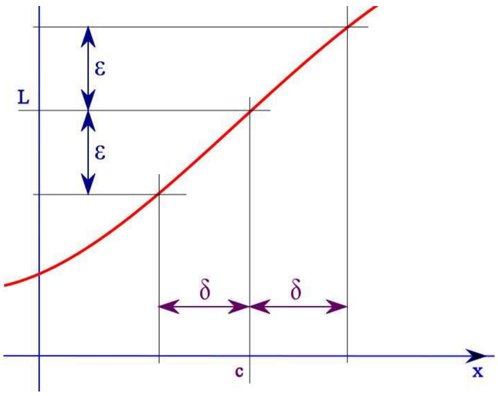
Limite et Continuité

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

2 décembre 2016



Dans ce chapitre, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ et seront définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
Après avoir introduit quelques concepts et propriétés de base, nous nous intéresserons au comportement des fonctions réelles de la variable réelle en des "points" particuliers de leur ensemble de définition (point de vue LOCAL). Nous introduirons en particulier les notions de *limite* et de *continuité* en un point.
La fonction qui a tout $x \in I$ associe 0, sera notée 0.

1 Quelques notions de topologie

Définition 1 : **Voisinage d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$**

1. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un *voisinage* de $a \in \mathbb{R}$ s'il existe un réel $\alpha > 0$ tel que $]a-\alpha,\ a+\alpha[\subset V$.
   On note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a.
2. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un *voisinage* de $+\infty$ s'il existe un réel $A > 0$ tel que $]A,\ +\infty[\subset V$.
3. On dit que $V \subset \mathbb{R}$ est un *voisinage* de $-\infty$ s'il existe un réel $B < 0$ tel que $]-\infty,\ B[\subset V$.

Dessin

Voisinage d'un point

Remarque 1. Pour simplifier, on prendra : $\begin{cases}]a-\alpha,\ a+\alpha[\text{ avec } \alpha > 0 \text{ pour un voisinage de } a \in \mathbb{R} \\ ]A,\ +\infty[\text{ pour un voisinage de } +\infty \\ ]-\infty,\ B[\text{ pour un voisinage de } -\infty \end{cases}$.

Définition 2 : Adhérence et Intérieur d'une partie
Soit $A \subset \mathbb{R}$. On dira que :

1. Un élément a appartient à *l'adhérence* de A lorsque tout voisinage de a rencontre A.
   On note $\bar{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.
   Si A est un intervalle, alors $\bar{A}$ est l'intervalle avec les bornes comprises.
2. Un élément a appartient à *l'intérieur* d'une partie A lorsqu'il existe un voisinage de a inclus dans A.
   On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points intérieurs à A.
   Si A est un intervalle, alors $\overset{\circ}{A}$ est l'intervalle sans ses bornes.

Exemple 1. Si I est un intervalle de bornes a et b alors : $\bar{I} = [a,\ b]$ et $\overset{\circ}{I} =]a,\ b[$.

Exercice : 1
Déterminer l'adhérence et l'intérieur des ensembles suivants :

1. $\mathbb{N}$
2. $\mathbb{Q}$
3. $\{1\}$
4. $[0,\ 1[\cup]3,\ 5[$

Définition 3 : Propriété d'une fonction f au voisinage d'un point x_0
Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \bar{I}$.

On dira que la fonction f vérifie une propriété P au voisinage de x_0 lorsqu'il existe un voisinage V de x_0 tel que la propriété P soit vraie sur $V \cap I$.

2 Limite d'une fonction

2.1 Définitions

Définition 4 : Limite d'une fonction en un point a
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, $a \in \overline{I}$, et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

On dira que f admet l pour *limite* au point a
ssi
Pour tout voisinage V_l de l, il existe un voisinage V_a de a tel que, pour tout élément $x \in V_a \cap I$ on a $f(x) \in V_l$.

On note alors : $l = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ou plus rapidement : $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$.

Remarque 2. Traduction selon que a et l soient des réels ou pas :

Lorsque a et l sont réels, on a	$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$	$\iff$	$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I,\ \lvert x-a\rvert \le \delta \Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert \le \varepsilon$
Lorsque $a = +\infty$ et $l = -\infty$ on a	$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$	$\iff$	$\forall B < 0,\ \exists\ A > 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I,\ x \ge A \Rightarrow f(x) \le B$
Lorsque $a = -\infty$ et l est réel on a	$f(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} l$	$\iff$	$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\ B < 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I,\ x \le B \Rightarrow \lvert f(x)-l\rvert \le \varepsilon$
Lorsque a est réel et $l = +\infty$ on a	$f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$	$\iff$	$\forall A > 0,\ \exists\ \delta > 0 \ \text{ tq } \ \forall x \in I,\ \lvert x-a\rvert \le \delta \Rightarrow f(x) \ge A$

Limite d'une fonction en $a \in \mathbb{R}$	Limite d'une fonction en $+\infty$

Remarque 3. Cas où a appartient à l'ensemble de définition de f.
Si f admet une limite en a alors cette limite ne peut-être que $f(a)$.
Démontrer cette affirmation par l'absurde en supposant que la limite l est différente de $f(a)$ et en prenant $\epsilon < |l - f(a)|$

`Exemple 2.` (∗∗) Soit f une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. Prouver que :

$$f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sup_{[A,\ +\infty[} |f(x)| \xrightarrow[A\to+\infty]{} 0$$

Proposition 1 :
- Lorsque $l \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence suivante : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x) - l = 0$
- Lorsque $a \in \mathbb{R}$, on a l'équivalence suivante : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Longleftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} f(a+h) = l$

Preuve 1 : Ces deux équivalences proviennent directement de la définition des limites.

Définition 5 : **Limite à gauche, limite à droite**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et a un réel tel que $a \in \overline{I}$. Soit $l \in \mathbb{R}$.
On dira que :

f admet une limite à gauche l en $a \Longleftrightarrow$ la restriction de f à $I \cap]-\infty\,; a[$ admet une limite en a.

On écrira : $f(x) \xrightarrow[x\to a^-]{} l$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l$

On définit de même la limite à droite

Remarque 4. Vous constaterez que les intervalles sont ici ouverts en a !

Limites à droite et à gauche en a.

`Exemple 3.` (∗) Limites à droite et à gauche de la fonction f définie par $f(x) = 2x - \lfloor x \rfloor$ en tout point $n \in \mathbb{Z}$?

2.2 Propriétés d'une fonction admettant une limite

Théorème 2 : **Existence et Unicité de la limite**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$.

1. f n'admet pas forcément de limite au point a
2. Si cette limite existe, elle est alors unique.

Preuve 2 :

1. Existence : prenons par exemple la fonction "Partie Entière" et $a = 1$.
2. Unicité : On peut par exemple, démontrer le cas où $a \in I$ et $l \in \mathbb{R}$. Les autres cas se démontrant de façon équivalente. On procède alors par l'absurde en considérant qu'il existe deux limites l_1 et l_2. Dans ce cas, en prenant $\varepsilon < |l_1 - l_2|$ on aboutit facilement à une contradiction.

Exemples de fonctions qui n'ont pas de limite

Théorème 3 : **Une fonction admettant une limite finie est localement bornée**
Toute fonction admettant une limite finie en un point de $\overline{\mathbb{R}}$ est bornée sur un voisinage de ce point.

Preuve 3 : C'est une conséquence immédiate de la définition de la limite !!

Théorème 4 : **La connaissance d'une limite fournit localement une inégalité**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, et un point $a \in \overline{I}$.
Soient deux réels $(k,\ k') \in \mathbb{R}^2$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

Si $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \\ k < l < k' \end{cases}$ alors il existe un voisinage V de a sur lequel $\forall x \in V \cap I, \quad k \leq f(x) \leq k'$

Preuve 4 : Il suffit de considérer $\varepsilon = \min(l - k,\ k' - l)$ dans la définition de la limite !

Remarque 5. Toute fonction admettant une limite strictement positive en un point est donc strictement positive au voisinage de ce point.

Exercice : 2
$(*)$ Soient l et l', deux réels tels que $l < l'$ et $a \in \overline{\mathbb{R}}$.
Montrer que si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l'$, alors il existe un voisinage de a sur lequel : $f(x) < g(x)$

Théorème 5 : **Passage à la limite dans les inégalités**
Soient deux fonctions $f,\ g : I \mapsto \mathbb{R}$, un point $a \in \overline{I}$, et deux réels l et l'.

Si $\begin{cases} f(x) \leq g(x) & \text{au voisinage du point } a \\ f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l & \text{et que} \quad g(x) \xrightarrow[x \to a]{} l' \end{cases}$ alors $l \leq l'$.

Preuve 5 : On peut procéder par l'absurde en utilisant le théorème précédent ou utiliser la caractérisation séquentielle de la limite.

⚠⚠⚠. Le passage à la limite conserve les inégalités larges, mais pas les inégalités stictes.
Ainsi, même si $f(x) < g(x)$ au voisinage de a, il est faux d'écrire que $l < l'$.
Pour vous en convaincre, considérez : $f(x) = 1 - \frac{1}{x}$ et $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ au voisinage de $a = +\infty$.

2.3 Les théorèmes de calcul et d'existence d'une limite

Vous allez constater que la plupart des théorèmes suivants correspondent à un théorème analogue sur les suites.

THÉORÈME 6 : **Théorème de majoration**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, un point $a \in \overline{I}$ et un réel $l \in \mathbb{R}$.
Soit θ une fonction définie sur un voisinage V de a.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \forall x \in V,\ |f(x) - l| \leq \theta(x) \\ \theta(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0 \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l.$$

Ce théorème ne peut être utiliser que lorsqu'on sait a priori quelle est la limite cherchée.

Preuve 6 : Immédiat avec la définition.

Exercice : 3

Déterminer les limites des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x.\sin\frac{1}{x}$ en 0
2. $f(x) = \frac{x.\cos(e^x)}{x^2+1}$ en $+\infty$
3. $f(x) = \frac{\lfloor x^2 \rfloor}{x}$ en 0
4. $f(x) = \frac{x+\arctan x}{x}$ en $+\infty$

THÉORÈME FONDAMENTAL 7 : **Caractérisation séquentielle de la limite**
Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$.

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = l \iff$ Pour *toute* suite (x_n) de points de I qui tend vers a, la suite $\big(f(x_n)\big)$ tend vers l.

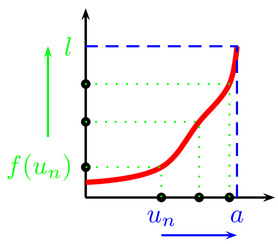


FIGURE 1 – Image d'une suite par une fonction

Preuve 7 :

$\Rightarrow$ On considère une suite (x_n) de points de I convergeant vers a. On considère $\varepsilon > 0$ et on montre facilement en explicitant les hypothèses qu'il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, $|f(x_n) - l| \leq \varepsilon$.

$\Leftarrow$ Par contraposée : on montre que si $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq l$ alors on peut construire une suite (x_n) convergeant vers a telle que $f(x_n)$ ne converge pas vers l.

Applications :

1. Pour montrer qu'une fonction f n'admet pas de limite en un point $a \in \overline{\mathbb{R}}$, on pourra :
   — Soit prendre une suite (x_n) tendant vers a telle que $(f(x_n))$ n'admet pas de limite
   — Soit prendre (x_n) et (y_n) tendant vers a mais telles que $(f(x_n))$ et $(f(y_n))$ aient des limites différentes
2. Dans les théorèmes suivants pour montrer qu'une fonction f admet une limite l en a, on pourra montrer que pour toute suite $(x_n) \to a$, on a $f(x_n) \to l$.

`Exemple 4.` $(*)$ **Pour prouver qu'une fonction n'admet pas de limite**

1. Montrer que la fonction "Partie Entière" n'admet pas de limite en tout $n \in \mathbb{N}$

2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ n'admet pas de limite en 0
3. Montrer que la fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ n'admet pas de limite en tout point de $\mathbb{R}$.

`Exemple 5.` $(*)$ Application à l'étude de la limite d'une suite.
Si (u_n) converge vers 2, que dire alors de la suite (v_n) définie par $v_n = e^{u_n}$?

Exercice : 4

$(*)$ Soit une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ périodique.
Montrez que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ existe, alors la fonction f est constante.

PROPOSITION 8 : **Théorèmes généraux sur les limites finies**
On suppose que les fonctions f et g ont une limite $l \in \mathbb{R}$ et $l' \in \mathbb{R}$ en $a \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. la fonction $|f|$ a une limite en a et : $|f(x)| \xrightarrow[x\to a]{} |l|$.
2. la fonction $(f+g)$ a une limite en a et : $(f+g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} l + l'$.
3. la fonction (fg) a une limite en a et : $(fg)(x) \xrightarrow[x\to a]{} ll'$
4. la fonction $1/f$ a une limite en a et : $(1/f)(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1/l$ (lorsque $l \neq 0$)
5. la fonction (f/g) a une limite en a et : $(f/g)(x) \xrightarrow[x\to a]{} l/l'$ (lorsque $l' \neq 0$)

Preuve 8 : On pourrait démontrer ces propositions à l'aide de la définition de la notion de limite avec les ε. Cependant, ce résultats sont quasi-immédiat en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite et les théorèmes généraux sur les limites de suites.

THÉORÈME 9 : **Cas de la limite d'une composée**
Soient deux intervalles $I \subset \mathbb{R}$ et $J \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : I \mapsto J$, $g : J \mapsto \mathbb{R}$.
Soient un point $a \in \overline{I}$, un point $b \in \overline{J}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
On suppose que : $\begin{cases} f(x) \xrightarrow[x\to a]{} b \\ g(y) \xrightarrow[y\to b]{} l \end{cases}$, alors $\boxed{g \circ f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l}$

Preuve 9 : Pas de difficulté en utilisant la caractérisation séquentielle de la limite.

Remarque 6. Ce théorème justifie la possibilité d'effectuer un changement de variable lors du calcul d'une limite.

Exercice : 5

$(*)$ Déterminer les limites de :

1. $f(x) = x^x$	en	0^+	2. $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$	en	0	3. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$	en	0
4. $f(x) = \frac{1-x}{\arccos x}$	en	1	5. $f(x) = \ln x.\ln(\ln x)$	en	1^+.	6. $f(x) = \frac{x-\sqrt{x}}{\ln x + x}$	en	$+\infty$

THÉORÈME 10 : **Théorème de la limite monotone**
Soient $(a,\ b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Si $f\ :\ ]a,\ b[\mapsto \mathbb{R}$ est une fonction *croissante*, alors :

1. $\begin{cases} \text{Soit } f \text{ est majorée, et alors } f \text{ admet une limite finie } l \text{ lorsque } x \to b \quad (\text{et } \lim\limits_{x\to b} f(x) = \sup\limits_{]a,\ b[} f) \\ \text{Soit } f \text{ n'est pas majorée, et alors } f(x) \to +\infty \text{ lorsque } x \to b. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \text{Soit } f \text{ est minorée et alors } f \text{ admet une limite finie lorsque } x \to a \quad (\text{et } \lim\limits_{x\to a} f(x) = \inf\limits_{]a,\ b[} f) \\ \text{Soit } f \text{ n'est pas minorée et alors } f(x) \to -\infty \text{ lorsque } x \to a \end{cases}$

On a des résultats similaires dans le cas où f est décroissante.

Preuve 10 : L'existence de la borne sup ne pose pas de difficulté. On prouve alors le résultat à l'aide de la définition de la limite et en utilisant la caractérisation de la borne sup par ε.

Théorème de la limite monotone

`Exemple 6.` Déterminer la limite en $+\infty$ et 0^+ de la fonction logarithme.

THÉORÈME 11 : **Théorème des gendarmes**
Soient α, f et β trois fonctions définies sur un voisinage V d'un point $a \in \mathbb{R}$, et $l \in \mathbb{R}$.

$$\text{Si} \quad \left\{\begin{array}{l} \forall x \in V,\ \alpha(x) \leq f(x) \leq \beta(x) \\ \alpha(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \\ \beta(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \end{array}\right. \qquad \text{alors} \quad \boxed{f(x) \xrightarrow[x \to a]{} l}$$

Preuve 11 : La traduction des hypothèses donne immédiatement le résultat, mais on peut aussi utiliser la caractérisation séquentielle de la limite.

⚠⚠⚠. **Contre-exemple**
Lorsque les fonctions α et β tendent vers deux limites différentes la fonction f n'admet pas forcément de limite.

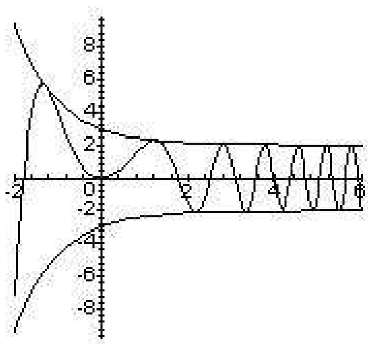


FIGURE 2 – Contre-exemple

`Exemple 7.` Déterminer si elles existent, les limites en 0^+, en 0^- et en $+\infty$ de $f(x) = x.\lfloor 1/x \rfloor$.

Exercice : 6

(**) Etudier la limite en 0^+ puis déterminer un équivalent en 0^+ de la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$.

⚠ `Attention` ⚠

```
Ne pas confondre :
"théorème des gendarmes" et "passage à la limite dans les inégalités"
Le théorème des gendarmes donne l'existence de la limite de f, alors que pour
passer à la limite dans les inégalités, il faut savoir que f admet une limite.
```

Remarque 7. Le théorème des gendarmes se généralise aux limites infinies. Ainsi :

1. Si sur un voisinage de $a \in \overline{I}$, on a : $\begin{cases} \alpha(x) \leq f(x) \\ \alpha(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty \end{cases}$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.
2. Si sur un voisinage de $a \in \overline{I}$, on a : $\begin{cases} f(x) \leq \beta(x) \\ \beta(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty \end{cases}$ alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.

`Exemple 8.` $(*)$

1. Soit g bornée au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f telle que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$. Prouvez que $f(x).g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
2. Soit g majorée au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f telle que $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. Prouvez que $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$.
3. Soit g minorée au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et f telle que $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$. Prouvez que $f(x) + g(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$.

3 Continuité en un point (Propriétés Locales)

3.1 Définitions et théorèmes

Définition 6 : **Continuité en un point**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et un point $a \in I$. (f est donc définie en a)
On dira que la fonction f est *continue* au point a ssi f admet une limite en a.
On a donc :

$$\boxed{f \text{ est } \textit{continue} \text{ au point } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$$

Remarque 8. Avec des quantificateurs cette définition se traduit par :

$$\boxed{f \text{ est continue en } a \in I \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I,\ |x - a| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon}$$

Remarque 9.

1. Une fonction qui n'est pas définie en un point a ne peut pas être continue en ce point.
2. Les notions de limite et de continuité en un point ne tiennent compte que du comportement de la fonction au voisinage du point considéré. On dit qu'il s'agit de **notions locales**.
   Pour les étudier, on pourra donc se placer au voisinage du point a en oubliant ce qui se passe ailleurs.

`Exemple 9.` Démontrez que la fonction $f(x) = \sin x$ est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.

Définition 7 : **Continuité à droite et à gauche en** a
Soit f définie sur I et $a \in I$.

On dira que : f est continue à droite en a ssi $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
et que : f est continue à gauche en a ssi $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$

Continuité à droite et à gauche

PROPOSITION 12 : **Caractérisation de la continuité**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ et un point $a \in I$.
On a :

$$f \text{ continue en a} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{continue à droite en a} \\ \text{continue à gauche en a} \end{cases}$$

`Exemple 10.` Etudier la continuité de f définie par $f(x) = 2x - \lfloor x \rfloor$ en tout point $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice : 7

Déterminer les réels a et b pour que la fonction f définie par $\begin{cases} \frac{\sin x + a}{x} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ \tan(x+b) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ soit continue en 0.

PROPOSITION 13 : **Caractérisation séquentielle de la continuité**
Soit f est une fonction réelles définie au voisinage de a.
On a :

f continue en $a \Longleftrightarrow$ Pour *toute* suite (x_n) de points de I convergeant vers a, $\big(f(x_n)\big)$ converge vers $f(a)$.

`Exemple 11.` Application au transfert de propriétés valables sur les rationnels
Déterminer les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ nulles en tout point rationnel.

Exercice : 8

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.
Montrer, en introduisant la suite (u_n) définie par $u_0 = x \in \mathbb{R}$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$, que f est une fonction constante.

Limite d'une suite récurrente
Soit (u_n) une suite réelle définie par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$
Si la suite (u_n) converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$, et si la fonction f est continue au point l, alors par passage à la limite dans la relation de récurrence, on obtient que l est solution de l'équation : $x = f(x)$

`Exemple 12.` La suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_{n+1} = \text{ch}(u_n) \\ u_0 = 2 \end{cases}$ peut-elle converger ?

3.2 Prolongement par continuité

DÉFINITION 8 : **Prolongement par continuité**
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f :]a,\ b] \to \mathbb{R}$.
Si la fonction f admet une limite finie l à droite en a, on pourra alors *prolonger* f en une fonction

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc}]a,\ b] \cup \{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in]a,\ b] \\ l & \text{si } x = a \end{cases} \end{array}$$

La fonction $\tilde{f}$ ainsi construite est continue à droite au point a.
On dit que $\tilde{f}$ est le *prolongement par continuité* de f au point a.

Prolongement par continuité

Remarque 10.

1. Pour éviter de compliquer les notations, on confondra souvent f et $\tilde{f}$
2. De même, si f est définie sur $[a; b[$, on peut définir le prolongement par continuité de f en b.

⚠ Attention ⚠

```
Cela n'a pas de sens :

    - De prolonger par continuité en b une fonction qui est déjà définie en b.
    - De prolonger par continuité la dérivée d'une fonction.
```

`Exemple 13.` Prolongez par continuité en 0 les deux fonctions suivantes :

1. $f(x) = x.\ln x$
2. $g(x) = \frac{1-\cos x}{x^2}$

Exercice : 9

Soit $x \geq 0$.
Prouver que la fonction f définie sur $]0,\ \frac{\pi}{2}]$ par $f(t) = (\sin t)^x$ est prolongeable par continuité.

4 Continuité sur un intervalle (Propriétés Globales)

4.1 Définition et théorèmes de continuité

Définition 9 : **Fonctions continues sur un intervalle**
On dit qu'une fonction f est continue sur un intervalle I ssi cette fonction est continue en chaque point de I.
On note $\mathcal{C}(I)$ ou $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

Remarque 11. Le fait qu'une fonction soit continue sur un intervalle I, correspond intuitivement au fait que l'on puisse tracer sa courbe représentative sans lever le crayon. La continuité en un point est une notion locale, alors que la continuité sur un intervalle est une notion globale.

`Exemple 14.`

— Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$
— Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition.
— Les fonctions ln, exp, sin, cos, tan, arccos, arcsin, arctan, ch, sh, th sont continues sur leur ensemble de définition.

Théorème 14 : **Opérations sur les fonctions continues**

1. Si f et g sont continues sur un intervalle I, alors $f+g$, $f \times g$, $|f|$ et $\lambda.f$ le sont aussi.
   Si de plus, g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est aussi continue sur I.
2. Si f et g sont continues sur un intervalle I, alors $\left\{\begin{array}{l}\sup(f,\ g)\\ \inf(f,\ g)\end{array}\right.$ le sont aussi (voir l'exercice qui suit).
3. Si $\begin{cases}\text{f est continue de I dans J}\\ \text{g est continue sur J}\end{cases}$, alors gof est continue sur I.
4. Si $\begin{cases}\text{f est continue sur [a, b]}\\ \text{f est continue sur [b, c]}\end{cases}$, alors f est continue sur $[a,\ c]$.
5. Si f est la restriction sur $J \subset I$ d'une fonction continue sur I, alors f est continue sur J.

Preuve 14 : On se place en un point $a \in I$ est on prouve la continuité en a des différentes fonctions à l'aide des théorèmes généraux sur les limites de fonctions.

Remarque 12. On dira que $(\mathcal{C}(I,\ \mathbb{R}),\ +,\ .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

`Exemple 15.` $(*)$ Les fonctions f et g étant continues sur $[0,\ 1]$, prouver que la fonction $t \mapsto f(t).g(1-t)$ l'est aussi.

Exercice : 10

$(*)$ Soient deux fonctions $f,\ g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continues sur un intervalle I. On définit les fonctions $\sup(f,\ g)$ et $\inf(f,\ g)$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sup(f,\ g)(x) = \max(f(x),\ g(x)) \quad \text{et} \quad \inf(f,\ g)(x) = \min(f(x),\ g(x))$$

1. Montrer que $\sup(f,\ g) = \frac{1}{2}\big((f+g) + |f-g|\big)$ et que $\inf(f,\ g) = \frac{1}{2}\big((f+g) - |f-g|\big)$
2. En déduire que $\sup(f,\ g)$, $\inf(f,\ g)$, $f^+ = \sup(f,\ 0)$ et $f^- = \sup(-f,\ 0)$ sont continues sur I.

Etude de la continuité d'une fonction.

1. GLOBALEMENT :
   Pour la continuité sur un intervalle ou sur une réunion (éventuellement infinie) d'intervalles, on utilise si possible les théorèmes généraux précédents.
2. LOCALEMENT :
   Pour la continuité en un point, on étudie la limite de la fonction en ce point, quitte si nécessaire à distinguer l'étude à droite et l'étude à gauche.

Exercice : 11

$(*)$ Etudier la continuité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor}$

Exercice : 12

$(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Etudier la continuité de la fonction u_n définie sur $[0,\ 1]$ par :

- $u_n(x) = \sqrt{n}$ si $0 \leq x \leq \frac{1}{2n}$
- $u_n(x) = 2\sqrt{n}(1-nx)$ si $\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{n}$
- $u_n(x) = 0$ si $\frac{1}{n} \leq x \leq 1$

Exercice : 13

$(**)$ On cherche ici les morphismes continus du groupe $(\mathbb{R}, +)$, c'est à dire, les fonctions $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1. Analyse : Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ vérifiant : $\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$.
   (a) Démontrer que $\forall k \in \mathbb{Z}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(kx) = k.f(x)$
   (b) En notant $\alpha = f(1)$, calculer $f(p)$ pour tout $p \in \mathbb{Z}$, puis déterminer $f(1/q)$ et $f(p/q)$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.
2. Synthèse : Quelles sont alors les fonctions solutions ?

4.2 Théorèmes des Valeurs Intermédiaires (TVI)

Théorème Fondamental 15 : **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI-1)**
Soit un *intervalle* $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $f\ :\ I \mapsto \mathbb{R}$.
Soit deux réels $(a,\ b) \in I^{\ 2}$ avec $a < b$.

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur le segment } [a, b] \\ t \in [f(a),\ f(b)] \end{cases}$ alors il existe $c \in [a,\ b]$ tel que $f(c) = t$.

Preuve 15 : Ce résultat est normalement admis mais les démonstrations sont intéressantes.
Méthode 1 : avec la borne sup
Dans le cas où $f(a) \leq t$, $\Delta = \{x \in [a,\ b] \mid f(x) \leq t\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R}$ majorée.
Elle admet donc une borne supérieure c. Il s'agit alors de prouver que $f(c) = t$.

Dessin

Recherche d'un zéro par dichotomie

Preuve 15 : Méthode 2 : Par dichotomie
On considère une fonction $f : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur $[a,\ b]$ telle que $\begin{cases} f(a) < t \\ f(b) > t \end{cases}$.

1. Montrer que la fonction f s'annule en un point.
   Pour montrer l'existence de c telle que $f(c) = t$, on construit deux suites récurrentes $\begin{cases} (a_n) \\ (b_n) \end{cases}$.
   Pour cela, on pose $\begin{cases} a_0 = a \\ b_0 = b \end{cases}$ et :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \ : \quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq t \\ \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < t \end{cases} \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n+b_n}{2} & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) \geq t \\ b_n & \text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < t \end{cases}$$
2. On montre que les deux suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et convergent vers une valeurs $c \in [a,\ b]$ telle que $f(c) = t$.

Remarque 13. La démonstration par dichotomie présente l'avantage de donner une méthode pour obtenir une approximation de c. Si l'on choisit de prendre a_n comme valeur approchée de c, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ |c - a_n| \leq \frac{b-a}{2^n}$$

En déduire une valeur de n pour laquelle nous sommes sûrs que $a_n = c$ à 10^{-p} près (avec $p \in \mathbb{N}^*$).
Construire un algorithme en langage Python permettant de déterminer une approximation de c à 10^{-5} près.

Remarque 14. Dans le cours sur la dérivation, nous étudierons une méthode d'approximation plus rapide de la solution d'une équation de la forme $f(x) = 0$ appelée la méthode de Newton.

⚠ Attention ⚠

```
La continuité de la fonction f est une hypothèse indispensable !!
En effet, si f n'est pas continue, alors c n'existe pas forcément...
Voir le dessin ci-dessous !
```

Remarque 15. TVI-2 : Lorsque $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,\ b] \\ f(a)f(b) < 0 \end{cases}$, il existe $c \in [a,\ b]$ tel que $f(c) = 0$.

Dessin

TVI-1	TVI-2	Cas non continu

⚠ `Attention` ⚠

```
les TVI montrent l'existence d'un réel c, mais pas son unicité.
Pour prouver l'unicité, on utilisera le théorème de la bijection.
```

Exercice : 14

($*$) Soit une fonction $f\ :\ [0,1] \mapsto [0,1]$ continue. Montrez qu'elle admet un point fixe.

Exercice : 15

($**$) Un cycliste parcourt 20 km en une heure.

1. Montrer qu'il existe un intervalle d'une demi-heure pendant lequel il a parcouru exactement 10 km.
2. Montrer qu'il existe un intervalle de 3mn pendant lequel il a parcouru exactement 1 km.

Proposition 16 : Une fonction continue et injective sur un intervalle I est strictement monotone.

Preuve 16 : Par l'absurbe en utilisant le TVI

4.3 Théorème de Weierstrass

Proposition 17 : **Image continue d'un intervalle**
Soit un intervalle I et une fonction $f \in \mathcal{C}(I)$ continue sur cet intervalle.
Alors, la partie $f(I)$ est aussi un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou un singleton).

Preuve 17 : Démonstration par l'absurde en utilisant le TVI.

Remarque 16. Cas des fonctions strictement monotones :
Lorsque f est une fonction continue et strictement croissante sur les intervalles considérés :

1. $f([a,\ b]) = [f(a),\ f(b)]$
2. $f(]a,\ b[) =]f(a),\ f(b)[$
3. $f([a,\ b[) = [f(a),\ \lim\limits_{x\to b} f(x)[$
4. $f(]a,\ b]) =]\lim\limits_{x\to a} f(x),\ f(b)]$

Ce théorème peut être utilisé pour prouver la non continuité d'une application sur I
Si I est un intervalle et si $f(I)$ n'en est pas un, alors f n'est pas continue sur I.

`Exemple 16.` ($*$) Soit la fonction f définie sur $I = [0,1]$ par : $\begin{cases} f(x) = x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 1/2 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Alors : $\begin{cases} \max\ f([0,1]) = 1 \\ \min\ f([0,1]) = 0 \end{cases}$ mais $f([0,1]) \neq [0,1]$ donc la fonction f n'est pas continue sur $[0,\ 1]$.

Théorème Fondamental 18 : **Image continue d'un segment (Weierstrass)**
Soit deux réels $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ et une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur le segment $[a,b]$.
Alors, l'image directe du segment $[a,b]$, est un segment $[m,\ M]$.

Image continue d'un segment	**Image continue d'un intervalle ouvert**

Preuve 18 : On sait déjà que $f([a,\ b])$ est un intervalle.
Prouvons que sa borne supérieure M (au sens large!) est atteinte.
On sait qu'il existe une suite $(x_n) \in [a,\ b]^{\mathbb{N}}$ telle que $f(x_n) \to M$.
La suite (x_n) étant une suite bornée, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, elle admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente vers un réel $d \in [a,\ b]$.
Comme $f(x_n) \to M$ alors le théorème des suites extraites montre que $f(x_{\varphi(n)}) \to M$.
Or, la continuité de f nous donne que $f(x_{\varphi(n)}) \to f(d)$.
On a donc $f(d) = M$ et donc la borne supérieure de $f([a,\ b])$ est atteinte.
On montre que la borne inférieure est atteinte en reprenant le raisonnement précédent pour la fonction $-f$.

`Exemple 17.` $(*)$ Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$.
Prouver que la fonction h définie par $h(x) = \sup\limits_{u\in[0,\ \sqrt{x}]} f(u)$ est définie sur $\mathbb{R}^+$.

Corollaire 19 : une fonction réelle définie et continue sur un segment est donc bornée et atteint ses bornes!

Preuve 19 : Immédiat!

Exercice : 16
$(*)$ Soient deux fonctions $f,\ g\ :\ [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que $\forall x \in [0,1],\ f(x) < g(x)$
Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) + \alpha \leq g(x)$

Exercice : 17
$(*)$ Soit $f\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ bornée et $g\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$.
Montrer que les fonctions fog et gof sont elles aussi bornées.

Exercice : 18
$(**)$ Soient $f,\ g \in \mathcal{C}([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in [0,\ 1],\ 0 < f(x) < g(x)$.
Soit $(x_n) \in [0,\ 1]^{\mathbb{N}}$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left[\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\right]^n$.
Etudier la convergence de (u_n).

4.4 Théorème de la bijection

Lemme 20 : Soit f une application réelle $\boxed{\text{monotone définie sur un intervalle } I}$.

$$f \text{ est continue sur } I \iff f(I) \text{ est un intervalle}$$

Preuve 20 : L'implication directe a été démontrée.
Pour la réciproque, on procède par contraposée en supposant par exemple que f est croissante.
Supposons que f n'est pas continue en un $x_0 \in I$, par exemple : $f(x) \underset{x\to x_0^-}{\not\longrightarrow} f(x_0)$.
f étant croissante, le théorème de la limite monotone assure que $f(x) \underset{x\to x_0^-}{\longrightarrow} c \in \mathbb{R}$ et que $c < f(x_0)$.
On prouve alors (par l'absurde) que si l'on prend $y_0 \in]c,\ f(x_0)[$ alors y_0 n'a pas d'antécédent par f et donc que $f(I)$ n'est pas un intervalle.

Théorème Fondamental 21 : **Théorème de la bijection**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$.
On suppose que la fonction f est : $\begin{cases} \text{continue sur l'intervalle } I \\ \text{strictement monotone sur } I \end{cases}$
Alors la fonction f réalise une bijection de l'intervalle I vers l'intervalle $J = f(I)$, et sa bijection réciproque $f^{-1} : J \mapsto I$ est une fonction strictement monotone de même sens que f et continue sur J.

Preuve 21 : Nous avons ici 4 résultats à démontrer ...

1. On justifie que J est un intervalle.
2. On montre que si f n'est pas bijective, alors elle ne peut pas être strictement monotone.
3. On suppose par expl que f est strictement croissante et on démontre par l'absurde que f^{-1} l'est aussi.
4. Pour montrer la continuité de la fonction f^{-1}, on peut utiliser ce que l'on sait sur l'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone.

Remarque 17. Une fonction f strictement monotone sur I est une bijection de I dans $f(I)$, même si f n'est pas continue. En revanche, rien ne nous permet d'affirmer que dans ce cas $f(I)$ est un intervalle.

Remarque 18. Graphe de la bijection réciproque :
Les courbes représentatives de f et f^{-1} se déduisent l'une de l'autre par une symétrie par rapport à la droite $y = x$.

`Exemple 18.` La fonction ln est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$. Elle admet donc une bijection réciproque (appelée "fonction exponentielle") continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice : 19

($**$) Soit $f\ :\ \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{1+|x|}$.

1. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans un intervalle J que l'on déterminera.
2. Déterminer pour $y \in J$, une expression de $f^{-1}(y)$ analogue à celle de $f(x)$.

Exercice : 20

($*$) Déterminer le nombre de solution(s) de l'équation $a = x.e^{-x}$ selon les valeurs de a.

Exercice : 21

($**$) Pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n\ :\ \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n + x^{n-1} + \cdots + x - 1 \end{array}$

1. Montrez qu'il existe un unique réel $u_n \in [0,1]$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
2. Montrez que la suite (u_n) converge.
3. Déterminez la limite de la suite (u_n).

Exercice : 22

($**$) On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction suivante : $f_n(x) = x^3 + 3(n+1)x + 1$

1. Prouver que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n et que $u_n \in]-1,\ 0[$.
2. Prouver que la suite (u_n) ainsi construite est convergente.

5 Extension aux fonctions complexes

Définition 10 : **Limite d'une fonction à valeurs complexes**
Soit un réel $x_0 \in \bar{I}$ et un complexe $a + ib \in \mathbb{C}$.

On dit que $\boxed{f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} a + ib}$ si et seulement si $\boxed{|f(x) - (a + ib)| \xrightarrow[x \to x_0]{} 0}$.

Remarque 19.

1. Cette définition ne pose pas de problème car la fonction $x \mapsto |f(x) - (a + ib)|$ est à valeurs réelles.
2. On ne définit plus la notion de limite infinie

Proposition 22 : **Caractérisation de la limite.**
Soit $f \in \mathcal{F}(I,\ \mathbb{C})$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha + i\beta \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \mathrm{Re}(f)(x) = \alpha \\ \lim\limits_{x \to a} \mathrm{Im}(f)(x) = \beta \end{cases}$$

Preuve 22 : Equivalences simples

`Exemple 19.` $(*)$ La fonction définie par $f(x) = e^{ix}$ a pour limite 1 lorsque $x \to 0$ mais n'admet pas de limite en l'∞.

Remarque 20. Comme pour les fonctions réelles :

1. si elle existe, la limite d'une fonction complexe est unique.
2. on a les propriétés usuelles concernant les opérations sur les limites.

Définition 11 : **Continuité.**
Soit $f \in \mathbb{C}^I$ et $a \in I$.

1. On dit que f est continue au point a lorsque $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
2. On dit que f est continue sur I lorsque f est continue en tout point de I.

Remarque 21. On retrouve les propriétés usuelles des fonctions réelles continues. Ainsi :

1. une fonction continue en un point x_0 est bornée au voisinage de ce point.
2. L'ensemble des fonctions continues sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$ forme une $\mathbb{C}$-algèbre commutative et unitaire.
3. On a $f \circ g$ continue sur I lorsque $g \in \mathcal{C}^0(I,\ J \subset \mathbb{R})$ et $f \in \mathcal{C}^0(J,\ \mathbb{C})$.

Remarque 22.
Les images de deux valeurs par une fonction complexe ne pouvant être comparées, le TVI ne s'applique plus.

Proposition 23 : **Caractérisation de la continuité.**

$$f \text{ est continue en } x_0 \text{ (resp. sur } I) \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f) \\ \mathrm{Im}(f) \end{cases} \text{ sont continues en } x_0 \text{ (resp. sur } I).$$

Preuve 23 : Immédiat d'après la proposition 8 !!

`Exemple 20.` $(*)$ La fonction définie par $f(x) = e^{ix}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice : 23

$(*)$ Soit $f\ : [a,\ b[\mapsto \mathbb{C}$ une fonction continue telle que $f(a) = 0$, $|f(x)| \xrightarrow[x\to b^-]{} +\infty$.
Montrer qu'il existe $t \in [a,\ b[$ tel que $|f(t)| = 1$.

PROPOSITION 24 : Toute fonction complexe f continue sur un segment $[a,\ b]$ est bornée sur ce segment.

Preuve 24 : On montre facilement que la fonction $|f|$ est continue sur $[a,\ b]$ et on applique le théorème bien connu dans le cas des fonctions réelles.

	F° réelles	F° complexes
Notion de limite	X	X
Unicité de la limite	X	X
Théorèmes généraux sur la limite d'une combinaison linéaire / produit / rapport	X	X
Théorème de majoration	X	X
Caractérisation séquentielle de la limite	X	X
Notion de continuité en un point	X	X
Théorèmes généraux sur la continuité d'une combinaison linéaire / produit / rapport	X	X
Continuité de $f \circ g$ en un point où g est une fonction réelle	X	X
Passage à la limite dans une égalité	X	X
Passage à la limite dans une inégalité	X	O
Théorème de la limite monotone	X	O
Théorème des gendarmes	X	O

Comparaisons : Fonctions Réelles - Fonctions complexes
Définitions et propriétés locales

	F° réelles	F° complexes
Notion de continuité sur un intervalle	X	X
Théorèmes généraux sur la continuité d'une combinaison linéaire / produit / rapport	X	X
Continuité de $f \circ g$ sur un intervalle où g est une fonction réelle	X	X
Théorèmes des Valeurs intermédiaires	X	O
Théorème de Weirstrass (Image continue d'un segment)	X	+ ou -
Théorème de la bijection	X	O

Comparaisons : Fonctions Réelles - Fonctions complexes
Définitions et propriétés globales

6 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Réponses attendues
1.	Rappeler une caractérisation simple de la proposition "f est bornée sur I"	cf cours
2.	Traduire avec les quatificateurs : "il existe un vois. de 1 sur lequel f est bornée"	$\exists M > 0, \exists \delta > 0,$ $\forall x \in]1-\delta,\ 1+\delta[,\ \lvert f(x)\rvert \leq M$
3.	Connaissez-vous les notions d'*adhérence* et d'*intérieur* d'une partie de $\mathbb{R}$?	cf cours
4.	Dans quelles situations la notion de "prolongement par continuité" en b n'a pas de sens ?	Lorsque f est définie en b Lorsqu'on s'intéresse à f'
6.	Quelle est la définition de la limite en un point de $\bar{\mathbb{R}}$? Savez-vous traduire cette définition à l'aide des quatificateurs selon les cas ?	cf cours
7.	Comment traduire la continuité d'une fonction en $a \in \bar{\mathbb{R}}$ avec les quantificateurs ?	cf cours
8.	Existe-t-il une implication entre : "f est continue en a" et "f est définie en a" ?	cf cours
9.	Pourquoi dit-on que les notions de *limite* et de *continuité* sont "locales" ?	cf cours
10.	Que dit la *caractérisation séquentielle de la limite en un point* ? Comment se traduit-elle dans le cas de la continuité ?	cf cours
11.	Dans quel cas peut-on affirmer que si $u_n \to a$ alors $f(u_n) \to f(a)$?	Si f est continue en a
12.	Dans quel cas peut-on affirmer que si (u_n) vérifie la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ alors sa limite potentielle vérifie $l = f(l)$?	Si f est continue en l
13.	Pourquoi est-il intéressant de savoir si une fonction est monotone pour étudier sa limite en un point ?	cf cours
14.	Citer les théorèmes de passage à la limite dans une égalité ou une inégalité. Que deviennent les inégalités larges par passage à la limite ?	cf cours
15.	Quel piège doit-on éviter lorsqu'on utilise le théorème des gendarmes ?	cf cours
16.	Combien y-a-t-il de méthodes possibles pour étudier la limite en un point ? Les citer !	7 méthodes !

17.	Comment étudier la continuité d'une fonction sur un intervalle ?	Théorèmes généraux si possible Etude de limites sinon
18.	Rappeler les termes du théorème des valeurs intermédiaires. Pourquoi l'hypothèse de continuité est-elle indispensable ?	cf cours
19.	Sauriez-vous prouver que l'image d'un interv. par une f° continue est un interv. ? Comment prouver alors la non continuité d'une f° sur un intervalle ?	cf cours
20.	Une fonction bijective de I dans J est-elle forcément strictement monotone ? Mais si, de plus, cette fonction est continue sur I ?	NON alors OUI !
21.	Que dit le théorème de Weierstrass ? Quelle en est la conséquence principale ?	cf cours
22.	Rappeler le lemme de caractérisation de la continuité sur un intervalle I. Quel résultat du théorème de la bijection ce lemme permet-il de montrer ?	cf cours La continuité de f^{-1}
23.	Que dire du sens de Δ^0 d'une fonction continue et injective sur un intervalle I ?	cf cours
24.	Comment étudier le sens de variation d'une suite définie de façon implicite par $f_n(x_n) = 0$?	On compare $f_n(x_n)$ et $f_n(x_{n+1})$ au lieu de comparer x_n et x_{n+1}

7 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

1) Limite en un point

1. Dans les cas les plus simples, la limite en un point se détermine :
   (a) à l'aide de la limite des fonctions usuelles en ce point
   (b) à l'aide des théorèmes généraux sur les limites
   (c) à l'aide de techniques usuelles lorsqu'il s'agit de lever une forme indéterminer
      i. Mise en facteur du terme dominant
      ii. Multiplication par la quantité conjuguée
      iii. Utilisation des formes indéterminées connues
2. Pour prouver qu'une fonction n'admet pas de limite en un point, on utilise le théorème de caractérisation séquentielle de la limite
3. Lorsque la recherche de la limite pose un problème, on peut envisager d'utiliser le théorème des gendarmes.

Exercice de TD : 1

(♡) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = \cos(\ln x)$.
Montrer que f n'admet pas de limite en $+\infty$.

Exercice de TD : 2

(♡) Etudier la limite en 0^+ et en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \frac{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor + x}{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor - x}$

Exercice de TD : 3

(♡) Montrer que les seules fonctions continues, périodiques dont l'ensemble des périodes est dense dans $\mathbb{R}$, sont les fonctions constantes.

Exercice de TD : 4

(∗∗) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 \text{ si x est un entier premier} \\ f(x) = 0 \text{ sinon} \end{cases}$

1. Prouver que pour tout $x > 1$, on a $f(nx) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$
2. La fonction f a-t-elle une limite en $+\infty$?

Exercice de TD : 5

(♡♡) Soit $a,\ b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$ et $f \in \mathcal{F}(]a,\ b[,\ \mathbb{R})$ croissante.
Montrer que h définie sur $]a,\ b[$ par $h(x) = \lim\limits_{t\to x^+} f(t)$ est bien définie et est croissante.

Exercice de TD : 6

(∗∗) Soient deux applications f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que g soit périodique, $f + g$ croissante et $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l \in \mathbb{R}$.
Montrer que g est constante.

2)Continuité : fonctions originales

1. Une fonction f est continue en $a \in \mathcal{D}_f$ lorsque $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} f(a)$.
   (a) La continuité en un point se montre à l'aide de la définition
   (b) La continuité sur un intervalle se montre à l'aide des théorèmes généraux
2. Pour montrer qu'une fonction est discontinue en un point, on peut :
   (a) montrer qu'elle n'admet pas de limite en ce point
   (b) montrer qu'elle admet une limite infinie à droite ou à gauche
   (c) montrer que se limite à droite est distinctinte de sa limite à gauche

Exercice de TD : 7

(♡) Etudier la continuité des fonctions définies par les expressions suivantes :

1. $f(x) = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor)^2$
2. $g(x) = \frac{x^{\lfloor x \rfloor}}{\lfloor x \rfloor !}$

Exercice de TD : 8

(♡) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 1 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ f(x) = 0 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Démontrer que f n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice de TD : 9

(∗∗) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{x^n}{n!}$.

1. Vérifier la définition de la fonction.
2. Déterminer une expression plus simple de $f(x)$.
3. En déduire la continuité de cette fonction.

Exercice de TD : 10

(♡♡) Soit f la fonction définie sur [0,1] par : $\begin{cases} f(x) = x \text{ si x est rationnel} \\ f(x) = x + \frac{1}{2} - \lfloor x + \frac{1}{2} \rfloor \text{ sinon} \end{cases}$

Montrer que f est bijective de $[0,\ 1]$ sur $[0,\ 1]$ (calculer fof), mais que f n'est continue en aucun point.

Exercice de TD : 11

$(***)$ **Un monstre mathématique !!**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{q} \text{ si } x = \frac{p}{q} \text{ est irréductible et } q > 0 \\ f(x) = 1 \text{ si } x = 0 \\ f(x) = 0 \text{ si x est irrationnel} \end{cases}$

On souhaite démontrer que f est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.

1. Montrer que f est discontinue en tout point rationnel
2. Soit $x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Soit $\varepsilon > 0$ et $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q} < \varepsilon$.
   (a) Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{p}{q!} < x_0 < \frac{p+1}{q!}$
   (b) Montrer que : $\forall x \in]\frac{p}{q!},\ \frac{p+1}{q!}[, \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon$
   (c) En déduire que f est continue en x_0.

3) Applications du théorème de Weierstrass

1. Le théorème de Weierstrass dit que lorsqu'une fonction f est continue sur un segment $[a,\ b]$, alors $f([a,\ b])$ est un semgment $[c,\ d]$. Cela signifie en particulier que f est bornée sur $[a,\ b]$ et que les bornes sont atteintes : c est le minimum de la fonction et d est le maximum. C'est donc un théorème d'existence (existence du minimum et du maximum d'une fonction).
2. On peut envisager d'utiliser la contraposée de ce théorème pour prouver qu'une fonction n'est pas continue sur un segment.

Exercice de TD : 12

(♡)

1. Montrer qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée.
2. Montrer qu'une fonction continue ayant deux asymptotes horizontale en $+\infty$ et $-\infty$ est bornée.

Exercice de TD : 13

$(**)$ Soit f une application continue sur $\mathbb{R}$ telle que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
Montrer que f admet une borne inférieure m et que m est le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice de TD : 14

(♡♡) Soit f une application continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $f(x) \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$.
Montrer que :

$$\sup_{t\in[x,\ 2x]} |f(t)| \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$$

4) TVI

1. On peut envisager d'utiliser le TVI dès lors que la question posée peut se mettre sous la forme : "montrer qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) = c$".
2. La méthode consiste alors à :
   (a) justifier la continuité de la fonction f sur un segment $[a,\ b]$ à choisir
   (b) montrer que c appartient au segment $[f(a),\ f(b)]$.

Exercice de TD : 15

(♡) Soit $f\ :\ [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$, continue sur $[a,\ b]$ et $(p,\ q) \in {\mathbb{R}^+}^2$.
Montrer qu'il existe $c \in [a,\ b]$ tel que $pf(a) + qf(b) = (p+q)f(c)$.

Exercice de TD : 16

(♡) Soit une fonction polynômiale $P : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de degré impair.
Montrer que P s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice de TD : 17

($*$) Soit f une application continue sur un intervalle I non vide.
Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer que si f est à valeurs dans $\mathbb{Z}$ (ou dans $\mathbb{Q}$ ou dans $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$) alors f est constante.
2. Montrer que si f ne prend qu'un nombre fini de valeurs alors f est constante.
3. Montrer que si $|f|$ est constante alors f est constante

Exercice de TD : 18

(♡♡) On cherche les applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et pour tout réel x : $fof(x) = x$.

1. Montrer que f est injective. En déduire que f est strictement croissante.
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = x$.

Exercice de TD : 19

($**$) Soit f une fonction continue sur $[0; 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

1. Montrer qu'il existe un réel $c \in [0,\ \dfrac{1}{2}]$ tel que $f(c) = f(c + \dfrac{1}{2})$.
2. Plus généralement :
   Montrer que pour tout entier naturel $n > 0$, il existe un réel $c_n \in [0,\ \frac{n-1}{n}]$ tel que : $f(c_n + \frac{1}{n}) = f(c_n)$.
   Ruse : On pourra poser $g(x) = f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$ *et s'intéresser à la quantité :* $g(0) + g(\dfrac{1}{n}) + \cdots + g(\frac{n-1}{n})$

Exercice de TD : 20

($**$) Les énoncés suivants sont indépendants :

1. A tout point M d'un cercle $\mathcal{C}$ on fait correspondre une grandeur physique $T(M)$ continue.
   Montrer qu'il existe deux points diamétralement opposés du cercle qui ont la même température.
2. Montrer que sur la terre, il existe deux points antipodaux qui ont la même température.
3. Soit $\mathcal{C}$ une courbe qui entoure le point O telle que toute droite passant par O coupe $\mathcal{C}$ en deux points exactement.
   Montrer qu'il existe une telle droite telle que les intersections avec $\mathcal{C}$ soient à la même distance de O.

5) Théorème de la Bijection

1. On rappelle que $f : I \to J$ est une bijection lorsque tout élément y de J admet un unique antécédent $x \in I$, c'est à dire lorsque pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.
2. Ce théorème est un cas particulier du TVI (on ajoute la stricte monotonie) : en plus de l'existence il permet de conclure à l'unicité de la valeur cherchée.
3. On pourra l'utiliser lorsqu'on veut prouver qu'une équation admet une unique solution.
4. Attention : il ne peut être utilisé que si la fonction étudiée est une fonction réelle (ie à valeurs dans $\mathbb{R}$) de la variable réelle.

Exercice de TD : 21

(♡) Déterminer suivant la valeur de λ le nombre de solutions réelles de l'équation $e^{\lambda x} = x$.

Exercice de TD : 22

(♡) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ est une bijection de $\mathbb{R}^+$ dans un intervalle que l'on déterminera.

6) Image d'un intervalle

On rappelle que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle (cas particulier du théorème de Weierstrass)

Exercice de TD : 23

(♡) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $a,\ b \in \mathbb{R}$.

1. Justifiez par un exemple que les énoncés ci-dessous sont faux :
   (a) Si $I = [a,\ b]$ et f est monotone sur I alors $f(I) = [f(a),\ f(b)]$.
   (b) Si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue sur I.
   (c) Si f est continue sur I et $f(I) = I$ alors il existe $x \in I$ tel que $f(x) = x$
   (d) Si $f([a,\ b]) = [a,\ b]$ alors il existe $x \in [a,\ b]$ tel que $f(x) = x$.

2. Rajouter une condition aux énoncés précédents pour les rendre vrai.

7) Equations fonctionnelles

Il s'agit ici de résoudre des équations dont les solutions sont des fonctions. Les équation différentielles sont en particulier des équations fonctionnelles. On procède systématiquement par Analyse/synthèse. Lorsqu'on recherche des fonctions continues, on peut envisager de rechercher l'expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{Q}$ puis généraliser le résultat obtenu à l'aide de la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice de TD : 24

($\heartsuit$) Dans cet exercice, on admet connu la nature des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

1. (a) Déterminer les applications de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifiant : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2\ f(xy) = f(x) + f(y)$.
   (b) En déduire les applications de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et vérifiant : $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}^{+*})^2\ f(xy) = f(x).f(y)$.

2. Déterminer les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$, continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ f(x+y) = f(x).f(y)$.

Exercice de TD : 25

($**$) Déterminer les fonctions $f\ :\ [0,\ 1] \mapsto \mathbb{R}$ continue en 0 telle que $f(0) = 1$ et vérifiant la propriété :

$$\forall x \in [0,\ 1/2], \quad f(2x) = f(x).\cos x$$

Exercice de TD : 26

($\heartsuit\heartsuit$) Déterminer les fonctions f réelle continue en 1 définie sur $\mathbb{R}^+$ et vérifiant : $\forall x > 0,\ f(x^2) = f(x)$
Aide : pour $x > 0$, utiliser la suite définie par : $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.