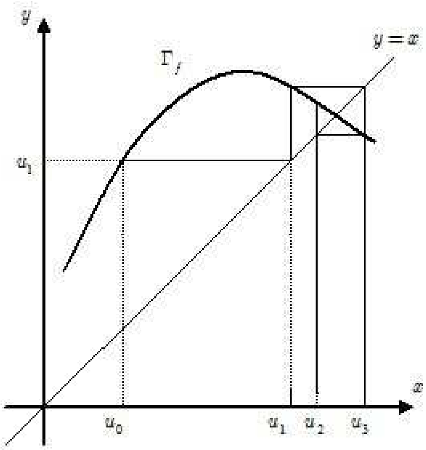
# Les Suites réelles

**MPSI Prytanée National Militaire**

Pascal Delahaye - D'après le cours d'Alain Soyeur

24 novembre 2016




## 1 Premières définitions

DÉFINITION 1 : **Suite**
Une suite réelle est une application $u : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}$.
Au lieu de noter cette application sous la forme standard, on la note plutôt sous une forme indicielle :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ou encore} \quad (u_n) \quad \text{où} \quad u_n \text{ représente l'image de n}$$

On note $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites réelles.

*Remarque* 1. On dira qu'une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ définie à partir d'un certain rang $n_0$ est aussi une suite. Cependant, pour simplifier les notations, on considérera par la suite que les suites sont définies à partir de $n_0 = 0$.

⚠ Attention ⚠

```
- (Un) désigne une suite (c'est donc une application),
- Un désigne un terme de la suite (c'est donc un réel).
```

*Remarque* 2. Les deux graphes suivants permettent de visualiser les premiers termes d'une suite :

DÉFINITION 2 : **Opérations sur les suites**
On définit les lois suivantes sur l'ensemble des suites :

1. Addition de 2 suites : $(u_n) + (v_n) = (u_n + v_n)$.
2. Multiplication d'une suite par un réel : $\lambda(u_n) = (\lambda u_n)$.
3. Multiplication de deux suites : $(u_n).(v_n) = (u_n.v_n)$.

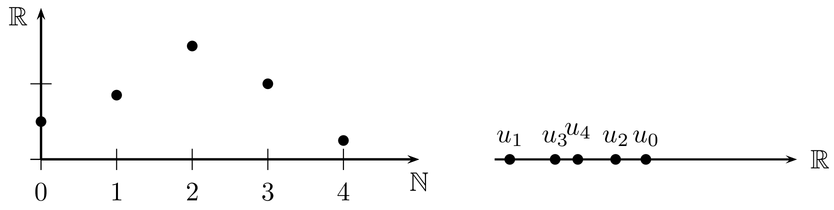



FIGURE 1 – Représentation d'une suite

DÉFINITION 3 : **Suites bornées**

On dit qu'une suite $(u_n)$ est majorée ssi $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq M$.
On dit qu'une suite $(u_n)$ est minorée ssi $\exists m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $m \leq u_n$.

On dit qu'une suite $(u_n)$ est bornée ssi elle est majorée et minorée.
On dit qu'une suite $(u_n)$ est bornée ssi $(|u_n|)$ est majorée.

⚠ Attention ⚠

`Bien faire attention à l'ordre des quantificateurs dans les définitions précédentes.`

DÉFINITION 4 : **Suites monotones**

On dit qu'une suite $(u_n)$ est croissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$.
On dit qu'une suite $(u_n)$ est décroissante ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq u_n$.
On dit qu'une suite $(u_n)$ est monotone ssi elle est croissante ou décroissante.
On dit qu'une suite $(u_n)$ est stationnaire ssi elle constante à partir d'un certain rang.

Méthode 1 : Pour Déterminer le sens de variation d'une suite, on pourra donc étudier le signe de

$$u_{n+1} - u_n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

`Exemple 1.` Déterminer le sens de variation de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

*Exercice : 1*

$(*)$ Montrer que si $(u_n)$ est une suite monotone, alors $(v_n)$ : $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$ est aussi monotone.

Méthode 2 : Lorsque $(u_n)$ est strictement positive, on pourra étudier son sens de variation en comparant

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \quad \text{et } 1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}$$

⚠ Attention ⚠

`La méthode précédente n'est valable que si l'on est sûr que la suite (Un) a tous ses termes strictement positifs !!`

`Exemple 2.` Déterminer le sens de variation de la suite $(u_n)$ définie par : $u_n = \frac{n!}{n^n}$

DÉFINITION 5 : Propriété définie **à partir d'un certain rang**
On dit qu'une propriété $p(n)$ est vérifiée *à partir d'un certain rang* si et seulement si :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq n_0, \text{ la propriété } p(n) \text{ est vraie.}$$

`Exemple 3.` Traduire mathématiquement les propositions :

1. "La suite $(u_n)$ est croissante à partir d'un certain rang"
2. "La suite $(u_n)$ est bornée à partir d'un certain rang"

# 2 Convergence d'une suite - propriétés

## 2.1 Définitions - exemples

DÉFINITION 6 : **Limite finie d'une suite**
On dit que la suite $(u_n)$ converge vers un réel $l \in \mathbb{R}$ lorsque

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tel que} \quad \forall n \geq n_0,\ |u_n - l| \leq \varepsilon}$$

On note alors :

$$u_n \to l$$

⚠ Attention ⚠

`La limite l d'une suite (Un) est un nombre réel indépendant de l'indice n !!`

Limite finie

Limite infinie

DÉFINITION 7 : On peut étendre la notion de limite d'une suite à $\overline{\mathbb{R}}$ :

1. $u_n \mapsto +\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n \geq A$
2. $u_n \mapsto -\infty \iff \forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0,\ u_n \leq A$

Dans ces deux cas, on dit que $(u_n)$ *diverge* vers $+\infty$ ou $-\infty$.

**Méthodes :**

1. Pour montrer que $u_n \to l$ à l'aide de la définition :
   On commence par poser $\varepsilon > 0$ et on cherche un rang $n_0$ à partir duquel : $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

2. Pour montrer que $u_n \to +\infty$ à l'aide de la définition :
   On commence par poser $A > 0$ et on cherche un rang $n_0$ à partir duquel : $A \leq u_n$.

`Exemple 4.` $(*)$ Juste pour le plaisir...

1. Montrer en utilisant la méthode précédente que la suite $(1/n)$ converge vers 0.
2. Montrez en utilisant la méthode précédente que la suite $(\sqrt{n})$ diverge vers $+\infty$.

*Remarque* 3.

1. S'il existe un réel $l$ tel que la suite converge vers $l$, on dit que la suite est *convergente*.
2. S'il n'existe pas de réel $l$ vérifiant la propriété ci-dessus, on dit que la suite *diverge*.

⚠ Attention ⚠

`Ainsi, une suite divergente soit n'admet pas de limite, soit tend vers l'infini.`

3. Démontrer que $u_n \mapsto l$ revient à démontrer que $u_n - l \mapsto 0$.

`Exemple 5.` $(*)$

1. Trouver une suite convergente qui n'est pas monotone.
2. Trouver une suite divergente qui ne tend pas vers $\pm\infty$.
3. Trouver une suite bornée divergente.
4. Trouver une suite non-bornée qui ne diverge pas vers $\pm\infty$.

*Remarque* 4. Rappelons que les suites sont en particulier utilisées lors de :

1. La caractérisation séquentielle de la borne sup
2. La caractérisation séquentielle de la densité
3. La caractérisation séquentielle de la limite d'une fonction (vue plus tard...)

*Remarque* 5. Plus tard, pour étudier la limite d'une suite, nous utiliserons plutôt $\boxed{\text{les théorèmes généraux de convergence}}$ ainsi que la convergence ou la divergence des suites élémentaires. Cependant, comme le montre l'exercice suivant, il sera parfois utile de revenir à la méthode issue de la définition.

*Exercice : 2*

$(**)$ **Moyenne de Césaro**
Soit $(u_n)$ une suite convergente vers une limite $L \in \mathbb{R}$.
Soit la suite $(v_n)$ définie pour $n > 0$ par : $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$.

1. Montrer que $(v_n)$ converge vers $L$ (commencer par le cas où $L = 0$).
2. Montrer que la réciproque est fausse

*Exercice : 3*

$(*)$ Ecrire à l'aide de quantificateurs les propriétés :

1. $(u_n)$ ne converge pas vers $l \in \mathbb{R}$.
2. $(u_n)$ ne diverge pas vers $+\infty$.
3. $(u_n)$ diverge.

Théorème 1 : **Suite de rationnels convergeant vers un réel**
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Alors il exite une suite $(a_n)$ d'éléments de $\mathbb{Q}$ telle que : $\quad (a_n) \to x \quad$ avec éventuellement $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} a_n \leq x \\ \text{ou} \\ x \leq a_n \end{cases}$
On peut également imposer $(a_n)$ coissante ou $(a_n)$ décroissante.

*Preuve 1 :* On construit la suite $(a_n)$ en utilisant la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

*Remarque* 6. De même tout réel $x$ est limite d'une suite de nombres irrationnels.

## 2.2 Propriétés des suites convergentes

Théorème 2 : **Unicité de la limite**
Si elle existe, la limite d'une suite $(u_n)$ est unique.
On peut alors la noter : $\lim u_n$.

*Preuve 2 :* On peut procéder par l'absurde ... en s'aidant d'un dessin !

Théorème 3 : **Une suite convergente est bornée.**
Toute suite réelle convergente est bornée.

*Preuve 3 :*

1. Prenons $\varepsilon = 1$.
   On sait qu'à partir d'un certain rang $n_0$ , $|u_n - l| \leq 1$. Donc $(u_n)$ est bornée à partir de $n_0$.
2. D'autre part, $\{u_n, \quad n \in [\![0, n_0]\!]\}$ est fini. Cet ensemble est donc borné.
3. Globalement, $(u_n)$ est donc bornée.

*Remarque* 7. Que dire alors d'une suite majorée par une suite convergente ?

Théorème 4 : **Encadrement des termes d'une suite convergente**
Soit $(u_n)$ convergeant vers un réel $l \in \mathbb{R}$.
Alors pour tous $k,\ k' \in \mathbb{R}$ tels que $k < l < k'$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq n_0 \ \Rightarrow \ k < u_n < k'$$

*Preuve 4 :* C'est l'application de la définition de la convergence vers $l$ en prenant $\varepsilon = min(|l - k'|, |l - k|)$.

*Remarque* 8. On en déduit que si une suite $(u_n)$ converge vers une limite $l > 0$, alors cette suite est à termes strictement positifs à partir d'un certain rang.

Théorème 5 : **Suites qui convergent vers 0**

1. L'ensemble des suites réelles convergeant vers 0 est stable par l'addition et par multiplication par un réel.
2. Le produit d'une suite qui tend vers 0 par une suite bornée est une suite qui tend vers 0

*Preuve 5 :* Méthode classique vue précédemment pour prouver la convergence d'une suite.

Théorème 6 : **Passage à la limite dans les inégalités**
Soit deux suites réelles $(u_n)$ et $(v_n)$ :

$$\text{Si} \quad u_n \leq v_n \quad \text{à partir d'un certain rang et} \begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l' \end{cases} \quad \text{alors :} \quad l \leq l'.$$

*Preuve 6 :* On procède par l'absurde en s'aidant d'un dessin.

`Attention`

```
Même si pour tout entier n on a Un < Vn, on obtient une inégalité large après
passage à la limite. Prenez par exemple les suites définies par Un=1/n et Vn=2/n
```

`Exemple 6.` $(*)$ Prouver qu'une suite décroissante qui tend vers 0 est positive.

# 3 Les théorèmes de convergenges

## 3.1 Le théorème de majoration

Théorème 7 : **Théorème de majoration (Etude de convergence 1)**
Soit une suite $(u_n)$ et un réel $l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si il existe une suite } (\alpha_n) \text{ et un rang } n_0 \in \mathbb{N} \text{ tels que :} \begin{cases} \forall n \geq n_0,\ |u_n - l| \leq \alpha_n \\ \alpha_n \mapsto 0 \end{cases} \quad \text{alors } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} l.$$

*Preuve 7 :* Facile : il suffit de traduire la convergence de $(\alpha_n)$ vers 0.

*Remarque* 9. Ce théorème est très utilisé en pratique pour montrer la convergence d'une suite lorsqu'on est capable de deviner sa limite.

`Exemple 7.` $(*)$ Montrer que la suite de terme général $u_n = 2^n/n!$ converge vers 0.

*Exercice : 4*
$(*)$ Etudier les limites des suites de termes généraux suivants :

1. $u_n = \frac{\sin n}{n+(-1)^n}$
2. $v_n = \frac{n!}{n^n}$
3. $w_n = \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n}$

## 3.2 Le théorème des gendarmes

Théorème 8 : **Théorème des gendarmes (Etude de convergence 2)**
On considère trois suites $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$.

1. Si : $\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ (v_n) \textit{ et } (w_n) \text{ convergent vers la même limite } l \end{cases}$ alors la suite $(u_n)$ converge vers $l$.

2. Si : $\begin{cases} v_n \leq u_n \text{ (à partir d'un certain rang)} \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

*Preuve 8 :*
1. On traduit le fait que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers $l$. L'encadrement permet alors de conclure ...
2. On utilise la définition de la divergence vers $+\infty$.

*Remarque* 10. Ce théorème présente l'avantage de pouvoir étudier la convergence d'une suite lorsqu'on n'a aucune idée de sa limite éventuelle.

`Exemple 8.` $(*)$ Etudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \sqrt[n]{2+(-1)^n}$

⚠ Attention ⚠

```
Même si an <= un <= bn à partir d'un certain rang et que an -> l1 et bn -> l2,
on ne peut pas en conclure que (un) converge vers une limite l vérifiant
                            l1 <= l <= l2.

En revanche, si l'on sait que la suite (un) est convergente vers l,
alors un simple passage à la limite montre que : l1 <= l <= l2
```

*Exercice : 5*

$(*)$ Etudier la convergence des suites de terme général :

1. $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n^2}{n^3+k^2}$
2. $S_n = \displaystyle\frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n} k!$

*Exercice : 6*

$(*)$ On considère la suite de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, comparer $\frac{1}{k}$ avec $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.
2. Montrer que $\frac{S_n}{\ln n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. (on dira que $S_n$ est équivalent à $\ln n$ en $+\infty$)

## 3.3 Les théorèmes généraux

Théorème 9 : **Théorèmes généraux**
Soit $(u_n)$ une suite convergeant vers $l \in \mathbb{R}$ et $(v_n)$ une suite convergeant vers $l' \in \mathbb{R}$. Alors

1. la suite $(|u_n|)$ converge vers $|l|$
2. la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $l + l'$
3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, la suite$(\lambda u_n)$ converge vers $\lambda l$
4. la suite $(u_n v_n)$ converge vers $ll'$
5. Si $l' \neq 0$, la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ converge vers $\frac{l}{l'}$.

*Preuve 9 :*

1. On utilise l'inégalité triangulaire pour majorer $||u_n| - |l||$ par $\varepsilon$.
2. Pour les autres limites, on peut alors utiliser le théorème de majoration.
   (a) P2 : On utilise l'inégalité triangulaire pour majorer $|(u_n + v_n) - (l + l')|$.
   (b) P4 : On remarque que $u_n v_n - ll' = u_n(v_n - l') + l'(u_n - l)$ puis on applique l'inégalité triangulaire.
   (c) P5 : On commence par prouver que $1/v_n \mapsto 1/l'$.
   Pour cela, on montre que $|v_n| \geq |l'|/2$ à partir d'un certain rang.

*Remarque* 11. On peut généraliser le théorème précédent au cas où $l,\ l' \in \overline{\mathbb{R}}$.

THÉORÈME 10 : **Cas des suites fonctionnelles (Etude de convergence 3)**
Soit $(u_n)$ la suite de terme général $u_n = f(n)$ où $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^+,\ \mathbb{R})$.

$$\text{Si} \quad f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \overline{\mathbb{R}} \quad \text{alors} \quad u_n \to l.$$

*Preuve 10 :* On traduit simplement la limite de $f$ en $+\infty$. (cf le cours sur les fonctions !)

`Exemple 9.` $(*)$ Etudier les suites de termes généraux :

1. $u_n = \frac{2n^2+n-1}{3n^2+1}$.
2. $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$
3. $u_n = \frac{3^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}$
4. $u_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$
6. $u_n = \sqrt[n]{n^2}$

*Exercice : 7*

$(*)$

1. Si $(u_n)$ est bornée et $(v_n)$ diverge vers $+\infty$, montrer que : $u_n + v_n \mapsto +\infty$
2. Si $(u_n)$ converge et $(v_n)$ diverge, montrer que : $(u_n + v_n)$ diverge.

*Exercice : 8*

$(*)$ Soit $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.
Montrer que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent.

## 3.4 Le théorème de la limite monotone

THÉORÈME FONDAMENTAL 11 : **Théorème de la limite monotone (Etude de convergence 4)**
Si $(u_n)$ est une suite *croissante* alors $(u_n)$ admet une limite.
On a alors les deux possibilités suivantes :

- Si $(u_n)$ est majorée alors $(u_n)$ converge vers une limite finie.
- Si $(u_n)$ n'est pas majorée alors $(u_n)$ diverge vers $+\infty$.

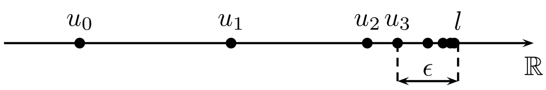



FIGURE 2 – Théorème de la limite monotone

*Preuve 11 :*

1. Comme $\{u_n,\ n \in N\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée, elle admet une borne supérieure $l$.
   On démontre alors que $u_n \mapsto l$.
2. On considère $A > 0$. Comme $(u_n)$ n'est pas majorée, alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > A$.
   Mais comme $(u_n)$ est croissante ...

⚠ IMPORTANT ⚠

`Contraintement aux théorèmes de convergence précédents, celui-ci ne donne pas la limite de la suite. On pensera donc à l'utiliser en exercice lorsque la limite n'est pas demandée !`

`Exemple 10.` ($*$) On suppose que $(u_n)$ est une suite réelle croissante telle que $(u_{2n})$ converge.
Montrer que $(u_n)$ converge.

*Remarque* 12.

1. Une suite décroissante minorée converge et une suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.
2. Si $(u_n)$ est croissante et majorée, elle converge vers la borne sup des valeurs de $(u_n)$ : $\quad l = \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

`Exemple 11.` ($**$) Soit la suite $(S_n)$ de terme général : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $S_{2n} - S_n \geq \frac{1}{2}$.
2. En déduire que $(S_n)$ diverge vers $+\infty$

*Exercice : 9*

($**$) Soit $(u_n)$ la suite de terme général : $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$ tel que $k \geq 2$, on a : $\quad \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
2. En déduire que la suite $(u_n)$ converge.

*Exercice : 10*

($**$) Etudier la convergence des suites de terme général : $\quad u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k.2^k} \quad$ et $\quad v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$

## 3.5 Le théorème sur les suites adjacentes

Définition 8 : **Suites adjacentes**
Soient $(u_n)$ et $(v_n)$ deux suites réelles. On dit qu'elles sont *adjacentes* lorsque :

1. les deux suites sont monotones de sens contraire.
2. La suite $(d_n) = (v_n - u_n)$ converge vers 0.

Théorème 12 : **Convergence des suites adjacentes (Etude de convergence 5)**
Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.

*Preuve 12 :*

1. En remarquant que $(d_n)$ est décroissante et tend vers 0, on en déduit que $d_n > 0$ puis que $(u_n)$ (la suite croissante) est majorée et que $(v_n)$ (la suite décroissante) est minorée.
2. On sait alors que $u_n \mapsto l_1 = \sup u_n$, que $v_n \mapsto l_2 = \inf v_n$. On démontre facilement que $l_1 = l_2$.

*Remarque* 13. Si $\begin{cases} (u_n) \text{ (croissante)} \\ (v_n) \text{ (décroissante)} \end{cases}$ sont adjacentes, alors leur limite commune $l$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq l \leq v_n$.

On dit alors que $u_n$ et $v_n$ sont des approximations de $l$ à $|u_n - v_n|$ près (faire un dessin) !

*Exercice : 11*

(∗∗) Soit les suites de terme général : $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Montrez que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes.
2. Montrez que leur limite commune est un nombre irrationnel (c'est le nombre de Neper $e = exp(1)$).

# 4 Les suites extraites

Définition 9 : **Suite extraite**
On dit qu'une suite $(v_n)$ est une suite extraite d'une suite $(u_n)$ s'il existe une application $\varphi$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ *strictement croissante* telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{\varphi(n)}$.

`Exemple 12.` les suites $\begin{cases} (v_n) \text{ telle que } v_n = u_{2n} \\ (w_n) \text{ telle que } w_n = u_{2n+1} \end{cases}$ sont extraites de la suite $(u_n)$.

Théorème 13 : **Suite extraite d'une suite ayant une limite (Etude de convergence 6)**
Si une suite $(u_n)$ admet une limite $l \in \bar{\mathbb{R}}$ alors toute suite extraite de $(u_n)$ a aussi pour limite $l$.

*Preuve 13 :*

1. On peut commencer par remarquer que si $\varphi : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ est strictement croissante, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.
2. La démonstration est alors immédiate.

*Remarque* 14.

1. On peut ainsi prouver qu'une suite converge en montrant qu'il s'agit d'une suite extraite d'une suite convergente.
2. Cette propriété est surtout très utile pour démontrer qu'une suite diverge.

**Utilisation des suites extraites :**

Pour prouver la divergence d'une suite :

- cas 1 : Si $(u_{\varphi_1(n)})$ et $(u_{\varphi_2(n)})$ convergent vers des limites différentes, alors $(u_n)$ est divergente.
- cas 2 : Si $(u_{\varphi(n)})$ divergente, alors $(u_n)$ est divergente.

Pour déterminer la limite d'une suite convergente : Si $\begin{cases} (u_n) \text{ converge} \\ (u_{\varphi(n)}) \to l \end{cases}$ alors $(u_n)$ converge vers $l$.

`Exemple 13.` (∗) Montrez que la suite de terme général $u_n = \cos\left(\frac{n^2-1}{n}\pi\right)$, est une suite divergente.

*Exercice : 12*

(∗∗) Soit la suite de terme général $u_n = \cos n$.
Prouver la divergence de $(u_n)$ en calculant $\cos(n + 2) + \cos n$ et $\cos 2n$.

Théorème 14 : **Application pour prouver la convergence (Etude de convergence 7)**
Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
Si les deux suites extraites $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ convergent vers la même limite $l \in \mathbb{R}$ alors $(u_n) \to l$.

*Preuve 14 :* On fixe $\varepsilon > 0$ et on exprime la convergence de $(u_{2n})$ et $(u_{2n+1})$ à l'aide de la définition.
On détermine alors facilement un $N \geq 0$ à partir duquel on a $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

*Exercice : 13*

(∗∗) On définit la série alternée $(S_n)$ par : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{1+k}$

1. Calculer $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$.
2. Montrer que les suites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes et en déduire que $(S_n)$ converge.
3. Si $l$ est la limite de $(S_n)$, majorer l'erreur $e_n = |S_n - l|$ en fonction de $n$.
4. Comment choisir la valeur de $n$ pour que $S_n$ soit une valeur approchée de l à $10^{-2}$ près ?

Théorème 15 : **Théorème de Bolzano-Weierstrass**
De toute suite réelle bornée, on peut extraire une suite convergente.

*Preuve 15 :* Il faut connaître le principe général de la démonstration.
L'idée consiste à isoler par dichotomie une infinité de termes de la suite appartenant à une suite d'intervalles dont le diamètre tend vers 0.

Corollaire 16 :
Soit un segment $[a, b]$ et une suite $(x_n)$ de points de ce segments.
Il existe alors une suite extraite de la suite $(x_n)$ qui converge vers un point $l \in [a, b]$.

*Preuve 16 :* Conséquence immédiate du théorème de Bolzano-Weierstrass.

*Remarque* 15. Le théorème de Bolzano-Weierstrass s'étend à la notion plus générale de partie *compacte* de $\mathbb{R}^n$ (vue en MP). Les segments de $\mathbb{R}$ sont des parties compactes car fermées et bornées.

# 5 Etude de suites récurrentes.

Soit une fonction **continue** $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.
On peut définir une suite $(u_n)$ par la donnée de son premier terme $u_0$ et d'une relation de récurrence de la forme

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

## 5.1 Résultats préliminaires

On peut représenter la suite $(u_n)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en utilisant des *ricochets* sur la première bissectrice.

`Exemple 14.` Déterminez graphiquement les premiers termes de la suite $(u_n)$ définie par les relations de récurrence suivantes.

| | | |
|---|---|---|
| $\begin{cases} u_{n+1} = -u_n^2 + 1 \\ u_0 = 0,1 \end{cases}$ | $\begin{cases} u_{n+1} = e^{u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$ | $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} \\ u_0 = 0 \end{cases}$ |

*Remarque* 16. Ces représentations graphiques permettent :

1. de prévoir le comportement de la suite $(u_n)$ étudiée.
2. de mettre en place une stratégie d'étude :
   (a) Prévision du sens de variation
   (b) Prévision d'un éventuel majorant où minorant
   (c) Prévision du signe des éléments de la suite
   (d) Prévision de la limite éventuelle.

Théorème 17 : **limite finie éventuelle**

Si la suite $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \end{array}\right.$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ avec $\boxed{f \text{ continue en } l}$, alors : $\boxed{l = f(l)}$.

*Souvent, le fait que $f(u_n) \to f(l)$ se montre également à l'aide des théorèmes généraux.*

*Preuve 17 :* Par passage à la limite dans $u_{n+1} = f(u_n)$ en utilisant la continuité de $f$. (vu plus tard ...)

⚠ Attention ⚠

Vous ne pouvez affirmer que l = f(l) qu'après avoir vérifié que la fonction f était continue en l.
En général, on ne connaît pas l, mais on sait que l appartient à un intervalle I.
On vérifie alors la continuité de f sur I.

*Remarque* 17. Une solution de l'équation $x = f(x)$ est appelée un *point fixe* de $f$. On recherchera donc les limites possibles de $(u_n)$ parmi les points fixes de $f$ (graphiquement les intersections du graphe de $f$ avec la première bissectrice).
Si l'équation $f(x) = x$ n'admet pas de solution, alors la suite $(u_n)$ diverge !

**Exemple 15.** Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{x}{x^2+1} \end{array}$ et $(u_n)$ une suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
Montrer que si $(u_n)$ converge, alors sa limite ne peut être que 0.

## 5.2 Exemples d'études

Pour étudier une suite récurrente de la forme $\left\{\begin{array}{l} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 \end{array}\right.$, on procèdera de la façon suivante :

1. On commence par faire un dessin pour conjecturer l'évolution des termes de la suites (sens de variation, encadrement, convergence ...)
2. Puis, on recherche les limites finies éventuelles en résolvant $l = f(l)$ (bien justifier cette relation !)
3. Enfin, on démontre les conjectures déduites de l'étude graphique.
   Pour cela, il est souvent utile :
   - d'étudier la fonction $f$ pour encadrer la suite $(u_n)$
   - d'étudier la fonction $f - \text{id}$ afin de connaître le sens de variation de $(u_n)$.

*Remarque* 18. On montre facilement que si la fonction $f$ est croissante, alors $(u_n)$ / $u_{n+1} = f(u_n)$ est monotone.

*Exercice : 14*

$(**)$ Montrer que la suite $(u_n)$ définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = u_n + \frac{2}{\sqrt{u_n}} \end{array}\right.$ diverge vers $+\infty$.

*Exercice : 15*

$(**)$ Etudier la convergence de la suite définie par $\left\{\begin{array}{l} u_0 \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = u_n - u_n^2 \end{array}\right.$.

*Exercice : 16*

$(**)$ Soit un réel positif $\alpha \geq 0$.

1. Prouver l'existence de la suite définie par $u_0 = \alpha$ et la relation de récurrence : $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$.
2. Etudier la convergence de cette suite

*Exercice : 17*

$(**)$ Soit $0 \leq u_0 \leq 1$. Etudier la suite récurrente définie par : $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n^2+1}$

## 5.3 Quelques relations de récurrence classiques

Dans certains cas très particuliers, il est possible de déterminer la forme fonctionnelle d'une suite récurrente.
C'est le cas des suites suivantes...

### 5.3.1 Suites arithmétiques

Théorème 18 : **Suites arithmétiques**
On considère une suite de réels $(u_n)$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = u_n + a}$ où $a \in \mathbb{R}$.
Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0 + a.n$$

$a$ est appelée la *raison* de la suite arithmétique $(u_n)$.

*Preuve 18 :* Récurrence évidente.

`Exemple 16.` Etudier la convergence de $(u_n)$ arithmétique selon les valeurs de $a$.

### 5.3.2 Suites géométriques

Théorème 19 : **Suites géométriques**
On considère une suite de réels $(u_n)$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = k.u_n}$ où $k \in \mathbb{R}$.
Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = u_0.k^n$$

$k$ est appelée la *raison* de la suite géométrique $(u_n)$.

*Preuve 19 :* Récurrence évidente.

`Exemple 17.` Etudier la convergence de $(u_n)$ géométrique selon les valeurs de $k$.

Définition 10 : **Série géométrique**
Soit un réel $k \in \mathbb{R}$.
On définit la progression géométrique (ou série géométrique) de raison $k$ par :

$$1 + k + \cdots + k^n = \sum_{i=0}^{n} k^i \quad \text{et on a :} \quad \sum_{i=0}^{n} k^i = \begin{cases} \frac{1-k^{n+1}}{1-k} & \text{si } k \neq 1 \\ (n+1) & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

*Exercice : 18*
$(**)$ Soit $(u_n)$ une suite de termes non nuls telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 0$. Montrer que $(u_n) \to 0$.

### 5.3.3 Suites arithmético-géométriques

On considère une suite de réels $(u_n)$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_{n+1} = k.u_n + a}$ où $\begin{cases} (a,\ k) \in \mathbb{R}^2 \\ k \neq 1 \\ a \neq 0 \end{cases}$

Pour trouver la forme fonctionnelle d'une suite arithmético-géométrique, on peut utiliser la méthode suivante :

1. On introduit $l$ le point fixe de la suite : $l = al + b$ $(*)$ ou encore $l = \frac{b}{1-a}$
2. On soustrait alors la relation $(*)$ à $u_{n+1} = au_n + b$ pour obtenir : $u_{n+1} - l = a(u_n - l)$.
3. La suite $(u_n - l)$ est alors une suite géométrique et on obtient : $u_n - l = (u_0 - l)a^n$ et donc $u_n = (u_0 - l)a^n + l$.

`Exemple 18.` $(*)$ On considère une suite $(u_n)$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$
Déterminez l'expression de $u_n$ en fonction de n.

*Exercice : 19*
$(*)$ On considère une suite $(u_n)$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 2^n$
Déterminez l'expression de $u_n$ en fonction de n. *Aide : on pourra diviser la relation de récurrence par* $2^{n+1}$.

*Exercice : 20*
$(**)$ Soit $k \in \mathbb{R}$.

On considère une suite $(u_n)$ vérifiant la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = k.u_n^2$
Déterminez l'expression de $u_n$ en fonction de $n$.

*Aide : Par changement de variables, vous vous ramènerez à l'étude d'une suite arithmético-géométrique.*

### 5.3.4 Cas des suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} u_0 \\ u_1 \\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$ avec $(a,\ b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

On appelle *équation caractéristique de* $(u_n)$ l'équation : $(C)$ : $x^2 = ax + b$.
Plusieurs cas se produisent alors :

THÉORÈME 20 :

1. Si $\Delta > 0$ : on note $r_1$ et $r_2$ les deux racines réelles distinctes de $(C)$.
   Il existe alors deux constantes réelles $A$ et $B$ telles que : $u_n = A.r_1^n + Br_2^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
2. Si $\Delta = 0$ : on note $r$ la racine réelles de $(C)$.
   Il existe alors deux constantes réelles $A$ et $B$ telles que : $u_n = (A.n + B)r^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. Si $\Delta < 0$ : soit $z = \rho e^{i\theta}$ une des deux racines complexes de $(C)$.
   Il existe alors deux constantes réelles $A$ et $B$ telles que : $u_n = \rho^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

*Preuve 20 :* Voir le cours sur les espaces vectoriels de dimension finie.

⚠ Attention ⚠

```
Si les deux premiers cas sont analogues aux cas rencontrés dans la résolution de
l'équation différentielle y'' + ay' + by = 0, en revanche on remarquera que lorsque
Delta < 0 on a :
```

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Pour | $y'' + ay' + by = 0$ | les solutions sont : | $y(x) = e^{\alpha x}(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$ | où | $r = \alpha + i\beta$ est racine |
| Pour | $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ | les solutions sont : | $u_n = \rho^n(A\cos n\theta + B\sin n\theta)$ | où | $r = \rho e^{i\theta}$ est racine |

*Exercice : 21*

Démonstration du cas 2 :
Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a^2 + 4b = 0$.
On considère l'ensemble $E$ des suites complexes qui satisfont la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (avec $b \neq 0$) pour tout entier $n$.

1. Quelles sont les suites géométriques de $E$ ?
2. Soit $r$ la solution de $x^2 - ax - b = 0$. Montrer que la suite $(nr^n)$ est dans $E$.
3. Décrire l'ensemble $E$.
   *Aide : Vous pourrez rechercher les suites de $E$ sous la forme $u_n = a_n.r^n$*

*Exercice : 22*

Etudier les suites définies par :

1. $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \\ u_{n+2} = u_{n+1}u_n \end{cases}$
2. $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_1 > 0 \\ u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n} \end{cases}$

# 6 Les suites complexes

Une suite à valeurs complexes est une application $u\ :\ \mathbb{N} \to \mathbb{C}$.
C'est aussi une suite $(u_n)$ avec $u_n = x_n + iy_n$ où $(x_n)$ et $(y_n)$ sont deux suites réelles.

On dira que $\begin{cases} (x_n) \text{ est la partie réelle de } (u_n) \\ (y_n) \text{ est la partie imaginaire de } (u_n) \end{cases}$.

*Remarque* 19. Nous verrons qu'à l'exception des théorèmes et définitions faisant intervenir la relation d'ordre $\leq$ (contrairement à $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ n'est pas ordonné), les suites complexes vérifient les mêmes propriétés que les suites réelles.

Définition 11 : On dira qu'une suite complexe $(z_n)$ est bornée si et seulement si la suite $(|z_n|)$ est bornée.

| | |
|---|---|
| | |
| Suite bornée | Suite convergente vers $l$ |

Proposition 21 :
Une suite complexe est bornée si et seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont bornées.

*Preuve 21 :* On utilisera le fait que si $z = x + iy$ alors $\begin{cases} |x| \leq |z| \\ |y| \leq |z| \end{cases}$ et que $|z| \leq |x| + |y|$

Définition 12 : **Convergence d'une suite de complexes**

1. On dit qu'une suite de nombres complexes $(z_n)$ converge vers un nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ si et seulement si la suite réelle de terme général $|z_n - a|$ converge vers 0.
2. Si un tel complexe $a$ n'existe pas, on dit que la suite $(z_n)$ diverge.
3. On dit que la suite $(z_n)$ diverge vers l'infini lorsque la suite réelle de terme général $|z_n|$ diverge vers $+\infty$.

`Exemple 19.` $(*)$ La suite complexe $z_n = 1 - \frac{i}{n}$ converge vers 1.

*Remarque* 20. Voici une autre façon plus formelle de dire que $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ : $\forall r > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}$ tq $\forall n \geq N,\ z_n \in D(a, r)$

| | Suites réelles | Suites complexes |
|---|---|---|
| Suite bornée | X | X mais la définition est différente |
| Majorant / Minorant | X | O |
| Sens de variation | X | O |
| Suite convergente / divergente | X | X |
| Suites géométriques / arithmétiques | X | X |
| Suites récurrentes | X | X |

**Comparaisons : Suites Réelles - Suites complexes**
Définitions

Théorème 22 : **Théorème de majoration**
Soit $(z_n)$ une suite de complexes et $a \in \mathbb{C}$.
Si $(\alpha_n)$ est une suite de réels vérifiant : $\begin{cases} |z_n - a| \leq \alpha_n \text{ à partir d'un certain rang} \\ \alpha_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{cases}$, alors $z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.

*Preuve 22 :* Immédiat ...

Une autre façon d'étudier une suite complexe consiste à étudier deux suites réelles :

THÉORÈME 23 : **Une suite complexe converge ssi les parties réelles et imaginaires convergent**

$$z_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \mathrm{Re}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Re}(a) \\ \mathrm{Im}(z_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{Im}(a) \end{cases}$$

*Preuve 23 :* Pas de difficulté ...

*Remarque* 21. Ce théorème implique en particulier :

1. L'unicité de la limite d'une suite complexe (lorsqu'elle existe!!).
2. Le fait qu'une suite complexe convergente est bornée

*Exercice : 23*

$(*)$ Soit $(z_n)$ une suite complexe telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1}{3}(z_n + 2\bar{z}_n)$.
Montrer que $(z_n)$ converge et exprimer sa limite en fonction de $z_0$.

| | Suites réelles | Suites complexes |
|---|---|---|
| Théorèmes généraux sur la limite d'une combinaison linéaire / produit / rapport | X | X |
| Théorème de majoration | X | X |
| Théorème de la limite monotone | X | O |
| Théorème des gendarmes | X | O |
| Convergence des suites géométriques | X | + ou - |
| Convergence des suites extraites | X | X |
| Théorème de Bolzano-Weierstrass | X | X |

**Comparaisons : Suites Réelles - Suites complexes**
Théorèmes de convergences

| | Suites réelles | Suites complexes |
|---|---|---|
| Unicité de la limite | X | X |
| Une suite convergente est bornée | X | X |
| Passage à la limite dans une inégalité | X | O |

**Comparaisons : Suites Réelles - Suites complexes**
Propriétés des suites convergentes

THÉORÈME 24 : **Suites géométriques complexes**
Soit un nombre complexe $k \in \mathbb{C}$.
On appelle *suite géométrique* de raison $k$, la suite définie par $\begin{cases} \text{la donnée de } z_0 \in \mathbb{C} \\ \text{la relation de récurrence } z_{n+1} = kz_n \end{cases}$.

Elle vérifie alors la relation : $z_n = z_0.k^n$ et on a alors : $\begin{cases} |k| < 1 & \Rightarrow (z_n) \text{ converge vers } 0 \\ |k| \geq 1 \text{ et } k \neq 1 & \Rightarrow (z_n) \text{ diverge} \\ k = 1 & \Rightarrow (z_n) \text{ est constante et vaut } z_0 \end{cases}$

*Preuve 24 :* La seule petite difficulté porte sur le cas $|k| = 1$.
Dans ce cas, on suppose que $k^n \mapsto l \in \mathbb{C}$ et on utilise le fait que $k^{n+1} = k^n.k$.

*Remarque* 22. Lorsque $|k| = 1$ (avec $k \neq 1$), il y a deux modes de divergence possibles :

1. Si $k = e^{i\frac{p}{q}\pi}$ avec $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}^*$, alors la suite $(k^n)$ est périodique de période $T = 2q$
2. Si $k = e^{i\alpha\pi}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, alors la suite $(k^n)$ est dense dans le cercle $\mathcal{C}(O,\ 1)$

`Exemple 20.` A l'aide de la suite $(e^{in})$, prouver que les suites $(\cos n)$ et $(\sin n)$ ne peuvent converger simultanément.

*Exercice : 24*

(*) Soit $(x_n)$ et $(y_n)$ deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = \frac{x_n - y_n}{2}$ et $y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$.
En introduisant la suite complexe de terme général $z_n = x_n + iy_n$ , montrer que les suites $(x_n)$ et $(y_n)$ convergent et déterminer leurs limites.

*Exercice : 25*

(**) Soit $a$ un complexe de module $\rho$ et d'argument $\theta \neq 0[\pi]$.
On définit la suite complexe $(z_n)$ par $z_0 = a$ et $z_{n+1} = \frac{z_n + |z_n|}{2}$.
Montrer que $(z_n)$ converge vers un réel que l'on exprimera en fonction de $\rho$ et $\theta$.

*Aide : Vous pourrez prouver que :* $\sin \dfrac{\theta}{2^n} \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos \dfrac{\theta}{2^k} = \dfrac{1}{2^n} \sin \theta$.

# 7 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

| | Questions | Réponses attendues |
|---|---|---|
| 1. | Quelle est la différence entre les notations $u_n$ et $(u_n)$ ? | cf cours |
| 2. | Comment étudier la monotonie d'une suite ? | cf cours |
| 3. | Connaissez-vous la définition formelle de la limite d'une suite ? | cf cours |
| 4. | Savez-vous prouver que si $(u_n) \to l \in \mathbb{R}$ alors la moyenne des $(u_n)$ tend vers $l$ ? | cf cours |
| 5. | Existe-t-il un lien entre convergence et monotonie ? | OUI (cf th15) |
| 6. | Rappelez les différentes propriétés liées aux suites convergentes. | cf cours |
| 7. | Comment prouver la divergence de la suite de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ ? | cf cours |
| 9. | Que vaut $S_n = \displaystyle\sum_{k=4}^{n} q^k$ ? | $\begin{cases} \text{Si } q = 1 \ : \ S_n = n - 3 \\ \text{Si } q \neq 1 \ : \ S_n = q^4 \frac{1-q^{n-3}}{1-q} \end{cases}$ |
| 10. | Comment prouver la divergence d'une suite à l'aide des suites extraites ?<br>Expl : $(u_n)$ telle que $u_n = (-1)^n$ | cf cours |
| 11. | Rappeler le contenu du théorème de la limite monotone.<br>Savez-vous redémontrer ce théorème ? | cf cours |
| 12. | Connaissez-vous la définition et le théorème des suites adjacentes ? | cf cours |
| 13. | Que dit le théorème de Bolzano-Weierstrass ? | cf cours |

| | | |
|---|---|---|
| 14. | Intuitivement, pouvez-vous dire si la suite $(u_n)$ telle que $u_{n+1} = \sin u_n$ converge ? | $\begin{cases} u_n \to 0^+ \text{ si } u_0 \in [0,\ \pi]\ [2\pi] \\ u_n \to 0^- \text{ si } u_0 \in [-\pi,\ 0]\ [2\pi] \end{cases}$ |
| 15. | Que verifie (si elle existe) la limite $l$ d'une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ ? <br> Quelle condition doit vérifier la fonction $f$ ? | $l = f(l)$ <br> $f$ continue en $l$ |
| 16. | Comment procéder pour effectuer l'étude d'une suite récurrente ? | cf cours |
| 18. | Comment étudier une suite arithmético-géométrique ? | cf cours |
| 19. | Donner 7 méthodes différentes permettant l'étude de la convergence d'une suite. | cf cours |
| 20. | Comment étudier une suite vérifiant une relation de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ ? | cf cours |
| 21. | Exprimer en fonction de $n$ le terme $u_n$ de la suite $(u_n)$ : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_{n+1} - u_n \end{cases}$ | $u_n = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{\pi}{3} n)$ |
| 22. | Exprimer en fonction de $n$ le terme $u_n$ de la suite $(u_n)$ : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -4u_{n+1} - 4u_n \end{cases}$ | $u_n = (-2)^{n-1}$ |

# 8 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs $\heartsuit$ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs $\heartsuit$ correspond à la difficulté des exercices.

## 1) Etudes qualitatives

*Exercice de TD : 1*

$(**)$ Soit $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$, et $\begin{cases} (u_n) \\ (v_n) \end{cases}$ deux suites telles que : $\forall n \in \mathbb{N} : \begin{cases} u_n \leq a \\ v_n \leq b \end{cases}$ et $(u_n + v_n) \mapsto a + b$.

Montrer que $\begin{cases} u_n \mapsto a \\ v_n \mapsto b \end{cases}$.

*Exercice de TD : 2*

$(\heartsuit\heartsuit)$ **Applications de la moyenne de Césaro**

1. Prouver, en utilisant la propriété de la moyenne de Césaro, que si une suite réelle $(u_n)$ est telle que $(u_{n+1} - u_n) \to l \in \mathbb{R}$, alors $\frac{u_n}{n} \to l$.
2. Applications du résultat précédent :
   (a) Etudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$
   (b) Soit $(u_n)$ une suite réelle strictement positive.
      i. Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l \in \mathbb{R}^*$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$.

ii. En déduire la limite de $u_n = \sqrt[n]{\binom{2n}{n}}$

*Exercice de TD : 3*

($***$) Soit $(u_n)$ une suite réelle et $a \in \mathbb{R}$.
On pose, pour tout entier naturel $n$ : $x_n = u_{n+1} - au_n$.

1. Dans cette question, on suppose que $a \in ]-1,\ 1[$.
   (a) Simplifier pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'expression de : $S_n = \sum_{k=0}^{n} a^k.x_{n-k}$
   (b) Démontrer que $(x_n)$ converge vers 0 si et seulement si $(u_n)$ converge vers 0. *Pour la réciproque, on pourra envisager un raisonnement avec les $\varepsilon$ sur le modèle de Césaro.*
   (c) Montrer que $(x_n)$ et $(u_n)$ sont de même nature.
   *Aide : vous penserez à vous ramener au cas précédent à l'aide de changements de variables judicieux*
2. Supposons ici que $a = 1$.
   En utilisant la suite $(u_n) \mid u_n = \sqrt{n}$ prouver que $(u_n)$ et $(x_n)$ ne sont pas nécessairement de même nature.
3. Trouver des exemples prouvant que $(u_n)$ et $(x_n)$ ne sont pas nécessairement de même nature dans les cas où $a = -1$, $a = 2$ et $a = -2$.

## 2) Suites monotones

La connaissance de la monotonie d'une suite peut aider à déterminer sa convergence.

En effet, le théorème de la limite monotone nous dit deux choses :

1. D'une part il nous affirme qu'une suite monotone admet toujours une limite.
   Pour prouver alors qu'une telle suite diverge vers $\pm\infty$, on peut alors procéder par l'absurde en supposant qu'elle admet une limite finie. Si on aboutit à une contradiction, alors cela signifie que la suite diverge vers $+\infty$ dans la cas d'une suite croissante et $-\infty$ dans la cas d'une suite décroissante.
2. D'autre part, il nous dit que si la suite est majorée (dans le cas d'une suite croissante) ou minorée (dans le cas d'une suite décroissante), alors la suite converge.
3. Une fois que l'on a prouvé la convergence d'une suite (à l'aide par exemple du théorème de la limite monotone), on peut parfois déterminer la limite à l'aide d'un simple passage à la limite.

Le théorème des suites adjacentes permet aussi de prouver la convergence d'une suite monotone.

*Exercice de TD : 4*

($\heartsuit\heartsuit$) **Cas particulier de Césaro**
Soit $(u_n)$ une suite croissante de limite $l \in \mathbb{R}$. On pose : $v_n = \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n}$.

1. Montrer que $(v_n)$ est croissante.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $v_{2n} \geq \frac{u_n+v_n}{2}$.
3. En déduire que $v_n \to l$.

*Exercice de TD : 5*

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $(u_n)$ la suite de terme général : $u_n = \frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n-1)}{2\times4\times\cdots\times(2n)}$

1. Exprimer $u_n$ en fonction de factorielles (juste pour le plaisir !).
   *Dans les questions suivantes, on utilisera la forme initiale de $u_n$.*
2. Montrer que $(u_n)$ converge.
3. On pose $v_n = (n+1)u_n^2$.
   Montrer que $v_n$ converge et en déduire la limite de la suite $(u_n)$.

*Exercice de TD : 6*

($***$) **Critère de Cauchy**
On dit qu'une suite réelle ou complexe vérifie le critère de Cauchy lorsque :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ \forall p \geq n,\ \forall q \geq n,\ |u_p - u_q| \leq \varepsilon$$

1. Montrer qu'une suite convergente vérifie le critère de Cauchy.
2. Réciproquement, supposons qu'une suite réelle $(u_n)$ vérifie le critère de Cauchy.
   Vérifions que cette suite est convergente (on dit alors que $\mathbb{R}$ est *complet*).
   (a) Soit $R_n = \{u_q \mid q \geq n\}$.
   Montrer que $R_n$ admet une borne supérieure notée $r_n^+$ et une borne inférieure notée $r_n^-$.
   (b) Vérifier que la suite $(r_n^+)$ est décroissante et que la suite $(r_n^-)$ est croissante.
   En conclure que ces deux suites convergent.
   (c) Montrer que $(r_n^+)$ et $(r_n^-)$ ont même limite et que $(u_n)$ converge.

*Exercice de TD : 7*

(♡) **Critère spécial des séries alternées ou critère de Leibniz (1646-1716) :**

Soit $(u_n)$ une suite de réels décroissante et de limite nulle. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k.u_k$.

Montrer que les suites extraites $(S_{2n})$ et $(S_{2n+1})$ sont adjacentes et en déduire que $(S_n)$ converge.

*Exercice de TD : 8*

(♡♡) Soit les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ de terme général : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$.

1. Montrer que ces deux suites sont adjacentes.
2. En déduire un équivalent de la suite $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

*Exercice de TD : 9*

(∗∗) Soit $\theta \in ]0, \frac{\pi}{2}[$ et les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ de terme général : $u_n = 2^n \sin \frac{\theta}{2^n}$ et $v_n = 2^n \tan \frac{\theta}{2^n}$.

1. Déterminer les limites de $(u_n)$ et $(v_n)$.
2. Pour le plaisir, montrer que ces deux suites sont adjacentes.

## 3) Etude de convergence

On peut prouver la convergence d'une suite de différentes manières :
1. A l'aide du théorème de majoration.
2. A l'aide des théorèmes généraux sur la limite d'une suite.
3. A l'aide du théorème des gendarmes.
4. A l'aide du théorème de la limite monotone.
5. A l'aide du théorème sur les suites adjacentes.
6. A l'aide du théorème de Césaro (cas plus rare...)

La divergence quant à elle, peut se prouver :
1. A l'aide des suites extraites
2. En procédant par l'absurde

"Etudier la convergence" signifie "déterminer si une suite converge ou diverge".

*Exercice de TD : 10*

(♡) Etudier la convergence et calculer éventuellement la limite des suites de terme général un dans les cas suivants :

1. $u_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})$
2. $u_n = \frac{n+\cos n}{2n+\sin n}$
3. $u_n = \tan \frac{2n\pi}{3} - \cos \frac{n\pi}{6}$

*Exercice de TD : 11*

(♡ − ♡♡) A l'aide de majorations et minorations, étudier les limites éventuelles des suites suivantes :

1. $u_n = n - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k}$
3. $u_n = \frac{1}{n^p} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor 2^k x \rfloor$ où $\left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ p \in \mathbb{N}^* \end{array} \right.$

*Exercice de TD : 12*

(♡♡) A l'aide d'une minoration par une intégrale, prouver que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k^2}{n^2+k} \to +\infty$

*Exercice de TD : 13*

($* * *$) Une suite de Ramanujan
Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(x+2)$ et
la suite $(u_n)$ définie par : $u_1 = f(1)$, $\quad u_2 = \sqrt{1 + f(2)}$, $\quad u_3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + f(3)}}$, et pour tout $n \geq 3$ :

$$u_n = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 \cdots + (n-1)\sqrt{1 + f(n)}}}}$$

En étudiant les premiers termes de cette suite, prouver que $(u_n)$ est une suite convergente.

## 4) Les suites récurrentes

1. On peut commencer l'étude d'une suite récurrente en déterminant sa "limite éventuelle".
Si le fait de supposer que la suite converge entraine une absurdité, alors cela signifie que la suite diverge.
2. Il s'agit alors de prouver la convergence. Cela se fait souvent à l'aide du théorème de la limite monotone.
3. A ce stade, il peut-être utile de représenter l'évolution de la suite sur un graphe (en escalier ou en escargot).
On peut alors tenter de prouver ce que l'on observe : sens de variation, majoration, minoration... Pour cela, il est souvent utile de prouver que tous les termes de la suite appartiennent à un même intervalle $I$, stable par la fonction $f$ qui définie cette suite.

*Exercice de TD : 14*

(♡♡) Etudier la convergence de $(u_n)$, $(v_n)$ et $(w_n)$ définies par $u_0,\ v_0,\ w_0 \in \mathbb{R}$ et les relations de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{v_n + w_n}{2}, \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + w_n}{2}, \qquad \text{et} \qquad w_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

*Exercice de TD : 15*

(♡♡) Le but de cet exercice est l'étude les 2 suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par $\left\{ \begin{array}{l} u_0 > 0 \\ v_0 > 0 \end{array} \right.$ et les relations : $\left\{ \begin{array}{l} u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = 2\frac{u_n . v_n}{u_n + v_n} \end{array} \right.$ .

1. Montrer que ces deux suites sont bien définies et à termes strictement positifs.
2. Comparer les termes généraux $u_n$ et $v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Etudier le sens de variation de ces deux suites.
4. En déduire que les deux suites convergent vers la même limite.

*Exercice de TD : 16*

($**$) **Moyenne arithmético-géométrique :**

1. Pour $(a,\ b) \in \mathbb{R}^+$ établir que : $\quad 2\sqrt{ab} \leq a + b$.
2. On considère les suites de réels positifs $(u_n)$ et $(v_n)$ définies par : $\left\{ \begin{array}{l} u_0 = a \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \end{array} \right.$ et $\left\{ \begin{array}{l} v_0 = b \\ v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{array} \right.$ .
Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq v_n$, $u_n \leq u_{n+1}$ et $v_n \geq v_{n+1}$.
3. Etablir que $(u_n)$ et $(v_n)$ convergent vers une même limite.
Cette limite commune est appelée moyenne arithmético-géométrique de a et b et est notée $M(a,\ b)$.
4. Calculer $M(a,\ a)$ et $M(a,\ 0)$ pour $a \in \mathbb{R}^+$.
5. Exprimer $M(\lambda a,\ \lambda b)$ en fonction de $M(a,\ b)$ pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$ .

*Exercice de TD : 17*

($**$) **Détermination de l'antécédent d'un nombre**

1. Montrer que la fonction $f$ définie par $f(x) = x + x^3$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^{+*}$. Nous allons proposer une méthode de détermination de $f^{-1}(a)$.
   Soit $\phi$, l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(t) = \frac{2t^3+a}{3t^2+1}$ et $(u_n)$ la suite définie par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \phi(u_n)$.
   (a) Etudier $\phi$.
   (b) Montrer que $(u_n)$ converge vers $f^{-1}(a)$.

*Exercice de TD : 18*

$(**)$

1. Etudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \sqrt{9 + \sqrt{9 + \sqrt{9 + \cdots + \sqrt{9}}}}$ ($n$ fois le chiffre "9").
2. Pour tout entier naturel $n$, on note $a_n$ la nième décimale de $\pi$ et $v_n = \sqrt{3 + \sqrt{1 + \sqrt{4 + \cdots + \sqrt{a_n}}}}$.
   Montrer que $(v_n)$ est croissante et majorée. En déduire sa convergence.

*Exercice de TD : 19*

$(\heartsuit\heartsuit)$ On considère un réel $a > 0$ et la suite récurrente définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \end{cases}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)$ est bien définie et qu'elle converge vers $\sqrt{a}$.
2. On note $e_n = |u_n - \sqrt{a}|$ l'erreur commise en approximant $\sqrt{a}$ par $u_n$.
   Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ e_{n+1} \leq C.e_n^2$.
   On dit que la convergence est *quadratique*.
3. Si $u_n$ est une valeur approchée de $\sqrt{a}$ à $10^{-p}$ près, que peut-on dire de $u_{n+1}$ ?
4. On prend $a = 2$ et $u_0 \geq \sqrt{2}$ tel que $u_0 - \sqrt{2} \leq 1$.
   Majorer explicitement $e_n$ en fonction de $n$.
   Quelle valeur de $n$ suffit-il de choisir pour que $u_n$ soit une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à $10^p$ près ?

## 5) Suites implicites

1. Les termes d'une "suite implicite" sont définis comme les solutions d'une équation de la forme $f_n(x) = 0$.
   On ne connaît donc pas d'expression explicite (fonctionnelle ou récurrente) de la suite, ce qui ne semble pas faciliter l'étude.
2. On parvient cependant assez facilement à déterminer le sens de variation ainsi que des majorations ou minorations éventuelles de la suite en utilisant le sens de variation de la fonction $f_n$. Ainsi, dans le cas d'une fonction croissante (par exemple), on sait que si $f(a) \leq f(b)$ alors on aura aussi $a \leq b$.

*Exercice de TD : 20*

$(\heartsuit\heartsuit)$ Soit $n$ un entier naturel et $E_n$ l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que l'équation $E_n$ possède une solution unique notée $x_n$.
2. Montrer que la suite $(x_n)$ diverge vers $+\infty$.
3. Donner un équivalent simple de la suite $(x_n)$.

*Exercice de TD : 21*

$(***)$ Pour tout entier $n > 1$, on considère l'équation $(E_n)\ :\ x^n - nx + 1 = 0$ et on posera $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Montrer que $(E_n)$ admet une unique racine $x_n$ dans $[0; 1]$ et une unique racine $y_n$ dans $[1,\ +\infty[$.
2. Montrer que $(x_n)$ est décroissante. On pourra commencer par prouver que $f_{n+1}(x_n) \leq 0$.
   En déduire que $(x_n)$ converge puis déterminer sa limite en calculant $f_n(\frac{2}{n})$.
3. Trouver un équivalent de $x_n$.
4. En vérifiant que $f_n(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}) \geq n$, montrer que $(y_n)$ est convergente vers une limite à déterminer.

*Exercice de TD : 22*

$(***)$ On considère l'équation $\tan x = x$.

1. Montrer que pour tout entier $n$, cette équation admet une unique solution sur $]-\frac{\pi}{2} + n\pi,\ \frac{\pi}{2} + n\pi[$.
   On la note $x_n$.
2. Trouver un équivalent le plus simple possible de $x_n$.

3. On cherche maintenant un développement asymptotique de $x_n$.
   (a) En utilisant la périodicité de tan, montrer la convergence de $(x_n - n\pi)$ et trouver sa limite.
   (b) Prouver que pour toute suite $(w_n)$ à valeurs dans $]-\frac{\pi}{2},\ 0[$ convergeant vers 0, on a $\tan w_n \sim w_n$.
   (c) En déduire un développement asymptotique de $x_n$ à trois termes significatifs.
   (cad du type $x_n = v_n + w_n + t_n + o(t_n)$)