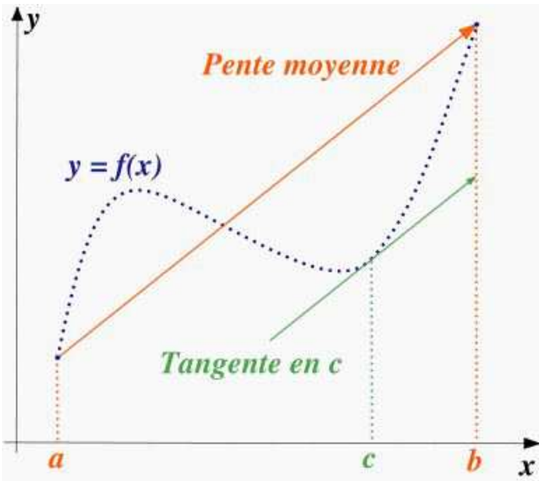
La dérivation

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

10 mai 2017



1 Notion de dérivée en un point

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et f est une application réelle définie sur I.

1.1 Définitions

Définition 1 : **Dérivée d'une fonction**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et un point $x_0 \in I$.

On définit le *taux d'accroissement* de la fonction f au point x_0 :

$$\Delta_{x_0} : \begin{array}{ccc} I \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \end{array}$$

1. On dit que f est *dérivable* en $x_0 \in I$ lorsque : $\lim\limits_{x \to x_0} \Delta_{x_0}(x)$ existe et est finie.
   Cette limite est notée $f'(x_0)$ et est appelé le *nombre dérivé de f en x_0*.

2. On dit que la fonction f est :

   a) *dérivable à droite* en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^+} \Delta_{x_0}(x)$ existe et est finie

   b) *dérivable à gauche* en x_0 lorsque $\lim\limits_{x \to x_0^-} \Delta_{x_0}(x)$ existe et est finie

   On note alors $f'_d(x_0)$ (*dérivée à droite*) et $f'_g(x_0)$ (*dérivée à gauche*) ces deux limites.

Remarque 1. Lorsque $I = [a,\ b[$, les notions de dérivée en a et de dérivée à droite en a coïncident.

`Exemple 1.` $(*)$ Prouver que la fonction cos est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et déterminer son nombre dérivée en x_0.

1.2 Caractérisations de la dérivabilité en un point

Proposition 1 : **Caractérisation de la dérivabilité**
Lorsque f est définie sur un voisinage de x_0, on a la caractérisation suivante :

$$f \text{ dérivable en } x_0 \quad \text{ssi} \quad \begin{cases} f \text{ dérivable à gauche et à droite en } x_0 \\ f'_g(x_0) = f'_d(x_0) \end{cases}.$$

Preuve 1 : Pas de difficulté !

`Exemple 2.` $(*)$ Etudier la dérivabilité en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Définition 2 : Avec le changement de variable $h = x - x_0$, on a aussi la définition suivante :
On dit que la fonction f est dérivable au point $x_0 \in I$ lorsque :

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad \text{admet une limite finie lorsque} \quad h \mapsto 0 \text{ et } h \neq 0$$

Remarque 2. En physique, la dérivée d'une fonction f de variable x en x_0 est notée $\frac{df}{dx}(x_0)$.
Cette notation indique que la dérivée de f en x_0 correspond au rapport de la variation infinitésimal de f (notée $\mathrm{d}f$) et d'une variation infinitésimale de x (notée $\mathrm{d}x$) autour de x_0.

`Exemple 3.` $(*)$

1. Prouver que la fonction $f : x \mapsto \sin x$ est dérivable en tout $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f'(x_0) = \cos x_0$.
2. Prouver que la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en $x = 0$.
3. Prouver que la fonction $f : x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

Définition 3 : **La notation de Landau**
Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ et u une fonction définie au voisinage de x_0.
Soit f définie au voisinage de x_0.

$$\text{Lorsque} \quad \frac{f(x)}{u(x)} \xrightarrow[x \to x_0]{} 0, \quad \text{on notera} \quad f(x) = o(u(x)).$$

Remarque 3.

1. $o(u(x))$ représente une fonction telle que son rapport avec $u(x)$ tend vers 0 en x_0.
2. $o(1)$ représente une fonction qui tend vers 0 en x_0.
3. On peut remarquer que $(x - x_0) \times o(1)$ et $o(x - x_0)$ signifient la même chose.

Théorème 2 : **Caractérisation de la dérivabilité à l'aide d'un DL à l'ordre 1**

Soit f une fonction définie sur un voisinage de $x_0 \in I$ (x_0 compris).
On a :

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff \exists a,\ b \in \mathbb{R} \text{ tel que } \quad f(x) = a + b(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{au } \mathcal{V}(x_0)$$

On a alors $\boxed{a = f(x_0) \quad \text{et} \quad b = f'(x_0)}$.

Cette expression est appelée : *développement limité* de f en x_0 à l'ordre 1 : $\mathrm{DL}(x_0,\ 1)$.

Preuve 2 : Pas de difficulté.

Remarque 4.

1. Le DL(x_0, 1) s'écrit : $f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + R(x)$ avec $\begin{cases} R(x) = o(x - x_0) \\ R(x) = (x - x_0)\varepsilon(x - x_0) \text{ et } \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \end{cases}$

2. (a) La droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ est la tangente à la courbe $y = f(x)$ au point x_0.

   (b) La fonction $R(x) = f(x) - y(x)$ représente la distance algébrique entre le point $\big(x,\ f(x)\big)$ de la courbe représentative de f et le point correspondant $\big(x, g(x)\big)$ de sa tangente.

   (c) La propriété $R(x) = o(x - x_0)$ dit qu'en x_0, cette distance tend vers 0 plus vite qu'une fonction linéaire.

Dessin

Interprétation géométrique du DL(x_0, 1)

Remarque 5. En posant $h = x - x_0$, le DL(x_0, 1) de f peut également s'écrire :

$$\forall h \in \mathbb{R},\ \text{tq } x_0 + h \in I \ : \quad f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \begin{cases} h\varepsilon(h) & \text{avec} \quad \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \\ o(h) \end{cases}$$

⚠ Attention ⚠

L'existence pour une fonction f définie sur I d'un DL(x0,1) au voisinage de x0 privé de x0 ne permet pas d'affirmer que la fonction f est continue et dérivable en x0.
En revanche, cela signifie que l'on peut prolonger cette fonction en une fonction dérivable en x0.

COROLLAIRE 3 : **Dérivable implique continue**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. Alors

$$(f \text{ dérivable au point } x_0) \Rightarrow (f \text{ continue au point } x_0)$$

Preuve 3 : Conséquence immédiate du théorème précédent.

Remarque 6. La réciproque est bien entendu fausse (C/ex : $f(x) = |x|$)

2 Dérivabilité sur un intervalle

DÉFINITION 4 : **Dérivabilité sur un intervalle**
On dit qu'une fonction f est dérivable sur un intervalle I ouvert ssi elle est dérivable en tout point $x_0 \in I$.

On définit alors la fonction dérivée : $\begin{array}{cccc} f' : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$

Remarque 7. Un monstre mathématique : la fonction de Bolzano !

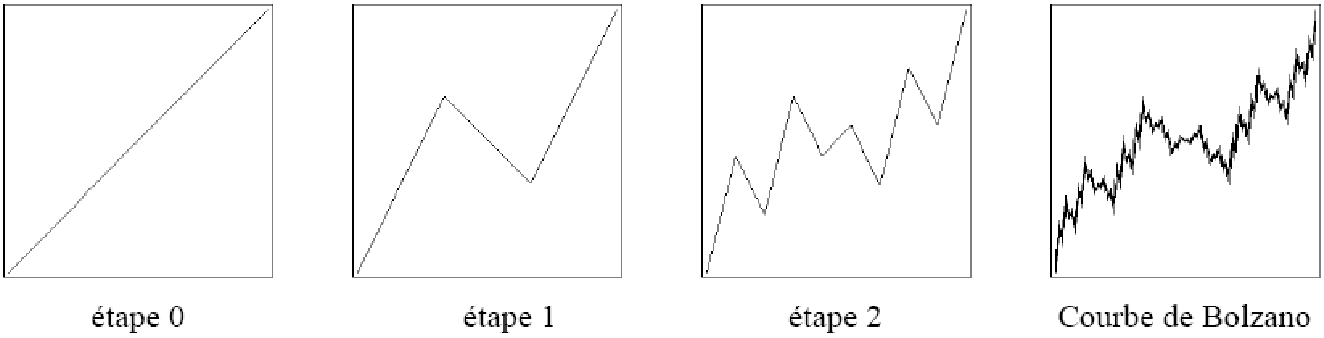


FIGURE 1 – Une fonction continue en tout point de $[0,\ 1]$ mais dérivable nulle part

THÉORÈME 4 : **Règles de calcul de dérivées**
Si u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, on a :

- La fonction $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(\lambda.u)$ est dérivable sur I et $(\lambda.u)' = \lambda \times u'$
- La fonction uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'.v + u.v'$
- Si v ne s'annule pas sur I, $\frac{1}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{1}{v})' = -\frac{v'}{v^2}$
- Si v ne s'annule pas sur I, $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
- Pour un entier $\boxed{n \in \mathbb{Z}}$, u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

Preuve 4 : On considère un x_0 quelconque, appartenant à I et on démontre en utilisant la définition et les $DL(x_0, 1)$ que ces différentes fonctions sont bien dérivables en x_0 et que leurs dérivées s'expriment sous la forme indiquée.

Exercice : 1
$(*)$ Soient $f_1,\ f_2,\ \dots,\ f_n$, n fonctions dérivables sur I.
Prouver que $f_1 f_2 \dots f_n$ est dérivable sur I et déterminer l'expression de sa dérivée.

THÉORÈME 5 : **Dérivation des fonctions composées**

Soient deux fonctions $\left\{\begin{array}{l} f\ :\ I \mapsto \mathbb{R} \\ g\ :\ J \mapsto \mathbb{R} \end{array}\right.$ telles que $\left\{\begin{array}{l} I \\ J \end{array}\right.$ sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f(I) \subset J$.

On suppose que : $\left\{\begin{array}{l} \text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } I \\ \text{la fonction } g \text{ est dérivable sur } f(I) \end{array}\right.$ alors,

$$\boxed{\text{la fonction } g \circ f \text{ est dérivable sur } I \quad \text{avec} \quad (g \circ f)' = \left[g'of\right] \times f'}$$

Preuve 5 : Soit $x_0 \in I$.
On écrit $g(y) = g(f(x_0)) + (y - f(x_0))g'(f(x_0)) + (y - f(x_0))\varepsilon(y)$ le $DL_1(f(x_0))$ de g, puis on remplace y par $f(x)$, on divise par $(x - x_0)$ et on fait tendre x vers x_0.

`Exemple 4.` $(*)$ Démontrer que la dérivée d'une fonction paire dérivable est impaire, que la dérivée d'une fonction impaire dérivable est paire et que la dérivée d'une fonction périodique est périodique de même période.

COROLLAIRE 6 :
Si : $f(x) = f_1 \circ \dots \circ f_n(x)$ alors $f'(x) = [f_1' \circ f_2 \circ \dots \circ f_n(x)] \times [f_2' \circ f_3 \circ \dots \circ f_n(x)] \times \dots \times f_n'(x)$

Preuve 6 : Il s'agit d'une simple récurrence ...

`Exemple 5.` $(*)$ Dériver la fonction définie par $f(x) = \sin\left[\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right]$.

Remarque 8. La plupart du temps, on calcule des dérivées afin d'étudier leur signe. Comme la dérivation en chaîne donne un produit de fonctions, il suffit alors de déterminer le signe de chacun des facteurs.

Exercice : 2

($*$) Calculer les dérivées des fonctions suivantes après avoir déterminer proprement leur ensemble de dérivabilité :

1. $f(x) = e^{\sqrt{x}}$
2. $f(x) = \cos^2(3x-1)$
3. $f(x) = \ln \frac{1-e^x}{1+e^x}$
4. $f(x) = \tan \frac{1}{x}$
5. $f(x) = x^x$
6. $f(x) = \sqrt{\frac{e^x}{1+e^x}}$
7. $f(x) = \sqrt{x^5+5x}$
8. $f(x) = \exp(\frac{x}{x^2-1})$
9. $f(x) = \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}$

THÉORÈME 7 : **Dérivation de la fonction réciproque**

Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ avec I un intervalle.

On suppose que : $\begin{cases} f \text{ est une bijection de } I \text{ dans } J = f(I) \\ f \text{ est dérivable en tout point de } I \\ f'(x) \neq 0 \text{ pour tout } x \in I \end{cases}$

La fonction f^{-1} est alors définie et dérivable sur $f(I)$ avec $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' o f^{-1}}$

Preuve 7 : La formulation du problème se fait simplement.

1. On commence par remarquer que $f(I)$ est un intervalle.
2. Pour prouver que f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0) \in f(I)$, la principale difficulté consiste alors à montrer que $x \xrightarrow[y \to y_0]{} x_0$ où $x = f^{-1}(y)$. On peut, pour cela, prouver que f^{-1} est continue en y_0 en utilisant le théorème de la bijection vu dans le cours sur la continuité. On aura besoin pour cela de prouver que la fonction f est strictement monotone à l'aide du TVI.

`Exemple 6.` ($*$) Démontrer que les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur fonction dérivée :

1. $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
2. $g : x \mapsto e^x$.
3. arcsin
4. argth (th^{-1})

Exercice : 3

($*$) Soit $f : [0; \frac{\pi}{2}] \mapsto \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sqrt{\sin x} + x$.
Justifier que f réalise une bijection vers un intervalle à préciser, puis que f^{-1} est continue et dérivable sur cet intervalle.

3 Application à la recherche de racine : la méthode de Newton

Pour déterminer numériquement la solution d'une équation de la forme $f(x) = 0$ nous avons vu la méthode par *dichotomie*.
Lorsque la fonction f est dérivable et convexe (ou concave) sur un intervalle $[a,\ b]$ tel que $f(a)f(b) < 0$, alors nous pouvons utiliser une méthode plus performante appelée la *méthode de Newton*.

La méthode de Newton

Pour l'étude, on considère une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\ b]$ telle que : $\begin{cases} f(a)f(b) < 0 \\ f \text{ strictement croissante et convexe sur } [a,\ b] \end{cases}$.

On considère alors la suite (x_n) définie par :

$$(x_n) \begin{cases} x_0 = b \\ x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \end{cases}$$

1. Montrer que f s'annule en une seule valeur c de $]a,\ b[$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $x_n \geq c$.
3. Montrer que la suite (x_n) converge vers c

Remarque 9. Une étude théorique plus poussée montrerait que conformément au bon sens, cette suite converge plus rapidement vers c que les suites obtenues par la méthode de dichotomie.

4 Les théorèmes portant sur les fonctions dérivables

4.1 Nullité de la dérivée en un extremum local intérieur

Théorème 8 : **La dérivée s'annule en un extremum local intérieur**
Soit une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, et un point $a \in I$.

On suppose que $\begin{cases} a \text{ est un point } \textit{intérieur} \text{ à } I \\ f \text{ admet un extremum local en } a \\ f \text{ est dérivable au point } a \end{cases}$, alors $f'(a) = 0$.

Preuve 8 : On procède par l'absurde en montrant que si $f'(a) \neq 0$ alors $f(a)$ n'est pas un extrémum local.

Remarque 10.

1. Si l'on sait que f présente un extremum en un point intérieur à I et si f est dérivable sur I alors on cherchera ce point parmi les solutions de $f'(x) = 0$.
2. $f'(a) = 0$ n'est pas une condition suffisante pour que f admette un extremum local en a (penser à $f(x) = x^3$).
3. Les solutions de l'équation $f'(x) = 0$ sont appelés les *points critiques* de la fonction f.

`Exemple 7.` (∗∗) Soit la fonction f définie par : $f(x) = 2x^4 - x + 3$.
Déterminer le minimum de f après avoir justifié son existence.

Exercice : 4
(∗∗) Soit f une fonction réelle dérivable sur $[0,\ 1]$ telle que $f(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$.
Montrer qu'il existe $c \in]0; 1[$ tel que $f'(c) = 0$.

4.2 Théorème de Rolle

Théorème Fondamental 9 : **Théorème de Rolle** [a]
Soit une fonction $f\ :\ [a, b] \mapsto \mathbb{R}$.

On suppose que : $\begin{cases} f \text{ est continue sur le segment } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur l'intervalle ouvert }]a, b[\\ f(a) = f(b) \end{cases}$ alors $\exists x_0 \in]a, b[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

a. Michel Rolle, $1652 - 1719$, mathématicien français à l'origine de la notation $\sqrt[n]{x}$.

Le théorème de Rolle

Preuve 9 : Comme f est continue sur $[a;b]$ alors $f([a;b]) = [c;d]$ où c et d sont les extrema de f sur $[a;b]$.
Si c est atteint en un point intérieur à I alors il suffit d'appliquer le théorème 8 et c'est fini. Sinon, on démontre facilement que d est atteint en un point intérieur à I et on applique de nouveau le théorème 8.

Remarque 11. Donner un contre-exemple prouvant que la continuité en a et b est indispensable !

Exercice : 5

($**$) On considère la fonction polynômiale $P(x) = x^n + ax + b$ avec $n \geq 2$ et $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.
Montrer que la fonction P possède au plus trois racines réelles distinctes.

Exercice : 6

($**$) Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ dérivable telle que $f'(a) < 0$ et $f'(b) > 0$.
Montrer que, même si f' n'est pas continue, il existe un point $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Remarque 12. Le résultat de l'exercice précédent est connu sous le nom de : théorème de Darboux qui dit que :
Si une fonction est dérivable, alors on peut appliquer le TVI à la fonction dérivée f' même si celle-ci n'est pas continue.
Gaston Darboux, $(1842 - 1917)$ est français et a démontré de nombreux théorèmes en géométrie différentielle. Il a aussi construit une intégrale qui porte son nom.

Exercice : 7

Généralisation du théorème de Rolle

($*$) Démontrer que :

Si une fonction $f\ :\ [a,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ vérifie : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a,+\infty[\\ f \text{ est dérivable sur }]a,+\infty[\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(a) \end{cases}$, alors $\exists c \in]a,+\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

Généralisation du théorème de Rolle :

4.3 Théorèmes des Accroissements Finis

THÉORÈME 10 : **Théorème des accroissements finis**
Soit une fonction $f\ :\ [a,b] \mapsto \mathbb{R}$.

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur le segment } [a,b] \\ f \text{ est dérivable sur l'intervalle ouvert }]a,b[\end{cases}$ alors $\exists c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

Théorème des accroissements finis

Preuve 10 : L'idée consiste à appliquer le théorème de Rolle à la fonction g obtenue en soustrayant la droite passant par les extrémités de la courbe à la fonction f.

Remarque 13. On rencontre parfois une autre formulation du TAF : Soit $f : [a,\ a+h] \mapsto \mathbb{R}$.
Si f est continue sur $[a,\ a+h]$ et dérivable sur $]a,\ a+h[$, alors $\exists \theta \in]0,\ 1[$ tel que $f(a+h) - f(a) = h.f'(a+\theta h)$.

Application du TAF :

On pourra envisager d'appliquer le TAF lorsqu'on a besoin de transformer une expression de la forme $f(b)-f(a)$.
Comme le montre les exemples suivants, le TAF peut en particulier nous permettre :

1. De lever une indétermination dans un calcul de limite
2. De prouver des encadrements
3. De déterminer des équivalents

`Exemple 8.` **Application à la recherche de limites**
$(*)$ Etudier la limite en 1 de la fonction définie par $f(x) = \frac{\sin x - \sin \frac{1}{x}}{e^x - e^{\frac{1}{x}}}$

`Exemple 9.` **Application à la recherche d'inégalités**
$(*)$ Prouver que pour tout $x > 0$, on a l'inégalité : $\frac{1}{1+x} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \frac{1}{x}$

`Exemple 10.` **Application à la recherche d'équivalents**
$(*)$ Soit $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$.
Déterminer un équivalent de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha}$.

Exercice : 8
$(**)$ Soit f une fonction continue et ne s'annulant pas sur $[a,\ b]$ et dérivable sur $]a,\ b[$.
En appliquant le théorème des accroissements finis à une fonction bien choisie, montrer que :

$$\text{il existe } c \in]a;b[\quad \text{tel que} \quad f(b) = f(a) \exp\big((b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}\big)$$

Corollaire 11 : **Inégalité 1 des accroissements finis**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ définie sur $[a,b]$ (avec $\boxed{a < b}$) et un réel $M \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Si}} : \begin{cases} \text{la fonction } f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \text{la fonction } f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ \forall x \in]a,b[,\ m \leq f'(x) \leq M \end{cases}, \quad \boxed{\text{alors}} \quad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

Preuve 11 : Pas de difficulté : c'est une conséquence immédiate du TAF.

`Exemple 11.` $(*)$ Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$, on a : $e^x - 1 \leq xe^x$.

Corollaire 12 : **Inégalité 2 des accroissements finis**
Soit une fonction $f : [a,b] \mapsto \mathbb{R}$ définie sur un segment et un réel $M \in \mathbb{R}$.

$$\boxed{\text{Si}} : \begin{cases} \text{la fonction } f \text{ est continue sur } [a,b] \\ \text{la fonction } f \text{ est dérivable sur }]a,b[\\ \forall x \in]a,b[,\ |f'(x)| \leq M \end{cases}, \quad \boxed{\text{alors}} \quad |f(b) - f(a)| \leq M|b-a|.$$

Preuve 12 : Pas de difficulté : c'est une conséquence immédiate du théorème précédent.

`Exemple 12.` Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|\sin x| \leq |x|$ et $|\operatorname{sh} x| \geq |x|$.

Le TAF permet SOUVENT d'étudier la convergence d'une suite récurrence d'ordre 1.
Voir l'exercice suivant et un exercice de la feuille de TD.

`Exemple 13.` $(**)$ Soit (u_n) la suite définie par $u_0 > 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{1}{u_n})$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n > 1$

2. Montrer que pour $x > 1$, on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$
3. En déduire que sa limite éventuelle L vérifie $|u_n - L| \leq \frac{1}{2^n}|u_0 - L|$.
4. En déduire la convergence de (u_n).

Exercice : 9

$(**)$ Soient f et g des fonctions continues sur un segment $[a, b]$ et dérivables sur $]a; b[$.
En appliquant le théorème de Rolle à une fonction bien choisie, montrer que :

$$\text{il existe } c \in]a; b[\quad \text{tel que} \quad (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Un exercice de TD montre que ce résultat permet dans certains cas de lever la forme indéterminée $\frac{0}{0}$

4.4 Fonctions Lipschitziennes

Définition 5 : **Fonctions lipschitziennes**
Une fonction $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ est lipschitzienne sur l'intervalle I ssi

$$\boxed{\exists k > 0 \quad \text{tel que} \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad \big|f(x) - f(y)\big| \leq k|x - y|}$$

Dans ce cas, on dit que la fonction f est k-lipschitzienne sur I.

Fonctions k-lipschitziennes

`Exemple 14.` $(*)$ Exemples de fonctions lipschitziennes :

1. Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la fonction $x \mapsto ax + b$ est a-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. $(a, \ b \in \mathbb{R})$

`Exemple 15.` **Fonctions non lipschitziennes :**

1. Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x^2$ ne sont pas lipschitziennes sur leur ensemble de définition.
2. Une fonction qui admet une tangente (ou une asymptote) verticale sur I n'est pas lipschitzienne sur I.

Proposition 13 : **Opérations sur les fonctions lipschitziennes :**

1. Combinaison linéaire de fonctions lipschitziennes :
   Si f et g sont lipschitziennes sur $I \subset \mathbb{R}$ et $\lambda, \ \mu \in \mathbb{R}$ alors $\lambda.g + \mu.f$ est lipschtizienne sur I.

2. Composée de fonctions lipschitziennes :
   Si f et g sont lipschitziennes respectivement sur $I \subset \mathbb{R}$ et $f(I)$, alors $g \circ f$ est lipschitizienne sur I.

3. Concaténation de segments :
   si f est k-lipschitzienne sur $[a, b]$ et $[b, c]$ alors f est k-lipschitzienne sur $[a, c]$.

⚠ Le produit de deux fonctions lipschitziennes n'est pas forcément lipschitzien... Considérer $f(x) = x^2$.

Preuve 13 : On montre facilement que si $\begin{cases} f \text{ est } k_1\text{-lipschitzienne sur } \mathbb{R} \\ g \text{ est } k_2\text{-lipschitzienne sur } \mathbb{R} \end{cases}$ alors :

1. $f + g$ est $\max(k_1,\ k_2)$ lipschitzienne.
2. fog est $k_1.k_2$-lipschitzienne sur I.
3. f est $\max(k_1,\ k_2)$ lipschitzienne sur $[a,\ c]$

`Exemple 16.` $(*)$ Montrer que si une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et périodique de période T est k lipschitzienne sur $[0,\ T]$, alors elle est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Exercice : 10

$(*)$ Soit une fonction f lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrez qu'il existe $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq a|x| + b$.

Proposition 14 : **Une fonction à dérivée bornée est lipschitzienne**
Soit f une fonction $\boxed{\text{dérivable}}$ sur un intervalle I et un réel $k \geq 0$. Alors :

$$\boxed{\forall x \in I,\ |f'(x)| \leq k \iff f \text{ est } k\text{\_lipschitzienne sur } I}$$

Preuve 14 : Aucune difficulté !

Remarque 14. On en déduit que :

1. Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$ est lipschitzienne.
2. ⚠ le théorème précédent ne dit pas qu'une fonction lipschitzienne est dérivable ! (cf $x \mapsto |x|$)

`Exemple 17.`

1. Prouver que les fonctions sin et arctan sont lipschitziennes de rapport 1 sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^{+*}$.

4.5 Sens de Variation

Théorème 15 : **Caractérisation des fonctions constantes, monotones**

$\boxed{\text{On suppose que :}}$ $\begin{cases} f \text{ est une fonction continue sur le segment } [a, b] \\ f \text{ est dérivable sur l'intervalle ouvert }]a, b[\end{cases}$

On a alors les résultats suivants :

1) $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante sur$[a, b]$.
2) $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[a, b]$.
3) $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) = 0 \iff f$ est constante sur le segment $[a, b]$.

Preuve 15 :

1. La CS est facile à démontrer.
   Pour la CN, on commence par considèrer $x_1 < x_2$ deux éléments de $]a; b[$. On applique alors l'égalité de AF sur $[x_1; x_2]$.
2. Par l'absurde : S'il existe x_1 et x_2 dans $[a; b]$ tels que $f(x_1) = f(x_2)$, alors en utilisant Rolle, on montre que f' s'annule sur $]x_1; x_2[$.
3. Dire que $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) = 0$ revient à dire que $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \leq 0$ et que $\forall x \in]a, b[,\ f'(x) \geq 0$ ...

Remarque 15.

1. On a bien entendu des résultats équivalents lorsque la dérivée est négative sur $]a; b[$ ...
2. Ces résultats s'étendent à un intervalle I quelconque : si une fonction $f\ :\ I \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable sur l'intérieur de l'intervalle I, et si pour tout point x intérieur à I, $f'(x) > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur I. On a les mêmes caractérisations pour les fonctions décroissantes.
3. La réciproque de (2) est fausse : si $f(x) = x^3$, alors la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, mais sa dérivée s'annule en 0.
   En fait, dès lors que la dérivée est de signe constant et ne s'annule qu'en des points isolés, f est strictement monotone.

4. Il est important dans ce théorème que I soit un *intervalle*. Si $I = [0,1] \cup [2,3]$, et si $f = 1$ sur $[0,1]$, $f = 0$ sur $[2,3]$, on a bien $f' = 0$ et pourtant la fonction f n'est pas constante sur l'ensemble I.

`Exemple 18.` $(*)$ Prouver que la fonction f telle que $f(x) = x + \sin x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
En déduire les solutions de l'équation $x + \sin x = 0$.

Exercice : 11

$(**)$ Soit $M > 0$ et g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g'(x)| \leq M$.
Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + a.g(x)$.
Prouver qu'en choisissant a correctement, la fonction f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 16 : **Recherche d'un extrémum local**
Soit $x_0 \in \overset{\circ}{I}$.

Si $\begin{cases} \text{f est dérivable sur un voisinage de } x_0 \\ f'(x_0) = 0 \text{ et } f' \text{ change de signe en } x_0 \text{ sur ce voisinage} \end{cases}$, alors f admet un extremum local en x_0.

Preuve 16 : Evident en utilisant le théorème précédent ...

`Contre-Exemple 1.` $(*)$ En étudiant au voisinage de 0 la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2(1 + \sin \frac{1}{x^2}) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$, montrer que la réciproque du théorème précédent est fausse.

4.6 Limite de la dérivée

Théorème 17 : **Théorème de la limite de la dérivée**
Soit $l \in \bar{\mathbb{R}}$ et $a \in I$ un intervalle de $\mathbb{R}$.
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant : $\begin{cases} \text{la fonction } f \text{ est continue sur } I \quad \text{et donc en particulier en } a! \\ \text{la fonction } f \text{ est dérivable sur } I \backslash \{a\} \end{cases}$

$$\text{Si} \quad f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \quad \text{alors} \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow[x \to a]{} l$$

1. Si $l \in \mathbb{R}$ alors la fonction f est dérivable en a et $f'(a) = l$.
   De plus, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ en a.
2. Si $l = \infty$ alors la fonction f n'est pas dérivable à droite au point a.

Limite de la dérivée

Preuve 17 : Pas de difficulté : il suffit d'appliquer le TAF sur un intervalle $[a; x]$ et de faire tendre x vers a.

`Contre-Exemple 2.` $(*)$ En étudiant la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ au voisinage de 0, montrer que la réciproque du théorème précédent est fausse !!

`Exemple 19.` $(*)$ Montrer que le prolongement en 0 de la fonction f définie par $f(x) = x^2 \ln x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice : 12

$(*)$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x}$.
Comparez les deux méthodes d'étude de la dérivabilité de f en 0.

5 Dérivées successives

5.1 Définitions

DÉFINITION 6 : **Dérivées successives**
Lorsqu'elle existe, on définit la fonction f'' par $(f')'$, et par récurrence : $\begin{cases} & f^{(0)} = f \\ \forall k \in \mathbb{N}, & f^{(k+1)} = (f^{(k)})' \quad (= (f')^{(k)}) \end{cases}$
On notera $\mathcal{D}^k(I)$ l'ensemble des fonctions k fois dérivables sur l'intervalle I.

Remarque 16.

1. Assurez-vous toujours de l'existence de la fonction $f^{(k)}$ avant de calculer cette fonction.
2. En science physique, la dérivée k-ème d'une fonction est notée : $\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}$.
   Cette notation présente l'avantage d'expliciter la variable par rapport à laquelle on dérive la fonction !

`Exemple 20.` $(*)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer les dérivées n-èmes des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sin x$.
2. $f(x) = \frac{1}{x+a}$ où $a \in \mathbb{R}$.
3. $f(x) = \ln x$

On admettra qu'elles sont infiniment dérivables sur leur intervalle de définition.

Exercice : 13
Prouver que la fonction tan est dérivable à tout ordre sur son domaine de définition.

DÉFINITION 7 : **Fonctions de classe $\mathcal{C}^k$**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ définie sur sur l'intervalle I.

$$f \text{ est de classe } \mathcal{C}^k \text{ sur l'intervalle } I \text{ ssi } \begin{cases} \text{elle est } k\text{-fois dérivable sur l'intervalle } I \\ \text{La fonction } f^{(k)} \text{ est continue sur l'intervalle } I \end{cases}$$

On note $\mathcal{C}^k(I)$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur l'intervalle I.
On note $\mathcal{C}^\infty(I)$ l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur l'intervalle I.

Pour montrer qu'une fonction f est $\mathcal{C}^\infty(I)$, on montrera qu'elle est $\mathcal{C}^n(I)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

`Exemple 21.` Les résultats suivants pourront-être utilisés dans les exercices :
- La fonction exp, les fonctions polynomiales, les fonctions cos, sin, arctan, ch, sh et th sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles, tan, ln sont $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition.
- Les fonctions arccos et arcsin sont $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,\ 1[$.

Remarque 17.
S'intéresser à la *régularité* d'une fonction, c'est se demander jusqu'à quelle valeur de k, la fonction est $\mathcal{C}^k(I)$.

`Exemple 22.` $(*)$ Etudier la régularité en 0 des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto x.\sin(\frac{1}{x})$
2. $f : x \mapsto x^2.\sin(\frac{1}{x})$
3. $f : x \mapsto x^3.\sin(\frac{1}{x})$

Remarque 18. la continuité en un point est une notion de régularité plus faible que la dérivabilité en un point, qui est elle-même plus faible que de dire que la fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle contenant ce point. Ainsi :

$$\boxed{\mathcal{C}^\infty(I) \cdots \subset \mathcal{D}^3(I) \subset \mathcal{C}^2(I) \subset \mathcal{D}^2(I) \subset \mathcal{C}^1(I) \subset \mathcal{D}^1(I) \subset \mathcal{C}^0(I)}$$

5.2 Théorèmes généraux pour une étude GLOBALE

Remarque 19. Dans les théorèmes suivants, on pourra remplacer $\mathcal{C}^n$ par $\mathcal{C}^\infty$.

PROPOSITION 18 : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
Si f et g sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n(I)$, alors $f+g$ et $\lambda.f$ sont de classe $\mathcal{C}^n(I)$.

Preuve 18 : On démontre par récurrence que les deux propriétés suivantes sont vraies pour tout entier n :

1. (P_n) : $f+g$ est de classe $\mathcal{C}^n(I)$ et $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
2. (Q_n) : $\lambda.f$ est de classe $\mathcal{C}^n(I)$ et $\lambda.f^{(n)} = \lambda.f^{(n)}$

THÉORÈME 19 : **Formule de Leibniz** [a]
Soient $f,\ g$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I.
Alors la fonction (fg) est aussi de classe $\mathcal{C}^n$ sur l'intervalle I et on a la formule de Leibniz qui exprime la dérivée nième du produit :

$$\boxed{(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}}$$

a. Gottfried Whilhelm von Leibniz (01/07/1646-14/11/1716), Allemand. À l'origine avec Newton du calcul différentiel.

Preuve 19 :
Comme dans la démontration du théorème précédent, ce résultat se démontre par récurrence en posant :
(P_n) : "Si f est g sont $\mathcal{C}^n(I)$, alors $f.g$ est $\mathcal{C}^n(I)$ et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$"

`Exemple 23.` $(*)$ Soit f une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction h définie par $h(x) = (x^2+1)f(x)$. Calculer pour $x \in \mathbb{R}$, $h^{(n)}(x)$.
En déduire la dérivée n^{ieme} de $h(x) = (x^2+1)e^{2x}$.

THÉORÈME 20 : **La composée de fonctions $\mathcal{C}^n$ est $\mathcal{C}^n$**
Soient I et J deux intervalles ouverts.

$$\text{Si} \quad \left\{ \begin{array}{l} f \in \mathcal{C}^n(I,\ J) \\ g \in \mathcal{C}^n(J,\ \mathbb{R}) \end{array} \right. , \quad \text{alors} \quad g \circ f \in \mathcal{C}^n(I,\ \mathbb{R})$$

Preuve 20 : Par récurrence sur $0 \leq k < n$. On applique l'hypothèse de récurrence à la fonction $(fog)'$.

Remarque 20. Il existe une formule (formule de Faà di Bruno) donnant la dérivée nième d'une composée de deux fonctions $\mathcal{C}^n$, mais je doute que vous ayez envie de la connaître par coeur...

$$(f \circ g)^{(n)} = \sum_{\sum_{k=1}^{n} kp_k = n} \left((g^{(\sum_{k=1}^{n} p_k)} \circ f) \times \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{p_i!} \left(\frac{f^{(i)}}{i!}\right)^{p_i} \right)$$

`Exemple 24.` $(*)$ Montrer que les deux fonctions suivantes sont $\mathcal{C}^\infty$ sur un intervalle I à déterminer :

1. $f(x) = (x+1)^x$
2. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Exercice : 14

$(*)$ Soit f une solution sur $\mathbb{R}^*$ de l'équation différentielle $x^2 y'' - \frac{y'}{1+y^2} = \cos x$.
Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.

COROLLAIRE 21 : Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1. Si f est $\mathcal{C}^n$ et ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{f}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.
2. Si f et g sont $\mathcal{C}^n$ et si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I.

Preuve 21 : Ce sont des applications du théorème précédent à des applications bien choisies.

5.3 Etude LOCALE du caractère $\mathcal{C}^n$

THÉORÈME 22 : **Fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ par prolongement**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in I$ un intervalle et f une fonction définie sur $I \backslash \{a\}$.

$$\text{Si} \left\{ \begin{array}{l} f \text{ est } \mathcal{C}^n \text{ sur } I\backslash\{a\} \\ \forall k \in [\![0,n]\!],\ f^{(k)}(x) \text{ possède une limite finie en } a \end{array} \right. \quad \text{alors } f \text{ se prolonge en une fonction } \mathcal{C}^n \text{ sur } I$$

Preuve 22 : Par récurrence.

Exercice : 15

(**) Etudier la régularité de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\begin{cases} f(x) = e^{-1/x} \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

5.4 Difféomorphismes

DÉFINITION 8 : **Difféomorphismes**
Soit $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

On dit que f est un $\mathcal{C}^n$-*difféomorphisme* de l'intervalle I vers $J = f(I)$ ssi $\begin{cases} f \text{ de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I \\ f \text{ est une bijection de } I \text{ dans } J \\ f^{-1} \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } J \end{cases}$.

`Exemple 25.`

1. Les fonctions affines non constantes sont des $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. La fonction exponentielle est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $]0,\ +\infty[$.
3. La fonction tangente est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de $]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ dans $\mathbb{R}$.

THÉORÈME 23 : **Caractérisation des difféomorphismes**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f fonction réelle définie sur un intervalle I.

Si f vérifie $\begin{cases} f \text{ de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } I \\ \forall x \in I,\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$ alors f est un $\mathcal{C}^n$-*difféomorphisme* de I vers $J = f(I)$

Preuve 23 : Admis

`Exemple 26.` Justifier que les fonctions arccos et arcsin sont des $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes.

6 Extension aux fonctions complexes

DÉFINITION 9 : **Dérivée d'une fonction à valeurs complexes**
Soit $x_0 \in I$.

1. On dit que f est dérivable au point x_0 si et seulement si la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie lorsque x tend vers x_0. Cette limite finie se note $f'(x_0)$.
2. On dit qu'une fonction est dérivable sur I si et seulement si elle est dérivable en tout point de I.
3. On définit de même les fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

PROPOSITION 24 : **Caractérisation du caractère $\mathcal{C}^n$.**

$$f \text{ est } \mathcal{C}^n \text{ en } x_0 \text{ (resp. sur } I) \iff \begin{cases} \mathrm{Re}(f) \\ \mathrm{Im}(f) \end{cases} \text{ sont } \mathcal{C}^n \text{ en } x_0 \text{ (resp. sur } I).$$

On a alors :

$$\boxed{f^{(n)}(x_0) = (\mathrm{Re}(f))^{(n)}(x_0) + i(\mathrm{Im}(f))^{(n)}(x_0)}$$

Preuve 24 : C'est une conséquence immédiate du théorème de caractérisation de la limite.

`Exemple 27.` $(*)$ **Dérivation de deux types de fonctions :**
Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, montrer que les fonctions suivantes sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur leur ensemble de définition et que leurs dérivées successives sont données par les formules usuelles obtenues dans le cas des fonctions réelles :

1. $f\ :\ x \mapsto e^{\alpha x}$ *à l'aide de la caractérisation précédente*
2. $g\ :\ x \mapsto (x+\alpha)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$ *à l'aide de la linéarité de la dérivation*

Exercice : 16

(∗∗) Soit $g(t) = e^{\phi(t)}$ avec $\phi : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I.
Prouver que la fonction g est dérivable sur I et que : $\forall t \in I \quad g'(t) = e^{\phi(t)}\phi'(t)$.

Théorème de Rolle et Egalité des accroissements finis

⚠ Ces deux théorèmes ne sont plus valables pour les fonctions à valeurs complexes.

Pour s'en convaincre, on peut considérer la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = e^{it}$.

1. On a f continue sur le segment $[0,\ 2\pi]$, dérivable sur $]0,\ 2\pi[$, avec $f(0) = f(2\pi) = 1$.
2. Et pourtant $\forall t \in]0, 2\pi[,\ f'(t) = ie^{it} \neq 0$.
3. Ceci contredit à la fois le théorème de Rolle et l'égalité des accroissements finis.

On verra en revanche un peu plus loin que l'inégalité des accroissements finis reste valable.

Proposition 25 : **Primitives**

Comme pour les fonctions réelles, on définit une *primitive* sur I d'une fonction complexe f comme étant toute fonction F dérivable sur I telle que $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

1. Si $f = f_1 + if_2$, alors les primitives F de f sont les fonctions de la forme :
$$F = F_1 + i.F_2 + C \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_1 \text{ une primitive de } f_1 \\ F_2 \text{ une primitive de } f_2 \\ C \in \mathbb{C} \end{cases}$$
2. Deux primitives sur un $\boxed{\text{intervalle}}$ I d'une même fonction diffèrent d'une constante (complexe !!).
3. Toute fonction complexe continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ admet des primitives sur I.

Preuve 25 : Pas de difficulté ...

`Exemple 28.` (∗) Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$.
Montrer que la fonction f définie par $f(x) = e^{\alpha x}$ admet pour primitives sur $\mathbb{R}$ les fonctions

$$F_a(x) = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha x} + a \quad \text{où} \quad a \in \mathbb{C}$$

Exercice : 17

(∗) Soient $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Calculer une primitive des fonctions $x \mapsto e^{ax}\cos bx$ et $x \mapsto e^{ax}\sin bx$ sur $\mathbb{R}$ en remarquant qu'il s'agit des parties réelles et imaginaires de $x \mapsto e^{a+ibx}$ sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire une primitive de $x \mapsto e^{2x}\cos x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice : 18

Soit $\alpha = a + ib \in \mathbb{C}$.

1. Calculer une primitive de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x-\alpha}$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Etudier l'existence de primitives de la fonction f définie par $f(x) = (x - \alpha)^n$.

	F° réelles	F° complexes
Notion de dérivée en un point	X	X
Théorèmes généraux sur la dérivée d'une combinaison linéaire / produit / rapport	X	X
Dérivabilité de $f \circ g$ en un point où g est une fonction réelle	X	X
Notion de dérivée nième	X	X
Formule de Liebniz	X	X

Comparaisons : Fonctions Réelles - Fonctions complexes
Définitions et propriétés locales

	F° réelles	F° complexes
Notion de dérivée sur un intervalle	X	X
Théorèmes généraux sur la dérivée d'une combinaison linéaire / produit / rapport	X	X
Dérivabilité de $f \circ g$ sur un intervalle où g est une fonction réelle	X	X
Théorème sur la dérivabilité de la bijection réciproque	X	O
Notion de primitive sur un intervalle	X	X
Fonction à dérivée nulle sur un intervalle	X	X
La dérivée s'annule en un extrémum local intérieur	X	O
Théorème de Rolle	X	O
Théorème des accroissements finis	X	O
Inégalité des accroissements finis	X	X (et oui !)
Caractérisation des fonctions lipschitziennes dérivables	X	X
Théorème de la limite de la dérivée	X	X
Théorème de prolongement $\mathcal{C}^n$	X	X
Formules de dérivation de $x \mapsto e^{\alpha x}$ et $x \mapsto (x+\alpha)^n$ avec $n \in \mathbb{Z}\backslash\{-1\}$	X	X

Comparaisons : Fonctions Réelles - Fonctions complexes
Définitions et propriétés globales

Théorème 26 : **Inégalité des accroissements finis**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$. Alors

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

et par majoration, on en déduit l'inégalité des accroissements finis :

$$|f(b) - f(a)| \leq |b-a| \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$$

Preuve 26 : Vu dans le cours sur l'intégration...

7 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Réponses attendues
1.	Comment faire pour étudier la dérivabilité d'une f° en un point x_0 ?	Limite de $\Delta_{x_0}(x)$ en x_0 Th du prol^t dérivable
2.	Que dit le théorème liant la dérivabilité en un point et l'existence d'un DL1 ? A quoi nous a servi ce théorème dans le cours ?	cf cours à prouver les th. génér. à raccorder des sol°
3.	Que dit le théorème de dérivation de la bijection réciproque ?	cf cours
4.	Quand dit-on qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$ en un point x_0 ? Comment prouver qu'une fonction est de classe $\mathcal{C}^k$?	cf cours avec les th. généraux
5.	Que cherche-t-on quand on veut étudier la régularité d'une fonction ?	cf cours
6.	Rappeler la formule de Leibniz et les hypothèses permettant de l'appliquer.	cf cours
7.	Quand dit-on qu'une fonction est un $\mathcal{C}^k$-difféomorphisme sur I ? Donner des exemples de $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphismes	cf cours ln, tan, $x \mapsto ax + b$ ...
8.	De quel théorème provient le théorème de Rolle ? Citez-le ! Citez précisément le thèorème de Rolle. Que dit sa généralisation ? Comment utiliser Rolle pour prouver le théorème de accroissements finis ? Quel théorème peut-on envisager d'appliquer lorsque la dérivée d'une fonction est bornée ?	cf cours cf cours cf cours l'IAF
9.	Dans quel type de questions peut-on envisager d'appliquer le TAF ?	lorsqu'apparaît $f(b) - f(a)$
10.	Citer le théorème de caractérisation des difféomorphismes ?	cf cours
11.	Comment prouver qu'une fonction dont la dérivée est positive est croissante ? Comment prouver qu'une fonction dont la dérivée est st^t positive est st^t croissante ?	avec le TAF avec le th. de Rolle
12.	Citez précisément le thèorème de la limite de la dérivée.	cf cours
13.	Que nous dit le théorème de prolongement des fonctions $\mathcal{C}^n$?	cf cours

8 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

I] Définition de la dérivée

On montre qu'une fonction est dérivable en un point a de son ensemble de définition, en prouvant que :

$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite finie lorsque $x \to a$.

Exercice de TD : 1

($*$) La fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x}(\cos x - \frac{1}{\cos x})$ est-elle prolongeable par continuité en 0 ?
Etudier la dérivabilité en 0 de son prolongement.

Exercice de TD : 2

(♡) Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I qui n'en soit pas une extrémité.

Si $\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} \xrightarrow[h\to 0]{} l \in \mathbb{R}$, l est alors appelée la dérivée symétrique de f en a.

1. Montrer que, si f est dérivable à droite et à gauche en a, elle admet une dérivée symétrique en a.
2. Que dire de la réciproque ?

II] Théorème de Rolle et Théorème des Accroissements Finis

1. Ces deux théorèmes sont des théorèmes d'existence affirmant qu'il existe une valeur c en laquelle la dérivée d'une fonction f prend une valeur particulière :
   (a) 0 dans le cas du théorème de Rolle
   (b) $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ dans le cas du théorème des accroissements finis
2. Dans les exercices suivants, on veillera à :
   (a) Bien reformuler les questions sous la forme : "Montrer qu'il existe c tel que $g'(c) = \dots$".
   Pour cela, il faudra introduire une fonction g bien choisie.
   (b) Bien vérifier les différentes hypothèses d'application du théorème choisi
3. Le théorème des accroissements finis est souvent très utile dès qu'il est possible de mettre l'expression étudiée sous la forme $f(b) - f(a)$.

Exercice de TD : 3

(♡) Etablir que : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \quad \frac{x}{1+x} \leq \ln(x+1) \leq x$.

Exercice de TD : 4

(♡) Etablir que : $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, il existe $x \in]0,\ 1[$ tel que : $\quad 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx = a + b + c$.

Exercice de TD : 5

($*$) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout $x > 0$, il existe $c > 0$ tel que $f(x) - f(-x) = x(f'(c) + f'(-c))$.

Exercice de TD : 6

($**$) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,\ a+2h]$ ($a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$).
Montrer que : $\exists c \in]a,\ a+2h[$ tel que $f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a) = h^2 f''(c)$.

Indice : introduire $\varphi(x) = f(x+h) - f(x)$.

Exercice de TD : 7

(♡♡) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et : $f\ :\ I \mapsto \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^n$ s'annulant en $n+1$ points distincts de I.

1. Montrer que la dérivée n ème de f s'annule au moins une fois sur I.

2. Soit a un réel. Montrer que la dérivée $n-1$ ème de $f'+af$ s'annule au moins une fois sur I.

   Indice : on pourra introduire une fonction auxiliaire.

Exercice de TD : 8

(♡♡) Soit f continue sur le segment $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$ telle que $f(a)=f(b)=0$. On suppose $0 \notin [a;b]$. Montrer qu'il existe un point $c \in]a;b[$ tel que la tangente au graphe de f au point d'abscisse c passe par O.

Exercice de TD : 9

($*$) Majorer l'erreur commise en prenant 100 comme valeur approchée de $\sqrt{10001}$.

Exercice de TD : 10

($**$) Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\ 1]$ telle que $f(0)=0$ et $\forall x \in [0;1]\ f'(x)>0$.
Montrer qu'il existe un réel $m>0$ tel que $\forall x \in [0,\ 1]\ f(x) \geq mx$.
Remarquez que la dérivée de f est continue sur $[0,\ 1]$...
On peut donc lui appliquer l'un des théorèmes connus sur la continuité des fonctions.

Exercice de TD : 11

(♡♡) Règle de l'Hôpital :

1. Montrer que si f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b]$, dérivables sur $]a;b[$, alors il existe $c \in]a;b[$ tel que :

$$(f(b)-f(a))g'(c)=(g(b)-g(a))f'(c)$$

2. Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et a un point intérieur à I.
   On suppose que :
   — f et g sont continue sur I et $f(a)=g(a)=0$.
   — f et g sont dérivables sur $I\backslash\{a\}$
   — g et g' ne s'annulent pas sur $I\backslash\{a\}$
   — $\lim\limits_{x\to a} \frac{f'}{g'}=L$.
   Montrer que $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}=L$.

3. Déterminer la limite de $f(x)=\frac{\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}}{x^2}$ en 0.

Exercice de TD : 12

($***$) Zéros d'une solution d'équation différentielle.

Soit I un intervalle et $a,\ b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.
On considère l'équation différentielle du second ordre suivante :

$$y''=a(t)y+b(t)y' \tag{1}$$

On admet que si f est solution de (1) et qu'il existe $t_0 \in I$ tel que $f(t_0)=f'(t_0)=0$, alors f est identiquement nulle sur I. (Physiquement, cela veut dire qu'à vitesse et position initiale fixée, il n'existe qu'une solution de (1).)
Montrer que sur tout segment K inclus dans I, une solution f n'admet qu'un nombre fini de zéros.

Aide : vous pourrez procéder par l'absurde et utiliser le théorème de Bolzano-Weierstrass

III] Dérivées successives

1. La première chose à faire est en général de justifier l'existence des dérivées successives d'une fonction en utilisant les théorèmes généraux.
2. Si l'expression de la dérivée nième n'est pas donnée dans l'énoncé, il faut envisager :
   (a) soit de la déterminer par conjecture puis de la prouver par récurrence (*conjecture/validation*)
   (b) soit si c'est possible, utiliser le théorème de Liebniz (bien vérifier pour cela que les fonctions sont n fois dérivables et qu'on est capable de capable de déterminer leur dérivée nième)
3. Si l'expression de la dérivée nième est donnée dans l'énoncé, il faut alors la prouver, en général par récurrence sur n.

Exercice de TD : 13

(♡) Donner l'expression générale des dérivées n^{ieme} des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \ln(1+x)$
2. $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$
3. $f(x) = \sin^2 x$
4. $f(x) = x^{n-1}\ln x$
5. $f(x) = x^2.e^x$
6. $f(x) = e^x \cos x$
7. $f(x) = \frac{3x+5}{x+1}$

Aide : vous pourrez penser, soit à rechercher une formule générale pour $f^{(n)}$, soit à appliquer la formule de Liebnitz

Exercice de TD : 14

($**$) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $\begin{cases} f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et montrer que $f^{(n)(x)}$ se met sous la forme : $x^{-3n}P_n(x)e^{-\frac{1}{x^2}}$ où P_n est un polynôme.
2. On pose $f(x) = 0$ pour $x \leq 0$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$

Exercice de TD : 15

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ où P_n est une application polynomiale.
2. En utilisant $(1+x^2)f(x)$, déterminer une relation entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1} ($n \in \mathbb{N}^*$).
3. En déduire une relation entre P'_n et P_{n-1}.
4. En déduire une équation différentielle du second ordre vérifiée par P_n.

Exercice de TD : 16

($*$) Quelle est la classe de l'application f, définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = x^\alpha$ avec $\alpha > 0$.

Exercice de TD : 17

($*$) Etudier la continuité (et les prolongements éventuels), la dérivabilité et le caractère $\mathcal{C}^1$ de :

$$f(x) = \ln\big(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}\big)$$

IV] Etude de suites et de fonctions

L'inégalité des accroissements finis est parfois utilisée lors de l'étude des suites récurrences $u_{n+1} = f(u_n)$ lorsque les termes de la suites appartiennent à un segment $[a,\ b]$ et que la valeur absolue de la dérivée est majorée par un réel strictement inférieur à 1 (cf le deuxième exercice).

Exercice de TD : 18

($*$) Dresser le tableau de variation des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \sqrt{x(x+2)}.e^{\frac{1}{x}}$
2. $g(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2(x^4-2x^2+2)}}$

Exercice de TD : 19

($\heartsuit$) Soit la fonction polynômiale P définie par $P(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.

1. Montrer que P admet une unique racine réelle α. Calculer $\lfloor \alpha \rfloor$.
2. Prouver que $\alpha = 2 + \frac{1}{\alpha^2}$.

   On introduit alors la fonction f définie par $f(x) = 2 + \frac{1}{x^2}$ et suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = \lfloor \alpha \rfloor \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$.

   (a) Montrer que $u_n \in [2,\ +\infty[$.
   (b) Prouver que pour tout $x \geq 2$, on a $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$.
   (c) En déduire que $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{4^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Déterminer une valeur de n pour laquelle nous avons $|u_n - \alpha| \leq 10^{-5}$.
3. A l'aide d'un programme python, calculer une valeur de α à 10^{-5} près.

Remarque : La méthode exposée dans cet exercice est d'un usage TRES courant et remplace avantageusement la méthode vue dans le chapitre sur les suites.