

(♡) Soit sch la fonction définie par $sch(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.

1. Etudier l'ensemble de définition et les variations de sch en précisant les limites aux bornes.
2. Montrer que la restriction de sch à $[0,\ +\infty[$ admet une bijection réciproque. On note $argsch$ cette application.
3. Donner les variations ainsi que les limites aux bornes de cette fonction $argsch$.
4. Tracer les courbes réprésentatives des deux fonctions précédentes.
5. Expliciter la fonction $argsch$.

Exercice de TD : 19

(♡♡) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \geq 2$, on note $S_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{np} \operatorname{sh} \frac{1}{k}$.

1. Prouver que pour tout $x \in]0,\ 1[$, on a : $\quad 1 + x \leq e^{\operatorname{sh} x} \leq \frac{1}{1-x}$.
2. En déduire que : $\quad \forall n \geq 2, \quad \ln\big(\frac{np+1}{n}\big) \leq S_n \leq \ln\big(\frac{np}{n-1}\big)$.
3. Déterminer alors la limite de S_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice de TD : 20

(♡♡) Pour tout k réel, on définit la fonction f_k sur $\mathbb{R}$ par : $f_k(x) = \operatorname{ch}(x) + k\operatorname{sh}(x)$.
On note $\mathcal{C}_k$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O,\ \overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j})$.

1. Soit $M_0(x_0,\ y_0) \in \mathbb{R}^2$.
   Préciser, en fonction de x_0 et y_0, le nombre de courbes $\mathcal{C}_k$ qui passent par ce point M_0.
2. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{T}_k$, la tangente à $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse $\ln(2)$.
   (a) Calculer $\operatorname{ch}({}_l n2)$ et $\operatorname{sh}(\ln 2)$.
   (b) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}_k$.
   (c) Prouver l'équivalence suivante, où A et B désignent deux constantes réelles :
   $$(\forall k \in \mathbb{R},\ Ak + B = 0) \iff (A = B = 0)$$
   (d) Montrer que toutes les droites de la famille $(T_k)_{k\in\mathbb{R}}$ sont concourantes en un point dont on précisera les coordonnées.
3. Tracer dans un même repère, les courbes $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{T}_k$ pour $k \in [\![-1, 2]\!]$