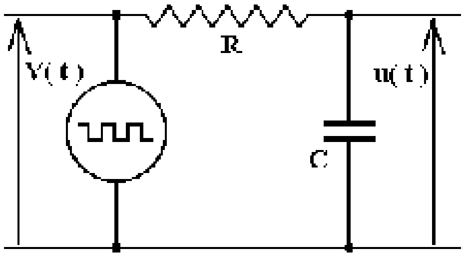
Les équations différentielles linéaires

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

7 novembre 2016



Dans ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ représente $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Une équation différentielle est une équation où l'inconnue est une fonction y de variable t (par exemple), et dans laquelle peuvent figurer : la variable t, la fonction y et ses dérivées successives.

Ce cours présente des méthodes de résolution sur un $\boxed{\text{INTERVALLE } I}$ de certaines Equations Différentielles.

1 Rappels sur les primitives

Définition 1 : **Primitives**
Soit un *intervalle* I et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $F : I \mapsto \mathbb{R}$ est une primitive de f sur I si

1. la fonction F est dérivable sur l'intervalle I
2. $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$

Remarque 1. Attention !!!
Vous remarquerez ici que l'on considère I un intervalle de $\mathbb{R}$ et non un sous-ensemble quelconque de $\mathbb{R}$.

Proposition 1 :
Si f est une fonction dérivable sur un $\boxed{\text{intervalle } I}$.
Si $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$, alors f est une fonction constante sur I.

Preuve 1 : Admis pour l'instant ...

Remarque 2. Trouver une fonction dérivable non constante dont la dérivée est nulle.

Corollaire 2 : Deux primitives de f sur un intervalle I sont égales à une constante près.

Preuve 2 : Soit F_1 et F_2 deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle $[a,\ b]$.
On considère alors la fonction $F = F_1 - F_2$ et on la dérive ...

Théorème 3 : **Existence de primitives d'une fonction continue**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction *continue* sur un *intervalle* I. La fonction f admet des primitives sur l'intervalle I.
En particulier, si l'on considère un point $a \in I$, la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$$

est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a et est de classe $\mathcal{C}^1$.

Preuve 3 : Admis pour l'instant.

Remarque 3. Il existe des fonctions non continues qui admettent des primitives.

2 Equations linéaires du premier ordre

2.1 Introduction

Définition 2 :

1. On appelle *équation différentielle linéaire du premier ordre*, toute équation différentielle de la forme

$$\boxed{(E)\ :\ a(t)y' + b(t)y = f(t)}$$

avec a, b et f, 3 fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

2. On dit que l'équation est *normalisée* si elle s'exprime sous la forme

$$\boxed{(E)\ :\ y' + a(t)y = f(t)}$$

avec a et f deux fonctions continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Remarque 4.

1. On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des fonctions y solutions de l'équation différentielle (E).
2. On dit que deux équations différentielles sont *équivalentes* lorsqu'elles ont même ensemble de solutions.
3. Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on appelle *courbe intégrale* de l'équ. diff., une courbe représentative d'une solution $y \in \mathcal{S}_E$.

Définition 3 : **Solution d'une Equation différentielle**
On dit que $u\ :\ I \mapsto \mathbb{K}$ est solution sur I de $\boxed{(E) \quad a(t)y' + b(t)y = f(t)}$ ssi :

1. u est une fonction dérivable sur I
2. $\forall t \in I, \quad a(t)u'(t) + b(t)u(t) = f(t)$

`Exemple 1.` Déterminer une équation différentielle dont la fonction f définie par $f(t) = t.e^{2t}$ est solution sur $\mathbb{R}$.

Remarque 5. *Résoudre* (on dit aussi *intégrer*) sur I une équation différentielle (E) consiste à déterminer l'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions sur I de (E). Il sera néanmoins nécessaire de préciser si l'on recherche les solutions réelles ou les solutions complexes de l'équation.

L'objectif de cette partie est de déterminer des méthodes de résolution d'une équation différentielle de la forme :

$$(E)\ :\ y' + a(t)y = f(t) \quad \text{sur un intervalle } I$$

2.2 Résolution

Soit (E) une équation différentielle de la forme $\boxed{y' + a(t).y = f(t)}$ avec a et f continues sur I.

Définition 4 : On appelle *équation homogène* associée à (E), l'équation (avec second membre nul) :

$$(H) \quad y' + a(t)y = 0$$

Théorème 4 : **Solutions de l'équation homogène** (H) $y' + a(t)y = 0$
Soit $A : I \mapsto \mathbb{K}$ une primitive de la fonction a sur l'intervalle I.

L'ensemble des solutions de (H) est alors : $\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ce^{-A(t)}\ ;\ C \in \mathbb{K}\}}$

Preuve 4 : On multiplie l'équation par $e^{A(t)}$ et on reconnaît la dérivée d'une fonction.

Remarque 6. L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions de l'équation homogène (H) est une droite vectorielle de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.
On note : $\mathcal{S}_H = \text{Vect}(t \to e^{-A(t)})$.

Corollaire 5 : **Cas où a est une constante λ**
L'ensemble des solutions de (H) $y' + \lambda y = 0$ est alors : $\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ce^{-\lambda t}\ ;\ C \in \mathbb{K}\}}$

Preuve 5 : Immédiat.

`Exemple 2.` $(*)$

1. Rechercher les solutions complexes de l'équation différentielle $(E) : y' + y = 0$ sur l'intervalle $I = \mathbb{R}$.
2. Trouver l'unique solution de (E) vérifiant $y(0) = 2$.
3. Dessiner l'ensemble des courbes intégrales.

`Exemple 3.` $(*)$ Déterminer les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ de l'équation différentielle $(E) : (1 + t^2)y' + 4ty = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice : 1

Résolution de l'équation fonctionnelle $f(t + u) = f(t).f(u)$
$(**)$ Déterminer l'ensemble des applications f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ vérifiant la relation $f(t + u) = f(t).f(u)$.

Théorème 6 : **Solutions de l'équation complète** (E) : $y' + a(t).y = f(t)$ **(a, f continues sur I)**
Soit $\tilde{y}$ une solution particulière de (E).
L'ensemble $\mathcal{S}_E$ des solutions à valeurs dans $\mathbb{K}$ de (E) sur l'intervalle I est :

$$\boxed{\mathcal{S} = \{t \mapsto \tilde{y}(t) + Ce^{-A(t)}\ ;\ C \in \mathbb{K}\}}$$

Preuve 6 : Il suffit de raisonner par équivalences successives : "y sol de (E)" $\Longleftrightarrow \dots$

Remarque 7. On dit que $\mathcal{S}$ est la *droite affine* de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$ passant par $\tilde{y}$ et de direction $\text{Vect}(t \mapsto e^{-A(t)})$.
On note aussi : $\mathcal{S}_E = \tilde{y} + \text{Vect}(t \mapsto e^{-A(t)})$.

Résolution pratique d'une équation de la forme $y' + a(t)y = f(t)$

1. On résout l'équation homogène :
   La solution générale de l'équation homogène est de la forme :
   $$t \mapsto Ce^{-A(t)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C \in \mathbb{K} \\ A \text{ une primitive de } a \text{ sur } I \end{cases}$$
2. On cherche une solution particulière $\tilde{y}$.
3. On en déduit l'ensemble des solutions de l'équation complète : $\mathcal{S}_E = \tilde{y} + \text{Vect}(t \mapsto e^{-A(t)})$.

Recherche d'une solution particulière

1. (a) On commence par regarder s'il existe une solution évidente. ($y' + xy = 3x$)
   (b) Sinon, on peut présumer de la forme d'une solution et procéder par équivalences. ($y' + 2y = (1+x)e^x$)
   (c) Enfin, la méthode de la *variation de la constante* montre que l'on peut chercher une solution particulière de l'équation complète sous la forme $\tilde{y}(t) = C(t)e^{-A(t)}$ où $C(t)$ est une fonction dérivable sur I vérifiant :
   $$\boxed{C'(t)e^{-A(t)} = f(t)} \qquad (y' - y = \frac{e^x}{x})$$
2. Lorsque le second membre est de la forme $f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$, on pourra utiliser le principe de superposition des solutions qui dit que :
   Si l'on connaît des solutions particulières $\tilde{y_1}, \ \dots, \ \tilde{y_n}$ des équations avec seconds membres $f_1(t), \ \dots, \ f_n(t)$, alors la fonction $\tilde{y}$ telle que :
   $$\boxed{\tilde{y}(t) = \tilde{y_1}(t) + \cdots + \tilde{y_n}(t)} \qquad (y' + y = e^{2x} + 2\sin x)$$
   est une solution particulière de l'équation (E)

Remarque 8. La démonstration de la méthode de variation de la constante prouve l'existence de solutions de (E).

Exercice : 2

($*$) Rechercher sur $I = \mathbb{R}$, les solutions complexes des équations différentielles suivantes :

1. $y' + ty = t$
2. $y' + \dfrac{t}{t^2+1}y = \dfrac{1}{t^2+1}$
3. $y' + y = 2e^x + 4\sin x + 3\cos x$
4. $y' + 2xy = e^{x-x^2}$

Théorème 7 : **Résolution du problème de Cauchy**
On appelle *problème de Cauchy*, la résolution d'une équation différentielle vérifiant une condition initiale.
Soit $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Soit a et f deux fonctions continuent sur I.

$$\boxed{\text{Il existe une et une seule solution de } (E) \ : \ y' + a(t)y = f(t) \text{ vérifiant } y(t_0) = y_0.}$$

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, cela signifie qu'il existe une unique courbe intégrale de (E) passant par le point de coordonnées $(t_0, \ y_0)$.

Preuve 7 : Facile !

Exercice : 3

($**$) Considérons un circuit RC monté en série aux bornes d'un générateur qui délivre une tension $V(t)$.
On appelle $u(t)$ la tension à l'instant t aux bornes du condensateur.
Cette tension vérifie l'équation diférentielle suivante : $RC\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = V$.

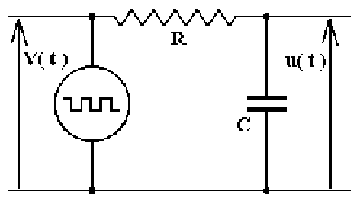


Figure 1 – Circuit RC en série

L'objectif de cet exercice est d'étudier la forme du signal u selon la nature de la tension fournie par le générateur. Pour faciliter les calculs, nous pourrons supposer que $RC = 1$.

1. On suppose que le générateur délivre une tension continue V constante égale à 1 volt.
   Déterminer la représentation graphique de u entre $t = 0$ et $t = 3$ lorsque $u(0) = 0$.

2. On suppose que le générateur délivre une tension alternative V telle que : $\forall p \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} V(t) = 1 & \text{si } 2\text{p} \leq t < 2p+1 \\ V(t) = 0 & \text{si } 2p+1 \leq t < 2p+2 \end{cases}$
   Déterminer la représentation graphique de u entre $t = 0$ et $t = 3$ lorsque $u(0) = 0$.

3. On suppose que le générateur délivre une tension alternative V telle que : $V(t) = 2\cos(2\pi t)$.
   Déterminer la représentation graphique de u entre $t = 0$ et $t = 3$ lorsque $u(0) = 0$.

3 Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

On rappelle que dans ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ représente encore $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans cette partie, on s'intéresse à la résolution des équations différentielles de la forme

$$\boxed{(E): \quad y'' + ay' + by = f(t)}$$

Définition 5 : **Equation linéaire du second ordre à coefficients constants**
Soient $(a,\ b) \in \mathbb{K}^2$, et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$ continue sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
On dit qu'une fonction $u : I \mapsto \mathbb{K}$ est une solution de l'équation différentielle

$$\boxed{(E): \quad y'' + ay' + by = f(t)}$$

si

1. u est une fonction deux fois dérivable sur I ;
2. $\forall t \in I$, $u''(t) + au'(t) + bu(t) = f(t)$.

On notera $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de (E) sur I.

`Exemple 4.` **Circuit RLC**.
Un circuit RLC vérifie une équation différentielle de la forme $y'' + \dfrac{w_o}{Q_0}y' + w_0^2 y = f(t)$ avec :

1. $w_0 = \sqrt{LC}$
2. y représentant la charge circulant dans le circuit et $Q_0 = \dfrac{1}{RCw_0}$ si le circuit est en série.
3. y représentant la tension aux bornes du condensateur et $Q_0 = RCw_0$ si le circuit est en parallèle.
4. f non nulle si le régime est forcé (présence d'un générateur).

Ce chapitre doit nous permettre de résoudre une telle équation dans le cas des régimes forcés habituels (f : tension continue, en créneau, sinusoïdale).

3.1 Résolution de l'équation homogène $(\mathcal{H})$

On considère l'équation homogène $\quad (H): \quad y'' + ay' + by = 0 \quad$ et l'on note $\mathcal{S}_H$ l'ensemble de ses solutions (à valeurs dans $\mathbb{K}$) sur I.

Définition 6 : L'équation $(C): \quad r^2 + ar + b = 0$ est appelée l'*équation caractéristique* associée à $(\mathcal{H})$.

Théorème 8 : **Solutions complexes de** $(\mathcal{H})$
Lorsque $a,\ b \in \mathbb{C}$, l'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions complexes de $(\mathcal{H})$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 2.
Et :

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines distinctes r_1 et r_2, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \text{Vect}(t \mapsto e^{r_1 t},\ t \mapsto e^{r_2 t}) = \{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \mid (A,\ B) \in \mathbb{C}^2\}}$$

2. Si l'équation caractéristique possède une racine double $r \in \mathbb{C}$, alors

$$\boxed{\mathcal{S}_H = \text{Vect}(t \mapsto e^{rt},\ t \mapsto te^{rt}) = \{t \mapsto (A + Bt)e^{rt} \mid (A,\ B) \in \mathbb{C}^2\}}$$

Preuve 8 : Soit r une solution de (C).
On recherche les solutions de (H) sous la forme : $t \mapsto C(t)e^{rt}$ après avoir vérifié que c'était possible.

PROPOSITION 9 : $\mathcal{S}_H$ est dans chaque cas, engendré par deux fonctions linéairement indépendantes.
On dira que c'est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2 et que les deux fonctions forment une *base* de cet espace vectoriel.

Preuve 9 : Soient $\left\{\begin{array}{l} u \\ v \end{array}\right.$ telles que $\mathcal{S}_H = \text{Vect}(u,\ v)$. Il s'agit de prouver que $\lambda u + \mu v = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \mu = 0 \end{array}\right.$.

`Exemple 5.` $(*)$ Déterminer les solutions complexes des équations différentielles suivantes : $\left\{\begin{array}{lcl} (E_1) & : & y'' - (2-i).y' - 2iy = 0 \\ (E_2) & : & y'' + (1-i)y = 0 \end{array}\right.$.

`Exemple 6.` $(*)$ Déterminer une équation différentielle dont les fonctions suivantes sont solution :

1. $\left\{\begin{array}{l} x \mapsto e^{2x} \\ x \mapsto e^{-x} \end{array}\right.$
2. $\left\{\begin{array}{l} x \mapsto e^{x} \\ x \mapsto x.e^{x} \end{array}\right.$

En pratique, on est souvent amené à rechercher les solutions réelles d'équations différentielles à coefficients réels.
On utilisera donc plutôt le théorème suivant :

THÉORÈME 10 : **Solutions réelles de** $(\mathcal{H})$
Lorsque $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$, on peut d'intéresser uniquement aux solutions $y : I \mapsto \mathbb{R}$ réelles.
L'ensemble $\mathcal{S}_H$ des solutions réelles est un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.

1. Si l'équation caractéristique possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2, alors :
$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t} \mid (A,\ B) \in \mathbb{R}^2\}}$$
2. Si l'équation caractéristique possède une racine double $r \in \mathbb{R}$, alors :
$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto (A + Bt)e^{rt} \mid (A,\ B) \in \mathbb{R}^2\}}$$
3. Si l'équation caractéristique possède deux racines complexes conjuguées $\left\{\begin{array}{l} r_1 = \alpha + i\beta \\ r_2 = \alpha - i\beta \end{array}\right.$, alors :
$$\boxed{\mathcal{S}_H = \{t \mapsto e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)) \mid (A,\ B) \in \mathbb{R}^2\}}$$

Preuve 10 : Il s'agit de rechercher parmi les solutions complexes de l'équation, celles qui sont réelles !

`Exemple 7.` $(*)$ Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'' = -\omega^2 y$ puis $y'' + 3y = 0$.
2. $y'' - 5y' + 6y = 0$
3. $y'' - 4y' + 4y = 0$

Cas particulier de l'équation : $y'' = \omega^2 y$

Les solutions réelles de cette équation peuvent s'exprimer sous deux formes possibles :

1. $y(t) = A.e^{\omega t} + B.e^{-\omega t}$ avec $A,\ B \in \mathbb{R}$
2. $y(t) = \lambda.\operatorname{ch}(\omega t) + \mu.\operatorname{sh}(\omega t)$ avec $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$

`Exemple 8.` $(*)$ Déterminer une équation différentielle dont les fonctions suivantes $\left\{\begin{array}{l} x \mapsto e^{2x}.\cos x \\ x \mapsto e^{2x}.\sin x \end{array}\right.$ sont solutions.

Exercice : 4

$(*)$ Discuter la nature des solutions réelles de l'équation différentielle décrivant le circuit RLC en régime libre ($f(t) = 0$).

Exercice : 5

$(*)$ En régime libre (absence de stimulation extérieure) et pour des petites oscillations, l'angle que fait un pendule avec la verticale vérifie l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\omega\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} + \omega^2\theta = 0$$

En supposant qu'à $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta'(0) = 0$, déterminer la fonction θ.

Réponse : On obtient un mouvement pseudo-périodique : $\theta(t) = \theta_0 e^{-\lambda\omega t}\cos(\sqrt{1-\lambda^2}\omega t + \varphi)$

3.2 Résolution de l'équation avec une exponentielle pour second membre

3.2.1 Solution générale

On considère l'équation complète $\boxed{(\mathcal{E}) \ : \quad y'' + ay' + by = f(t)}$ avec $\begin{cases} (a,\ b) \in \mathbb{C}^2 \\ f \text{ continue sur } I \end{cases}$.

Théorème 11 : **Structure de l'ensemble des solutions**
Soit $\tilde{y}$ une solution particulière de (E). On a alors :

$$\boxed{\mathcal{S}_E = \{t \mapsto \tilde{y}(t) + y(t) \mid y \text{ solution quelconque de } \mathcal{S}_H\}}$$

Preuve 11 : Il suffit de raisonner par équivalences successives : "y sol de (E)" $\Longleftrightarrow \dots$

Remarque 9. On dit que l'ensemble $\mathcal{S}_E$ est un espace affine de dimension 2 passant par $t \mapsto \tilde{y}(t)$ et de direction $\mathcal{S}_H$.

Théorème 12 : **Problème de Cauchy :** Unicité de la solution vérifiant deux CI

Soit l'équation différentielle $(E) \ : \quad y'' + ay' + by = f(t)$ définie sur un intervalle I.
Soit $t_0 \in I$ et $(y_0,\ y_1) \in \mathbb{K}^2$.

$$\boxed{(E) \text{ admet une unique solution } y \text{ telle que } \begin{cases} y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}}$$

Preuve 12 :

1. On admettra l'existence de solutions dans le cas où f est une fonction continue quelconque.
2. On prouve l'unicité en cherchant parmi les solutions possibles, celles vérifiant les conditions données.

Sachant résoudre l'équation homogène, notre problème consiste alors à déterminer une solution particulière.

Théorème 13 : **Principe de superposition**
Supposons que : $f(t) = f_1(t) + \cdots + f_n(t)$.
Si $\tilde{y}_i(t)$ est une solution particulière de l'équation avec pour second membre $f_i(t)$, alors :

$\boxed{\tilde{y}(t) = \sum_{i=1}^{n} \tilde{y}_i(t)}$ est une solution particulière de l'équation avec second membre $f(t)$

Preuve 13 : Pas de difficulté.

3.2.2 Cas où le second membre est une exponentielle

On considère alors l'équation complète $\boxed{(E) \ : \quad y'' + ay' + by = f(t)}$ avec $\begin{cases} (a,\ b) \in \mathbb{K}^2 \\ f(t) = A.e^{mt} \end{cases}$ où $m,\ A \in \mathbb{K}$.

Théorème 14 : **Solution particulière complexe de $y'' + ay' + by = A.e^{mt}$ avec $a,\ b,\ A,\ m \in \mathbb{K}$**

On rappelle l'équation caractéristique (C) : $r^2 + ar + b = 0$.

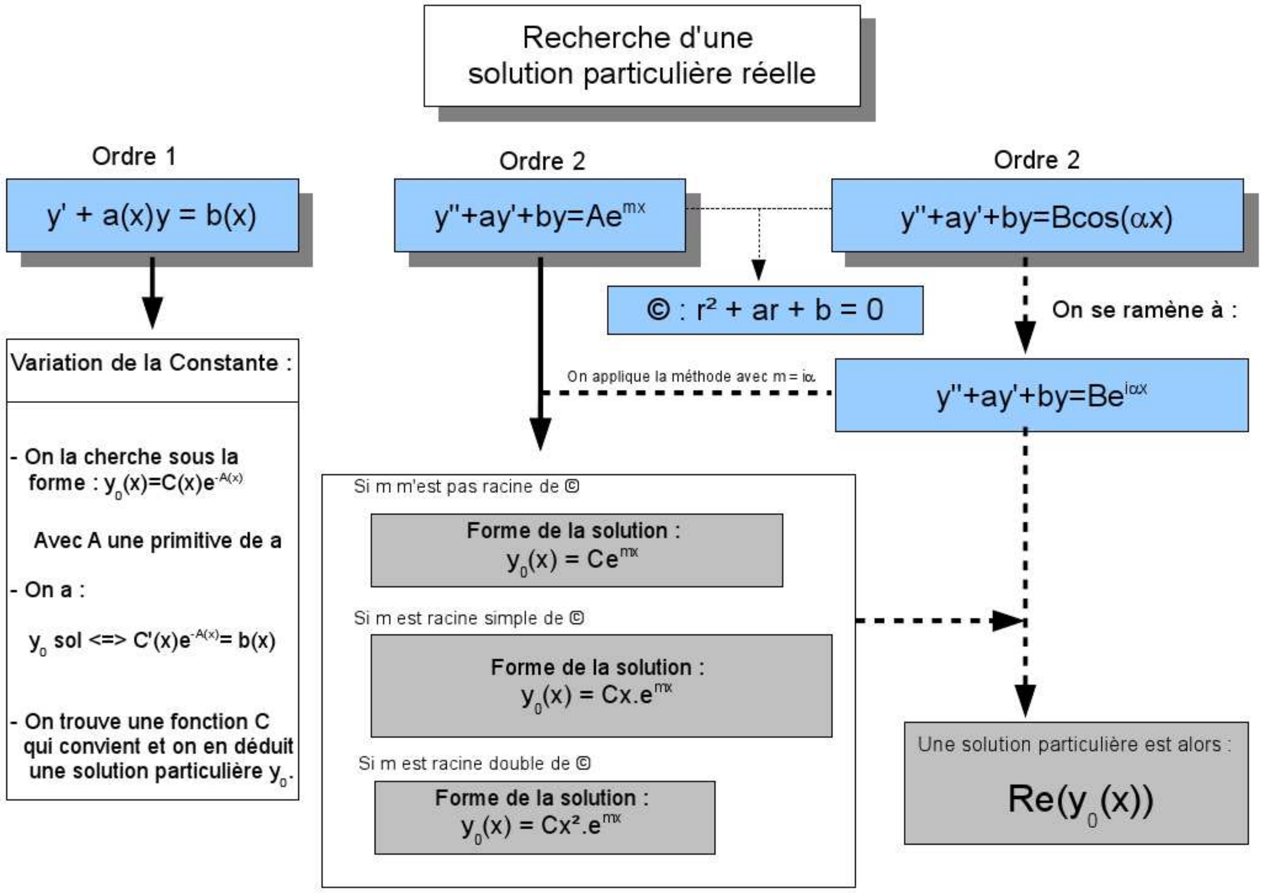
Si	Solution particulière
1) m n'est pas racine de (C)	$\tilde{y}(t) = \lambda.e^{mt}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$
2) m racine simple de (C)	$\tilde{y}(t) = \lambda t.e^{mt}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$
3) m racine double de (C)	$\tilde{y}(t) = \lambda t^2.e^{mt}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$

Preuve 14 : Simple vérification...

Solution particulière réelle de $(\mathcal{E})$: $y'' + ay' + by = A\cos\alpha t.e^{\beta t}$ **ou** $A\sin\alpha t.e^{\beta t}$ **avec** $a,\ b,\ A,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Remarquons que l'on peut exprimer $B\cos\alpha t.e^{\beta t} = \mathrm{Re}(Ae^{(\beta+i\alpha)t})$ et $A\sin\omega t.e^{\beta t} = \mathrm{Im}(Be^{(\beta+i\alpha)t})$.

1. On cherche alors une solution complexe $\tilde{y}$ de $y''+ay'+by = Ae^{imt}$ où $m = \beta+i\alpha$ (cf théorème précédent)
2. On en déduit une solution particulière de $(\mathcal{E})$ en prenant la partie réelle (ou la partie imaginaire) de $\tilde{y}$.



Un exemple de Fiche de Cours

`Exemple 9.` Déterminer les solutions réelles des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - y' - 2y = 3e^t + 1$
2. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2t}$
3. $y'' + 2y' + 5y = 3\cos 2t$
4. $y'' + 2y' - 2y = \mathrm{ch}(\sqrt{3}x)$

4 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Aide / Réponses
1.	Dérivabilité et dérivée de la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \ln(1+e^t)\,dt$?	C'est une primitive de $x \mapsto \ln(1+e^x)$

2.	Qu'appelle-t-on *courbe intégrale* sur I d'une équation différentielle ?	cf cours
3.	Résolvez sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(x^2+1)y' - xy = 0$.	$x \mapsto \lambda\sqrt{1+x^2}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$
4.	Justifiez et retrouvez l'expression des sol. d'une ED de la forme $y' + a(x)y = 0$?	cf cours
5.	Justifiez et retrouvez l'expression des sol. d'une ED de la forme $y' + a(x)y = f(x)$?	cf cours
6.	Prouvez que $y' + a(x) = f(x)$ admet des sol. lorsque $\left\{\begin{array}{l} a \\ f \end{array}\right.$ sont continues sur I	Variation de la const
7.	Résoudre sur $\mathbb{R}^{+*}$: $y' + y = \pi^x$	$x \mapsto \dfrac{\lambda e^{-x}(\ln\pi + 1) + \pi^x}{\ln\pi + 1}$
9.	Donnez les solutions générales complexes puis réelles de l'ED $y'' + ay' + b = 0$. Quelle est, dans chacun des cas, l'idée de la démonstration ?	cf cours
10.	Déterminez une ED dont les fonctions $\left\{\begin{array}{l} x \mapsto \cos 2x \\ x \mapsto \sin 2x \end{array}\right.$ sont solutions.	$y'' + 4y = 0$
11.	Déterminez les solutions complexes de $y'' + y' + 1 + i = 0$	$x \mapsto \lambda e^{-ix} + \mu e^{(i-1)x}$
12.	Déterminez les solutions réelles de $y'' - 4y' + 13y = 0$	$x \mapsto e^{2x}(\lambda\cos 3x + \mu\sin 3x)$
13.	Comment déterminer une SP de $y'' + ay' + y = f(x)$ lorsque : $f(x) = x^2 - 3$? $f(x) = 3e^{2x}$? $f(x) = 3.e^{(1+2i)x}$? $f(x) = 2.\cos(3x)$? $f(x) = 3\sin(2x)$? $f(x) = \operatorname{sh} x$?	cf cours
14.	Que nous dit le(s) théorème(s) intitulé(s) *"problème de Cauchy"* ?	cf cours
15.	Comment faire lorsqu'une ED linéaire admet pour 2^{nd} membre $f(x) = u(x) + v(x)$	cf cours

5 Exercices

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

1) Equations différentielles usuelles (le minimum à savoir !)

1. Résolution des équations différentielles linéaires du premier ordre :
   (a) On met l'équation sous forme résolue $y' + a(x)y = b(x)$ (en limitant si nécessaire l'intervalle de résolution).
   (b) On résout l'équation homogène $y' + a(x)y = 0$ en recherchant une primitive de a.
   (c) On cherche une solution particulière sous une forme particulière ou à l'aide de la méthode de "variation de la constante".
   (d) Les solutions sont alors les fonctions que l'on obtient en additionnant la solution particulière à la solutions générale de l'équation homogène.

2. Résolution des équ° différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants : $ay''+by'+cy = f(x)$
   (a) On résout l'équation homogène $ay''+by'+cy = 0$ en résolvant l'équation caractéristique $ar^2+br+c = 0$
   (b) On recherche une solution particulière. Le cours nous donne une méthode lorsque $f(x) = \lambda e^{mx}$.
   (c) On additionne alors les deux solutions précédentes.

Exercice de TD : 1

(♡) Cherchez les solutions des équations différentielles suivantes :

1. Solutions complexes de : $y' + i.y = 2$
2. Solutions réelles de : $y' + \dfrac{2}{t}y = t^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$
2. Solutions réelles de : $y' + \tan(x).y = \dfrac{1}{\tan(x)}$ sur $]0; \dfrac{\pi}{2}[$.
   Vous pourrez calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto \ln(\tan \dfrac{x}{2})$.

Exercice de TD : 2

(♡) Cherchez les solutions réelles définie sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $(E_1) : y'' + y = t^2 - 1$
2. $(E_2) : y'' + y' + y = e^{-t}$
3. $(E_3) : y'' - 2y' + y = 2e^t$
4. $(E_4) : y'' + y' - 6y = \cos(2t)e^t$

2) Raccordement de solutions

Il s'agit ici de résoudre une équation différentielle sur un intervalle sur lequel nous avons des difficultés à mettre l'équation sous forme résolue. On utilisera la méthode de résolution suivante :

1. On mettra les équations différentielles sous forme résolue en prenant soin de se placer sur des intervalles sur lesquels c'est possible.
2. On résolvra les équations différentielles sur chacun de ces intervalles
3. On recherchera alors les solutions sur $\mathbb{R}$ en effectuant une analyse\synthèse.

Exercice de TD : 3

(♡♡) Trouvez les solutions réelles définies sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $(E) \ : x.y' + 2y = \dfrac{x}{1+x^2}$ (une unique sol°) on admet que $\dfrac{\arctan x - x}{x^3} \xrightarrow[x\to 0]{} -\frac{1}{3}$
2. $(E) \ : x.y' - 2y = (x-1)(x+1)^3$ (tout raccordement en 0 est possible)
3. $(E) \ : t^3x' - 2x = 0$ (tout raccordement en 0 est possible)
4. $(E) \ : t(t-1)x' + (2t-1)x = 1$ (Une sol° sur $\mathbb{R}^{+*}$ mais pas sur $\mathbb{R}$)
5. $(E) \ : xy' + y = \cos x$ (un unique sol°) on admet que $\dfrac{\sin x - x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

3) Equations différentielles non usuelles

Les méthodes de résolution d'équations différentielles "non usuelles" ne sont pas au programme. Les exercices vous guident donc dans leur résolution. Le principe est toujours le même : se ramener à une équation différentielle usuelle par changement de variables. On distingue deux sortes de changements de variables :

1. Les changements de variables portant sur la fonction à trouver : on pose z en fonction de y la fonction inconnue
2. Les changements de variables portant sur la variable de la fonction à trouver : on pose x (la variable de la fonction inconnue) en fonction de t. Dans ce cas, on introduit une nouvelle fonction z telle que $z(t) = y(x)$.

Dans les deux cas, la résolution de l'équation différentielle doit se faire par équivalences successives.

Exercice de TD : 4

$(**)$ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E)\ :\quad y''' - y'' + y' - y = 0$.

Exercice de TD : 5

$(**)$ Equations à variables séparables.

Il s'agit de trouver les solutions réelles de $(E)\ :\ y' = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$ sur un intervalle I à déterminer.

1. Ecrire (E) sous la forme : $b(y)y' = a(x)$.
2. Montrer que si A et B sont des primitives de a et b alors $b(y)y' = a(x) \Longleftrightarrow B(y) = A(x) + Cste$.
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice de TD : 6

$(\heartsuit\heartsuit)$ Equations de Bernoulli.

Soit (E) l'équation $x^2.y' + y + y^2 = 0$ et I un intervalle de $\mathbb{R}^*$.

1. On suppose que y ne s'annule pas sur I. On pose : $z = \dfrac{1}{y}$.
   Montrez que y est solution de (E) ssi z est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.
2. Déterminez les solutions de (E) qui ne s'annulent pas.

Exercice de TD : 7

$(**-***)$ Equations homogènes.

Soit (E) l'équation : $x^2.y' = y^2 + x.y + x^2$.

Soit f une solution réelle de (E). On note $I \subset \mathbb{R}^{+*}$ son domaine et on suppose que f est $\mathcal{C}^1$ sur I.

1. Montrer que 0 n'est pas élément de I et que f est $\mathcal{C}^1$ sur I.
2. Soit g définie sur I par : $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$.
   Déterminer g, puis f.

Exercice de TD : 8

$(\heartsuit\heartsuit)$

1. A l'aide du changement de variable $t = \ln x$, résoudre l'équation différentielle : $\quad x^2y'' + 3xy' + y = (x+1)^2$
2. A l'aide du changement de variable $t = \arctan x$, résoudre l'équation différentielle : $y'' + \dfrac{2x}{1+x^2}y' + \dfrac{1}{(1+x^2)^2}y = 0$

Exercice de TD : 9

$(**)$ Equation Différentielle linéaire à coefficients non constants.

On souhaite résoudre (E) l'équation : $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = 0$ sur $I \subset \mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

1. Vérifier que $x \mapsto e^x$ est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre (E) en recherchant les solutions sous la forme $x \mapsto a(x).e^x$ avec a deux fois dérivable sur I.
   Vous justifierez que cette forme choisie pour la recherche des solutions n'est pas restrictive.
3. Résoudre $(1+x)y'' - 2y' + (1-x)y = x.e^x$.

Exercice de TD : 10

$(**)$ Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $(E)\ : (1+x^2)y'' + xy' = 1 + x.\arctan x$.

Vous pourrez rechercher une solution particulière *evidente*.

Exercice de TD : 11

(♡♡) Résoudre le système différentiel suivant : $\left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + y + \sin t \\ y' = -x + 2t \end{array} \right.$

Exercice de TD : 12

(∗∗) On rappelle que toute fonction réelle se décompose de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
Trouver les fonctions réelles f définies sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) + f(-x) = e^x + \cos x$$

4) Exercices d'Analyse/synthèse

Il s'agit ici d'exercice où l'on demande de déterminer les fonctions vérifiant une certaine condition.
On procède par analyse/synthèse en montrant que les fonctions cherchées vérifient une certaine équation différentielle. On résout alors cette équation et on vérifie en synthèse si les fonctions trouvées sont bien solution... Attention tout de même à bien vérifier la dérivabilité des fonctions avant de dériver !

Exercice de TD : 13

(♡♡) Déterminer les fonctions f, dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2f(-x) + x.$

Exercice de TD : 14

(∗∗) Déterminer les fonctions f, deux fois dérivables sur $\mathbb{R}^{+*}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad f'(x) = f(2-x)$$

Exercice de TD : 15

(∗∗) On considère l'équation différentielle : $y'' + \dfrac{2y'}{\operatorname{th} x} + y = 0 \quad (*)$

1. On pose $z(x) = y'(x) + \dfrac{y(x)}{\operatorname{th} x}$.
   Écrire l'équation différentielle (d'ordre 1) sur z déduite de $(*)$.
2. Résoudre sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ l'équation en z, puis $(*)$.
3. Parmi les solutions trouvées, quelles sont celles prolongeables par continuité en 0 ?
   On note y_0 la solution de $(*)$ telle que $y_0(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1$.
4. Démontrer que y_0 est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $\dfrac{y_0'(x)}{\operatorname{th} x}$ admet une limite finie en 0.
   En déduire que y_0 est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.