Le Calcul de Primitives

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

25 octobre 2017

$$\int^{\varphi(x)} f(u)\ \mathrm{d}u = \int^{x} f(\underbrace{\varphi(t)}_{u})\underbrace{\varphi'(t)\ \mathrm{d}t}_{\mathrm{d}u}$$

1 Résultats préliminaires

DÉFINITION 1 : **Primitives**
Soit deux fonctions f et F définies sur un intervalle I.
On dit que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I si et seulement si :

1. La fonction F est dérivable sur I
2. $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

THÉORÈME 1 : **Existence**
Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I

Preuve 1 : Voir le cours sur l'intégration...

THÉORÈME 2 : **Deux primitives sur un même intervalle diffèrent d'une constante**
Si F est une primitive de $f : I \mapsto \mathbb{C}$ sur un $\boxed{\text{intervalle } I}$ alors l'ensemble des primitives de f sur I est :

$$\{F + C \mid C \in \mathbb{C}\}$$

Preuve 2 :

1. Première inclusion :
   Soient G une autre primitive de f. On considère la fonction $H = F - G$ et on la dérive ...
2. Deuxième inclusion :
   On vérifie facilement que les fonctions de la forme $F + C$ avec $C \in \mathbb{C}$ sont des primitives de f sur I.

THÉORÈME 3 : **Calcul d'une intégrale à l'aide d'une primitive**
Si F est une primitive d'une fonction $f : I \mapsto \mathbb{C}$ continue sur un $\boxed{\text{intervalle } I}$ et $a,\ b \in I$, alors :

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Preuve 3 : Vu plus tard...

Corollaire 4 : **Existence d'une primitive qui s'annule en x_0**
Soit f une fonction réelle ou complexe, continue sur un intervalle I.
Pour tout $x_0 \in I$, f admet alors une unique primitive qui s'annule en x_0.
Cette primitive est la fonction :

$$x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$$

Plus généralement, l'expression d'une primitive quelconque de f pourra être notée : $\int^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$
Il s'agit d'un abus de notation qui sera utile à condition de se rappeler qu'on est à une constante près.

Preuve 4 : On prend deux primitives qui s'annulent en x_0.
I étant un intervalle, elle sont donc égales à une constante près...

Remarque 1. Ainsi avec un abus de notation, on peut écrire pour tout $x \in I$:

$$\Big(\int_{x_0}^{x} f(t)\ \mathrm{d}t\Big)' = f(x) \quad \text{ou encore} \quad \Big(\int^{x} f(t)\ \mathrm{d}t\Big)' = f(x)$$

Proposition 5 : **Linéarité des primitives**
Soit $f_1,\ f_2 \in \mathcal{C}(I,\ \mathbb{K})$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$.
On a $\forall x \in I$:

$$\int^{x} \lambda.f_1(t) + \mu f_2(t)\ \mathrm{d}t = \lambda \int^{x} f_1(t)\ \mathrm{d}t + \mu \int^{x} f_2(t)\ \mathrm{d}t$$

Preuve 5 : Pas de difficulté...

Proposition 6 : **Primitive d'une fonction complexe**
Soit $f = f_1 + i f_2$ une fonction complexe avec $f_1,\ f_2 \in \mathcal{C}(I,\ \mathbb{R})$.
f admet alors pour primitives sur I les fonctions F telles que :

$$F(x) = F_1 + iF_2 + C \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} F_1 \\ F_2 \end{array} \right. \text{ des primitives de } \left\{ \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \end{array} \right. \text{ et } C \in \mathbb{C}$$

Preuve 6 : Vérification facile...

Ce chapitre est consacré à la présentation de certaines méthodes usuelles de calcul de primitives.

Nous noterons :

1. $\int^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ l'expression d'une primitive quelconque de la fonction f de variable x
2. $\int f$ une primitive quelconque de f sur un intervalle I qu'on n'oubliera pas de préciser.
3. $\int_a^{x} f(t)\ \mathrm{d}t$ d'expression de la primitive de f qui s'annule en a

Les deux premières notations sont abusives (car elles ne désignent pas un unique objet), mais elles nous seront utiles pour la mise en oeuvre des méthodes usuelles.

Pour calculer une primitive d'une fonction, nous avons 3 outils principaux à notre disposition :

1. Les primitives usuelles à connaître par coeur !!
2. Le changement de variable.
3. L'intégration par partie.

Toute la difficulté consitera alors à :

1. Penser à utiliser au moment opportun les primitives connues
2. Faire un choix parmi l'une des deux méthodes précédentes

3. Transformer judicieusement la fonction étudiée pour faire apparaître une primitive connue
4. Choisir le bon changement de variable

2 Primitives usuelles à connaître par coeur

Toutes les primitives suivantes sont bien entendu données à une constante près et sont valables sur tout intervalle où les fonctions sont continues.

△ **Les classiques** ($\forall a \in \mathbb{R}$)

1.	$\displaystyle\int^x (t+a)^\alpha \,\mathrm{d}t = \frac{(x+a)^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$	5.	$\displaystyle\int^x \sin(at)\,\mathrm{d}t = -\frac{\cos ax}{a}$	$(a \neq 0)$
2.	$\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t+a} = \ln\lvert x+a\rvert$		6.	$\displaystyle\int^x \cos(at)\,\mathrm{d}t = \frac{\sin ax}{a}$	$(a \neq 0)$
3.	$\displaystyle\int^x e^{at}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{ax}}{a}$	$(a \in \mathbb{C}^*)$	7.	$\displaystyle\int^x \mathrm{sh}(at)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{ch}\, ax}{a}$	$(a \neq 0)$
4.	$\displaystyle\int^x \ln t\,\mathrm{d}t = x\ln x - x$		8.	$\displaystyle\int^x \mathrm{ch}(at)\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{sh}\, ax}{a}$	$(a \neq 0)$

`Exemple 1.` Soit $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,\ 0)\}$. Déterminer $\displaystyle\int^x \cos(bt)e^{at}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int^x \sin(bt)e^{at}\,\mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}$.

△ **Les 5 autres à connaître absolument**

Soit un réel $a > 0$.

1.	$\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$	sur $\mathbb{R}$
2.	$\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-t^2}} = \arcsin\frac{x}{a}$	sur $]-a,\ a[$
3.	$\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{a^2-t^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert$	sur $]-a,\ a[$ ou $]-\infty,\ -a[$ ou $]a,\ +\infty[$
4.	$\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$	sur $\mathbb{R}$
5.	$\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$	sur $]a,\ +\infty[$

△ **A connaître également :**

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \tan x$
2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin^2 t} = -\frac{1}{\tan x}$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}^2 t} = \mathrm{th}\, x$
4. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}^2 t} = -\frac{1}{\mathrm{th}\, x}$
5. $\displaystyle\int^x \tan t \,\mathrm{d}t = -\ln|\cos x|$
6. $\displaystyle\int^x \mathrm{th}\, t \,\mathrm{d}t = \ln|\mathrm{ch}\, x|$

3 Les formes à reconnaître

DÉFINITION 2 : **Fonction de classe $\mathcal{C}^1$**
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.
Nous dirons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I lorsque :

1. f est dérivable sur I
2. f' est continue sur I

THÉORÈME 7 : **Forme à reconnaître**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{C}$ continue sur l'intervalle I de primitive F.
Soit $u : J \mapsto I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle J Alors :

$$\int^x f[u(t)]u'(t)\,\mathrm{d}t = F \circ u(x)$$

Preuve 7 : En dérivant, on remarque que $Fo\varphi$ est bien une primitive de $fo\varphi.\varphi'$.

COROLLAIRE 8 : **Quelques formes usuelles**
Soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I.
On a alors pour $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$:

1. $\displaystyle\int u^\alpha u' = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$
2. $\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$
3. $\displaystyle\int e^u u' = e^u$
4. $\displaystyle\int \frac{u'}{1+u^2} = \arctan u$
5. $\displaystyle\int \cos(u)u' = \sin(u)$
6. $\displaystyle\int \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u}$
7. $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u$
8. $\displaystyle\int \frac{u'}{\sqrt{1+u^2}} = \ln(u+\sqrt{1+u^2})$
9. $\displaystyle\int \frac{u'}{a^2-u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right|$

Exercice : 1

Calculer les primitives suivantes sur un intervalle à déterminer.

1. $\displaystyle\int^x \frac{\arctan^3 t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \cos t.e^{\sin t}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x \frac{1}{1-e^{-t}}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int^x t\cos(t^2+1)\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int^x \frac{e^t}{\sqrt{1-e^{2t}}}\,\mathrm{d}t$

Exercice : 2

($*$) Calculer les primitives sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ des fonctions tan, $\tan^2$, $\tan^3$ et $\tan^4$.
On pourra remarquer que $\tan' = 1 + \tan^2$.

4 Le changement de variables

Théorème 9 : **Changement de variables**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I.
Soit $\varphi : [a,\ b] \mapsto I$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,\ b]$. Alors :

$$\boxed{\int_a^b f[\varphi(t)]\varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\ \mathrm{d}x}$$

Preuve 9 : On considère F une primitive de f et on remarque alors que $Fo\varphi$ est une primitive de $fo\varphi.\varphi'$.
On peut alors calculer les deux membres de l'égalité et montrer qu'ils sont égaux.

Corollaire 10 : **Cas des primitives**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue et $\varphi : J \mapsto I$ de classe $\mathcal{C}^1$ de l'intervalle J vers l'intervalle I.

$$\int^x f(\varphi(t)) \times \varphi'(t)\ \mathrm{d}t = \int^{\varphi(x)} f(u)\ \mathrm{d}u$$

Preuve 10 : Il suffit de prendre $b = x$ dans la formule précédente et de ne plus tenir compte des constantes.

Soit f une fonction continue sur I.
Pour déterminer une primitive de f, on pourra alors utiliser en pratique la démarche suivante :

Pour calculer $\displaystyle\int^x g(t)\ \mathrm{d}t$ sur J, on pourra poser : $u = \varphi(t)$ avec $t \in J$

On écrit alors $\begin{cases} u = \varphi(t) \\ du = \varphi'(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$ et on transforme $\displaystyle\int^x g(t)\ \mathrm{d}t$ en $\displaystyle\int^{\varphi(x)} f(u)\ \mathrm{d}u$:

1. en remplaçant t et $\mathrm{d}t$ par leur expression en fonction de u
2. en remplaçant la borne x par $\varphi(x)$

`Exemple 2.` Calculer les primitives suivantes en posant $u = \tan \frac{t}{2}$, ou $u = \operatorname{th} \frac{t}{2}$ ou $u = e^t$.

1. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ sur $I =]0, \pi[$
2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\cos t}$ sur $I =]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$
3. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{sh} t}$ sur $I =]0, +\infty[$
4. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\operatorname{ch} t}$ sur $I = \mathbb{R}$

`Exemple 3.` Calculer à l'aide d'un changement de variables les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \sqrt{1-t^2}\ \mathrm{d}t$ sur $]-1, 1[$
2. $\displaystyle\int^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ sur $]-1, 1[$

`Exemple 4.` Calculer les primitives suivantes :

1. $\displaystyle\int^x \frac{\ln t}{t(1+\ln^2 t)}\ \mathrm{d}t$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. $\displaystyle\int^x \frac{\sin^3 t}{\cos^5 t)}\ \mathrm{d}t$ sur $]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$

5 L'intégration par partie

THÉORÈME 11 : **Calcul d'un intégrale par Intégration par parties**
Soient $u,\ v : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I avec $a,\ b \in I$.
Alors :

$$\int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t$$

Preuve 11 : Soit $f = uv$. Les fonctions u et v étant dérivables sur I, f est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.
Les fonctions u, u', v et v' étant continues, $u'v$ et uv' admettent des primitives et : $\int_a^b (uv)' = \int_a^b u'v + \int_a^b uv'$.

COROLLAIRE 12 : **Calcul d'une primitive par Intégration par parties**
Soient $u,\ v : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle I.
Alors :

$$\int^x u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t = u(x)v(x) - \int^x u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t \quad \forall x \in I$$

Preuve 12 : Il suffit de prendre $b = x$ dans la formule précédente et de ne plus tenir compte des constantes.

Remarque 2. La formule précédente est vraie à une constante près.

Pour calculer $\displaystyle\int^x f(t)\ \mathrm{d}t$ sur I :

1. on introduit deux fonctions u et v de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telles que $f = u'v$
2. on applique la formule d'intégration par partie

Remarque 3. On n'oubliera pas d'indiquer que les fonctions u et v choisies sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ! !

`Exemple 5.` Calculer une primitive de :

1. arctan sur $\mathbb{R}$.
2. arcsin sur $[-1,\ 1]$.
3. arccos sur $[-1,\ 1]$.

Exercice : 3

$(*)$ Calculer les primitives suivantes sur des intervalles à préciser :

1. $\displaystyle\int^x t\ln(t^2+1)\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x (t^2-t+3)e^{2t}\ \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \ln(1+t^2)\ \mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int^x t\sin^3 t\ \mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int^x \sqrt{16t^2+9}\ \mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int^x \mathrm{sh}\, t\sin t\ \mathrm{d}t$

Exercice : 4

$(*)$ Calculer les primitives suivantes sur des intervalles à préciser :

1. $\displaystyle\int^x \sin(\ln t)\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x e^t\sin t\ \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x e^{\arccos t}\ \mathrm{d}t$

Exercice : 5

$(**)$ Calculer sur $\mathbb{R}$ les primitives de $\displaystyle\int^x t^2e^t\cos 2t\ \mathrm{d}t$.

6 Primitives de fonctions rationnelles simples.

On a de façon immédiate, sur des intervalles I adaptés :

1. Pour $a,\ b \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\int^x \frac{a}{t+b}\,\mathrm{d}t = a\ln|x+b|$
2. Pour $a,\ b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ $\displaystyle\int^x \frac{a}{(t+b)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{-a}{(n-1)(x+b)^{n-1}}$

`Exemple 6.` Déterminer une primitive des fonctions rationnelles suivantes sur un intervalle à déterminer :

1. $f(x) = \frac{2}{3x+1}$
2. $g(x) = \frac{-3}{(2x-1)^2}$

Lorsque $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)}$ avec $a \neq b$, on effectue une décomposition en éléments simples.

On cherche alors deux réels α et β tels que :

$$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{\alpha}{x-a} + \frac{\beta}{x-b}$$

`Exemple 7.` Déterminer une primitive des fonctions rationnelles suivantes sur un intervalle à déterminer :

1. $f(x) = \frac{1}{2x^2+x-3}$ avec la méthode précédente
2. $g(x) = \frac{2x+1}{x^2-3x-10}$ on commence par faire apparaître la dérivée du dénominateur au numérateur
3. $h(x) = \frac{x^2-3}{x^2-3x+2}$ on commence par faire apparaître le dénominateur au numérateur

Remarque : lorsque le numérateur est de degré supérieur ou égal à 3, on commence par effectuer une division euclidienne.

Lorsque $f(x) = \frac{1}{x^2+ax+b}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, on effectue une décomposition canonique.

$$\frac{1}{x^2+ax+b} = \frac{1}{(x+\frac{a}{2})^2 + (b-\frac{a^2}{4})}$$

Puis on se ramène à la forme $\frac{1}{t^2+c^2}$ par changement de variables.

`Exemple 8.` Déterminer une primitive des fonctions rationnelles suivantes sur un intervalle à déterminer :

1. $f(x) = \frac{1}{x^2+x+1}$
2. $g(x) = \frac{x+1}{x^2+x+3}$
3. $h(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x+3}$

7 Entrainement au calcul de primitives

Exercice de TD : 1

($*$) Calculer les primitives suivantes sur des intervalles adaptés :

1. $\displaystyle\int^x \sin^2 t\cos^3 t\ \mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int^x \sin^5 t\cos^2 t\ \mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int^x \sin^2 t\cos^4 t\ \mathrm{d}t$ (par linéarisation)
4. $\displaystyle\int^x \sin^2 t\cos^4 2t\ \mathrm{d}t$ (par linéarisation)

On retiendra que lorsqu'une des deux puissances p ou q est impaire, alors on calcule facilement $\int^x \cos^p(t)\sin^q(t)\,dt$ *à l'aide d'un changement de variables bien choisi.*

Exercice de TD : 2

(∗∗) Un calcul un peu long... mais complet !

1. Trouver des réels a, b et c tels que $\frac{u^3}{1+u^3} = 1 + \frac{a}{1+u} + \frac{bu+c}{u^2-u+1}$
2. En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de $f(x) = \sqrt[3]{e^x - 1}$.
   On posera : $u = \sqrt[3]{e^t - 1}$

Exercice de TD : 3

(∗∗) Calculer des primitives des fonctions suivantes sur des intervalles à déterminer :

1. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$. *On posera* $u = \sqrt{1+t}$.
2. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$. *On posera* $u = \sqrt{t}$.
3. $f(x) = \sqrt{\frac{x}{(1-x)^3}}$. *On posera* $u = \sqrt{\frac{t}{1-t}}$.
4. $f(x) = \frac{1}{x}\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$. *On posera* $u = \sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$.
5. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}+x}$. *On posera* $u = \sqrt{t-1}$.
6. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. *On posera :* $u = \sqrt[6]{t}$.

Exercice de TD : 4

(∗∗) Calculer des primitives des fonctions suivantes sur des intervalles à déterminer :

1. $f(x) = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos x}$.
2. $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x \cos 2x}$.
3. $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x - \cos x}$.
4. $f(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x + \tan^2 x}$.
5. $f(x) = \frac{\cos x}{1+\tan x}$

Exercice de TD : 5

(∗∗) Calculer $A_n = \int^x \mathrm{ch}((n+1)t)\,\mathrm{sh}^{n-1}\,t\,dt$ et $B_n = \int^x \mathrm{sh}((n+1)t)\,\mathrm{sh}^{n-1}\,t\,dt$.

On pourra s'intéresser à $A + B$ *et* $A - B$

Exercice de TD : 6

(∗∗) Trouver une CNS pour que les primitives des fonctions suivantes soient des fonctions rationnelles.

1. (∗∗) $x \mapsto \frac{ax+b}{x^3(x-1)^2}$
2. (∗ ∗ ∗) $x \mapsto \frac{x^3+a}{x(x^2+1)^2}$

Vous pourrez effectuer des DES.

Exercice de TD : 7

(∗∗) Montrer que $\int_0^{\sin^2 a} \arcsin\sqrt{x}\,dx + \int_0^{\cos^2 a} \arccos\sqrt{x}\,dx = \frac{\pi}{4}$ pour tout réel a.

Pour cela on introduira F d'expression $F(a) = \int_0^{\sin^2 a} \arcsin\sqrt{x}\,dx + \int_0^{\cos^2 a} \arccos\sqrt{x}\,dx$ et :

1. On étudiera F sur $[0,\ \pi/2]$
2. On montrera que F est impaire et π-périodique

Exercice de TD : 8

1. (∗ ∗ ∗) Calculer $\int^x \sqrt{\frac{1+\sqrt{1-t^2}}{1-t^2}}\,dt$ sur un intervalle à déterminer.

   On posera : $u = \arcsin x$

2. (∗∗) Calculer $\int^x \cos(2\ln t)\,dt$ sur un intervalle à déterminer.

   On posera : $u = e^x$

Exercice de TD : 9

($**$) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les expressions $f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ et $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)e^t \, \mathrm{d}t$.

1. Exprimer pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, $F_n(x)$ en fonction de $F_{n-1}(x)$.
2. En déduire $F_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.