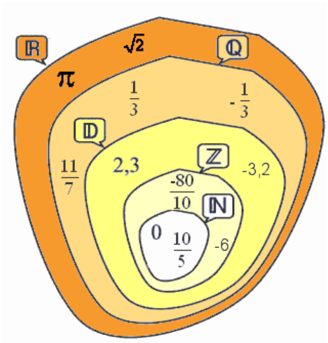
# Les nombres réels

**MPSI Prytanée National Militaire**

Pascal DELAHAYE

17 novembre 2016




## 1 Historique de la construction de $\mathbb{R}$

C'est environ au VIème siècle avant JC que l'intuition de l'existence de nombres non rationnels apparaît. Hyppase de Métaponte, un Pythagoricien affirme alors que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel. Cette idée révolutionnaire est alors rejetée par la communauté de mathématiciens et Hyppase de Métaponte est jeté à la mer...

Il faut attendre 200 ans plus tard, pour qu'Euclide prouve par l'absurde qu'Hyppase de Métaponte avait raison. L'ensemble des nombres est désormais constitué des rationnels $\mathbb{Q}$ (rapport de deux entiers) et des irrationnels (les autres). Cet ensemble est appelé l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Cependant, il faut attendre la deuxième partie du XIXème siècle pour qu'une définition formelle de $\mathbb{R}$ soit proposée. Le mathématicien allemand Dédekind définit alors un nombre réel comme *un ensemble de rationnels majoré et tel que tous ses éléments soient inférieurs à tous les éléments de son complémentaire dans* $\mathbb{Q}$. Ces ensembles sont communément appelés les *coupures de Dédekind*. Ainsi par exemple, $\sqrt{2}$ est défini par l'ensemble :

$$\sqrt{2} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0 \text{ ou } x^2 \leq 2\}$$

A la même époque, une autre définition de $\mathbb{R}$ est proposée par Cantor et Méray. Pour eux, $\mathbb{R}$ est l'ensemble des limites des suites de Cauchy (cf le cours de Spé). On dit alors que $\mathbb{R}$ est complet (il n'y a plus de trou dans l'axe des réels).

En munissant $\mathbb{R}$ des opérations $+$ et $\times$ (lois de composition internes) et de la relation d'ordre usuelle $\leq$, $\mathbb{R}$ prend la structure de *CORPS totalement ordonné* (Voir le cours sur les structures algébriques). Nous n'utiliserons les inégalités strictes que lorsqu'elles sont réellement nécessaires.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. Si $x \in \mathbb{Q}$ on dira que x est un *rationnel*
2. Si $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ alors on dira que x est un *irrationnel*.

## 2 Propriété de la borne supérieure

Dans les définitions suivantes, con considère $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Définition 1 : **Majorants, minorants d'une partie**

1. Un réel $M \in \mathbb{R}$ est un *majorant* de la partie $A$ ssi tout élément de $A$ est inférieur à $M$ : $\forall x \in A,\ x \leq M$
2. Un réel $m \in \mathbb{R}$ est un *minorant* de la partie $A$ ssi tout élément de $A$ est supérieur à $m$ : $\forall x \in A,\ x \geq m$

*Remarque* 1. Existence et unicité ?

Définition 2 : **Parties bornées**
On dit que $A$ est bornée si et seulement si : $\exists m,\ M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A,\quad m \leq x \leq M$.

Définition 3 : **Plus grand (maximum), plus petit élément (minimum) d'une partie**

1. Un réel $a \in \mathbb{R}$ est un *plus grand élément* de A ssi : $a \in A$ et $\forall x \in A,\ x \leq a$
S'il existe, le plus grand élément est unique et on le note $\boxed{a = \max A}$
2. Un réel $b \in \mathbb{R}$ est un *plus petit élément* de A ssi : $b \in A$ et $\forall x \in A,\ x \geq b$
S'il existe, le plus petit élément est unique et on le note : $\boxed{b = \min A}$

*Remarque* 2.

1. Le plus grand élément de $A$ est aussi appelé le *maximum* et le plus petit élément le *minimum*de $A$.
2. Le maximum de $A$ est un majorant qui appartient à $A$ tandis que le minimum de $A$ est ...
3. Existence et unicité ?

Définition 4 : **Borne supérieure (ou inférieure) d'une partie**

1. Si l'ensemble des majorants de $A$ admet un plus petit élément $M$, alors on dit que $M$ est la *borne supérieure* de $A$. Dans ce cas, $M$ est unique et l'on note $\boxed{M = \sup A}$
2. Si l'ensemble des minorants de $A$ admet un plus grand élément $m$, alors on dit que $m$ est la *borne inférieure* de $A$. Dans ce cas, $m$ est unique et l'on note $\boxed{m = \inf A}$

*Remarque* 3. Existence et unicité ?

*Remarque* 4.
Lorsqu'il existe, le plus grand élément d'un ensemble est aussi la borne supérieure de l'ensemble.
En revanche, la réciproque est fausse : $A = [0,\ 1[$.

Théorème Fondamental 1 : **Propriété FONDAMENTALE de la borne supérieure**

Si $A$ vérifie $\begin{cases} A \subset \mathbb{R} \\ A \neq \emptyset \\ A \text{ majorée par } M \in \mathbb{R} \end{cases}$, alors : $A$ admet une borne supérieure et $\sup A \leq M$.

*Preuve 1 :* Cette propriété fait partie des axiomes de définition de $\mathbb{R}$.

*Remarque* 5. De même, toute partie $A$ non-vide de $\mathbb{R}$ et minorée par $m$ possède une borne inférieure telle que $m \leq \inf A$.

Pour prouver que $\begin{cases} \sup A \text{ existe} \\ \sup A \leq M \end{cases}$, on vérifiera simplement que : $\begin{cases} A \subset \mathbb{R} \\ A \neq \emptyset \\ \forall x \in A,\ x \leq M \end{cases}$.

*Remarque* 6. Le théorème de la borne supérieure sera en particulier utilisé plus tard pour :

1. définir la notion d'intégrale de Riemann.

2. démontrer le théorème de la limite monotone (suites et fonctions).
3. démontrer le théorème de convergence des suites adjacentes
4. démontrer le théorème des valeurs intermédiaires

*Remarque* 7. Comment prouver que $m \leq \sup A$ ?

`Exemple 1.` $(*)$ Montrer que si $A$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée alors $\inf A \leq \sup A$.

*Exercice : 1*

$(*)$ Soit $A$ est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et bornée telle que $A = A_1 \cup A_2$, $A_1$ et $\cup A_2$ étant également non vides.
Montrer que $\begin{cases} \inf A = \min(\inf A_1,\ \inf A_2) \\ \sup A = \max(\sup A_1,\ \sup A_2) \end{cases}$.

**Proposition 2 : Existence d'un plus grand élément dans une partie de $\mathbb{Z}$**

Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément.
Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus petit élément.

*Preuve 2 :* Théorème admis car il découle des axiomes de construction de $\mathbb{N}$ qui sont hors-programme.

*Remarque* 8. Ce théorème sert en particulier à prouver l'existence du PPCM et du PGCD de deux nombres entiers et de définir la partie entière d'un réel.

**Théorème 3 : Caractérisation de la borne sup par $\varepsilon$**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

$$a = \sup A \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a \text{ est un majorant de la partie } A \quad (\forall x \in A,\ x \leq a) \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists x_\varepsilon \in A \cap [a - \varepsilon,\ a] \end{cases}$$

**Caractérisation par $\varepsilon$ de la borne supérieure**

*Preuve 3 :*
- $\Rightarrow$ : C'est la traduction de la définition.
- $\Leftarrow$ : On montre facilement par l'absurde de $a$ est le plus petit des majorants.

*Remarque* 9. Sauriez-vous énoncer et démontrer un théorème équivalent pour la borne inférieure ?

**Corollaire 4 : Caractérisation séquentielle de la borne sup**
Soit $A \subset \mathbb{R}$ non vide et $a \in \mathbb{R}$.

$$a = \sup A \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} a \text{ est un majorant} \\ \text{il existe une suite } (x_n) \in A^{\mathbb{N}} \text{ telle que } (x_n) \to a \end{cases}.$$

**Caractérisation séquentielle de la borne supérieure**

*Preuve 4 :* On construit la suite recherchée en prenant pour tout $n \geq 1$, $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$

`Exemple 2.` Trouver s'ils existent, les inf, sup ainsi que les max, min de :

1. $E_1 = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
2. $E_2 = \{1/n + (-1)^n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$
3. $E_3 = \{x^2 + y^2 | xy = 1,\ (x,\ y) \in \mathbb{R}^2\}$

*Exercice : 2*

$(*)$ Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $B \subset \mathbb{R}$ deux parties non-vides et majorées de $\mathbb{R}$.
Montrez que : $A \subset B \Rightarrow \sup A \leq \sup B$

*Exercice : 3*

$(**)$ Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.
On note : $A + B = \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } \exists (a,\ b) \in A \times B,\ x = a + b\}$
Montrez que $A + B$ possède une borne supérieure et que : $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$

## 3 Partie entière d'un réel

Théorème 5 : **Définition de la Partie Entière d'un réel**
Soit un réel $x \in \mathbb{R}$.
Il existe un unique entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $n \leq x < n + 1$
$n$ est appelé la *partie entière* de $x$ et est le plus souvent notée : $n = \lfloor x \rfloor$.

*Preuve 5 :* Il suffit de remarquer que $\{p \in \mathbb{Z} \mid p \leq x\}$ est une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée.

`Exemple 3.` On a : $\lfloor 6,34 \rfloor = 6$ et $\lfloor -23,56 \rfloor = -24$

Python
```
>>> floor(6.34)
>>> int(6.34)
```

Proposition 6 : **Encadrements**
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a les encadrements suivants :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1 \qquad \text{et donc} \qquad x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$

*Preuve 6 :* Immédiat !

**Encadrements**

*Exercice : 4*

$(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$. Prouver que pour tout $p \in ]1,\ +\infty[$, la suite définie par $u_n = \dfrac{\lfloor p^n x \rfloor}{p^n}$ converge vers $x$.

*Remarque* 10. Pour calculer une partie entière, on pourra :

1. soit transformer la variable sous la forme $x = \lfloor x \rfloor + r$ avec $r \in [0,\ 1[$ et effectuer les calculs
2. soit procéder à un encadrement précis de la valeur dont on cherche la partie entière.

Proposition 7 : $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z} :\ \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$

*Preuve 7 :* Il suffit d'encadrer $x+n$ par deux entiers... ou d'exprimer $x$ sous la forme $x = \lfloor x \rfloor + r$.

`Exemple 4.` $(*)$ Déterminer une formule donnant le nombre de chiffres que comporte l'écriture décimale d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Proposition 8 : ⚠ La fonction "Partie entière" n'est pas linéaire !!
Ainsi, en général :

1. $\lfloor x+y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$
2. $\lfloor n.x \rfloor \neq n\lfloor x \rfloor \quad (n \in \mathbb{Z})$

*Preuve 8 :* Trouvez des contres-exemples !!

**Graphe de la fonction Partie Entière**

*Exercice : 5*

$(*)$ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Prouver par deux méthodes différentes que : $\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

*Exercice : 6*

$(*)$ Etudier la continuité de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$.

Corollaire 9 : **$\mathbb{R}$ est archimédien**
Si $\alpha$ est un réel strictement positif, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exists!\ k \in \mathbb{Z} \quad \text{tel que} \quad k\alpha \leq x < (k+1)\alpha$$

*Preuve 9 :* Par équivalences successives on obtient : $k = \lfloor \frac{x}{\alpha} \rfloor$.

**$\mathbb{R}$ est archimédien**

*Remarque* 11. Ce résultat s'écrit aussi de la façon suivante :
Tout nombre réel $x$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = k\alpha + y$ où $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leq y < \alpha$.

COROLLAIRE 10 : **Valeurs décimales approchées**
Soit un réel $x$, et un entier naturel $n \geq 1$.
Alors, il existe un unique entier relatif $p$ tel que : $\boxed{p.10^{-n} \leq x < (p+1).10^{-n}}$ avec $p = \lfloor x.10^n \rfloor$.
On dit que :

1. $p.10^{-n}$ est *une valeur décimale approchée de $x$ par défaut* à la précision $10^{-n}$.
2. $(p+1).10^{-n}$ est *une valeur décimale approchée de $x$ par excès* à la précision $10^{-n}$.

*Preuve 10 :* C'est une application immédiate du fait que $\mathbb{R}$ est archimédien en prenant $\alpha = \dfrac{1}{10^n}$.

`Exemple 5.`
3.14159 est une valeur décimale approchée par défaut de $\pi$ à la précision $10^{-5}$
3.14160 est une valeur décimale approchée par excès de $\pi$ à la précision $10^{-5}$

*Exercice : 7*
$(**)$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une formule donnant la $p$ème décimale d'un nombre réel $x$.

# 4 Densité

DÉFINITION 5 : **Densité**
Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que la partie $A$ est dense dans $\mathbb{R}$ lorsque $\forall (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2$ avec $x_1 \neq x_2$, $A \cap ]x_1,\ x_2[ \neq \emptyset$
Cela signifie qu'entre 2 éléments quelconques de $\mathbb{R}$, on pourra toujours trouver un élément de $A$.

*Remarque* 12. En fait, cette définition implique qu'entre deux réels $x_1$ et $x_2$ quelconques distincts, il existe une infinité d'éléments distincts de $A$.

**$A$ dense dans $\mathbb{R}$**

PROPOSITION 11 : **Caractérisation par $\varepsilon$ (de la densité)**
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

$$\boxed{A \text{ est dense dans } \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a \in A \ \text{ tel que } |x-a| \leq \varepsilon}.$$

Cela signifie que l'on peut trouver un élément de $A$ aussi proche que l'on veut de n'importe quel réel $x$.

*Preuve 11 :* Pas de difficulté.

**Caractérisation de la densité de $A$ dans $\mathbb{R}$ par $\varepsilon$**

`Exemple 6.`

1. $\mathbb{Z}$ n'est pas dense dans $\mathbb{R}$

2. Si $\Delta$ est une partie de $\mathbb{R}$ de cardinal fini, $\mathbb{R}\backslash\Delta$ est dense dans $\mathbb{R}$

PROPOSITION 12 : **Caractérisation séquentielle (de la densité)**
Soit $A \subset \mathbb{R}$.

$$\boxed{A \text{ est dense dans } \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall x \in \mathbb{R}, \text{ il existe une suite } (a_n) \text{ d'éléments de } A \text{ telle que } (a_n) \to x}$$

*Preuve 12 :* Pas de difficulté en prenant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varepsilon = \dfrac{1}{n}$

**Caractérisation de la densité de $A$ dans $\mathbb{R}$ par les suites**

*Remarque* 13. Important !
On peut adapter la démonstration précédente pour prouver que l'on peut choisir $(a_n)$ $\left\{\begin{array}{l}\text{majorée par } x\\ \text{croissante}\end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l}\text{minorée par } x\\ \text{décroissante}\end{array}\right.$.

`Exemple 7.` $(*)$ Montrer que si $\left\{\begin{array}{l}A \subset B \subset \mathbb{R}\\ A \text{ dense dans } \mathbb{R}\end{array}\right.$ alors $B$ est aussi dense dans $\mathbb{R}$.

THÉORÈME FONDAMENTAL 13 : $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

*Preuve 13 :* Avec la caractérisation séquentielle :
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut par exemple, introduire la suite $(x_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ définie par : $x_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$.

*Remarque* 14. Comme le montre la démonstration précédente, l'ensemble des nombres décimaux relatifs est lui-aussi dense dans $\mathbb{R}$

`Exemple 8.` $(*)$ Trouver s'ils existent, les inf, sup ainsi que les max, min de : $E = \{\sin x \mid x \in \mathbb{Q}\}$.

THÉORÈME 14 : $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$

*Preuve 14 :* Utilisons la définition de la densité.
Lorsque $(x,\ y) \in \mathbb{Q}^2$, on prouve que $z = x + (y - x).\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ est un irrationnel de $[x,\ y]$.
*Sauriez-vous démontrer le résultat à l'aide de la caractérisation séquentielle ?*

*Remarque* 15. On peut résumer les 2 théorèmes précédents en disant qu'entre deux réels distincts on pourra toujours trouver un rationnel et un irrationnel.

`Exemple 9.` $(*)$

1. Déterminer les applications croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$.
2. Déterminer les applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\forall r \in \mathbb{Q},\ f(r) = r$.

*Exercice : 8*
$(* * *)$ On souhaite démontrer que l'ensemble $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z} = \{a + b\pi \mid (a,\ b) \in \mathbb{Z}^2\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que l'application $\varphi\ : n \in \mathbb{Z} \mapsto n.\pi - \lfloor n\pi \rfloor$ (la partie fractionnaire de $n\pi$) est injective.

2. On note $F = \{\varphi(n),\ n \in \mathbb{Z}\}$
   (a) Montrer que $F$ est de cardinal infini.
   (b) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe deux éléments $f_1$ et $f_2$ de $F$ tels que $|f_1 - f_2| \leq \varepsilon$
   (c) En déduire que $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est dense dans [0,1].
   Vous pourrez pour cela utiliser le caractère archimédien de $\mathbb{R}$ avec $\alpha = |f_1 - f_2|$
3. En déduire que $\mathbb{Z} + \pi\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

# 5 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

| | Questions | Réponses attendues |
|---|---|---|
| 1. | Connaissez-vous les notions de *minorant* et *majorant* d'une partie de $\mathbb{R}$ ?<br>Connaissez-vous les notions de *plus petit* et *plus grand* élément d'une partie de $\mathbb{R}$ ?<br>Connaissez-vous les notions de *borne inférieure* et *borne supérieure* d'une partie de $\mathbb{R}$ ? | Cf cours |
| 2. | Donner s'ils existent des minorant, majorant, plus petit élément, plus grand élément, borne sup et borne inf de l'ensemble suivant : $\Delta = \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{Z}^*\}$. | min, ppe et binf : 0<br>maj, pge et bsup : 2 |
| 3. | Connaissez-vous le théorème d'existence de la borne sup ? de la borne inf ? | cf cours |
| 4. | Comment caractériser avec $\epsilon$ le fait que $a = \sup A$ ?<br>Comment caractériser séquentiellement le fait que $a = \sup A$ ? | cf cours |
| 5. | Comment prouver qu'une partie de $\mathbb{Z}$ admet un élément maximal ? | cf cours |
| 12. | Comment est définie la *partie entière* d'un réel ? A quoi ressemble son graphe ? | cf cours |
| 13. | Encadrer $x$ à l'aide de sa partie entière. Inversement ? | cf cours |
| 14. | A-t-on $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ? | Non en général<br>Oui si $x \in \mathbb{N}$ |
| 15. | Que signifie la proposition "$\mathbb{R}$ est archimédien" ? Illustration graphique ? | cf cours |
| 16. | Définir les notions de "valeurs approchées" à l'aide de la partie entière. | cf cours |
| 17. | Donner la définition et les deux caractérisations de la densité. | cf cours |
| 18. | Pouvez-vous justifier la densité de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ ? | cf cours |
| 19. | Donner des exemples d'application de la densité. | cf cours |

# 6 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

## 6.1 Borne supérieure d'une partie

Le théorème le plus utilisé est l'axiome de définition de la borne sup (ou inf).

1. il s'applique lorsque la partie étudiée est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée.
2. il permet de prouver l'existence d'une borne sup.
3. il permet aussi d'en otenir une majoration puisque la brone sup est majoré par tout majorant de la partie étudiée, et donc par le majorant qui nous a permis d'utiliser le théorème.

L'autre théorème fondammental est la caractérisation de la borne sup.
Il nous dit en particulier que la borne sup peut être considérée comme la limite d'une suite d'éléments de la partie étudiée. En introduisant de telles suites, on peut faicelement obtenir des majorations ou des minorations utiles par passage à la limite.

*Exercice de TD : 1*

($*$) On se propose d'établir $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \exists (p,\ q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2^p(2q+1)$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose $A = \{m \in \mathbb{N} \mid 2^m \text{ divise } n\}$ .

1. Montrer que $A$ admet un plus grand élément $p$
2. Montrer que pour cet élément $p$, on peut écrire $n = 2^p(2q+1)$ avec $q \in \mathbb{N}$.

*Exercice de TD : 2*

(♡♡) Soit $A$ une partie non vide et bornée de $\mathbb{R}$.
On appelle diamètre de $A$ le réel positif défini par : $\delta(A) = \sup\{|x-y|,\ (x,y) \in A^2\}$.
Justifier l'existence de ce réel et montrer que $\delta(A) = \sup A - \inf A$.

*Exercice de TD : 3*

(♡♡) Soit $A$ une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée. On note $-A$ l'ensemble des opposés des éléments de $A$.
Prouver que : $\sup(-A) = -\inf A$.

*Exercice de TD : 4*

($**$) Etudier l'existence et préciser la valeur lorsqu'elles existent des quantités $\sup A$, $\inf A$, $\max A$ et $\min A$ lorsque :

$$A = \{xy \mid (x,\ y) \in \mathbb{R}^2 \ et\ |x| + |y| \leq 2\}$$

## 6.2 Partie entière

1. La détermination de la partie entière de $A(x)$ se fait en général par deux méthodes :
   (a) soit par encadrements en prouvant que $n \leq \lfloor A(x) \rfloor < n+1$
   (b) soit par calculs en remplaçant $x$ par $x = \lfloor x \rfloor + r$ avec $r \in [0,\ 1[$.
2. Deux encadrements sont souvent très utiles lorsqu'on travaille avec des parties entières :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \quad \text{et} \quad \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

*Exercice de TD : 5*

(♡) Montrer que pour tout réel x on a : $\lfloor \frac{x}{2} \rfloor + \lfloor \frac{x+1}{2} \rfloor = \lfloor x \rfloor$

*Exercice de TD : 6*

(♡) Soit $x$ et $y$ deux entiers relatifs. Calculer $\lfloor \frac{x+y}{2} \rfloor + \lfloor \frac{x-y+1}{2} \rfloor$.
*Aide : il semble assez naturel de procéder à une disjonction de cas...*

*Exercice de TD : 7*

(∗∗)

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 1$ on a : $\quad 2(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}) < \dfrac{1}{\sqrt{x}} < 2(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$
2. En déduire un encadrement de la partie entière de : $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sqrt{k}}$

*Exercice de TD : 8*

(♡♡) Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

1. $\lfloor 2x+1 \rfloor = \lfloor x+4 \rfloor$.
2. $\lfloor 1-x \rfloor = \lfloor 3-2x \rfloor$.

*On pourra recherche $x$ sous la forme $x = \lfloor x \rfloor + r$ avec $r \in [0,\ 1[$*

*Exercice de TD : 9*

(∗∗) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\quad x\lfloor x \rfloor = x^2 - (\lfloor x \rfloor)^2$

*Exercice de TD : 10*

(∗ ∗ ∗) Soit $x$ un réel et $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Prouver l'existence et l'unicité de $q \in \mathbb{Z}$, $r \in [\![0, p-1]\!]$ et $\alpha \in [0,\ 1[$ tels que $x = pq + r + \alpha$.
2. En déduire l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \lfloor \frac{x+k}{p} \rfloor = \lfloor x \rfloor$

*Exercice de TD : 11*

(∗ ∗ ∗) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \lfloor \sqrt{k} \rfloor$.

*Exercice de TD : 12*

(♡♡)

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Prouver que $n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor \leq n\lfloor x \rfloor + n - 1$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de réels $x$ tels que $\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor + \lfloor 32x \rfloor = 12345$.
   *Aide : on envisagera d'utiliser le théorème de division euclidienne.*

## 6.3 Densité

1. Le plus simple pour prouver la densité dans $\mathbb{R}$ d'une partie est, pour tout $x \in \mathbb{R}$, de trouver une suite d'éléments de cette partie qui converge vers $x$.
2. La densité est souvent utiliser pour généraliser à $\mathbb{R}$ des propriétés vraies sur un ensemble $A$ dense dans $\mathbb{R}$.

*Exercice de TD : 13*

(♡♡) Soient $A$ et $B$ deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $A$ est dense dans $B$ et $B$ est dense dans $\mathbb{R}$.
Montrer que $A$ est dense dans $\mathbb{R}$.

*Exercice de TD : 14*

(♡♡) On appelle *nombre dyadique* tout rationnel de la forme $\dfrac{m}{2^n}$ où $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$.
Montrer que l'ensemble des nombres dyadiques est dense dans $\mathbb{R}$.

*Exercice de TD : 15*

(∗) Montrer que $E = \{q^2 \mid q \in \mathbb{Q}\} \cup \{-q^2 \mid q \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

## 6.4 Divers

*Exercice de TD : 16*

(♡) Prouver que $\sqrt{3}$ est un irrationnel.

*Exercice de TD : 17*

($**$) Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre rationnels tels que $b$ et $d$ soient positifs et $b$ n'admette pas de racine dans $\mathbb{Q}$.
Prouver que : $(a+\sqrt{b}=c+\sqrt{d}) \Rightarrow (a=c \textit{ et } b=d)$

*Exercice de TD : 18*

($**$) Démontrer que : $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}-\sqrt[3]{-2+\sqrt{5}}=1$.

*Exercice de TD : 19*

(♡♡) Trouver une CNS sur les rationnels $a$, $b$, $c$ et $d$ pour que $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ soit rationnel pour tous les $x$ irrationnels.