Analyse Asymptotique 1 :
-
Les Relations de comparaison

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

13 janvier 2018

James Stirling (1692 - 1770), Ecossais à l'origine de la formule : $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$

1 Relations de comparaison : cas des fonctions

Soient 2 fonctions $f,\ g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$.
Nous supposerons ici que f et g sont deux fonctions qui ne s'annulent pas sur un voisinage de a privé de a.
Il s'agit ici de comparer les 2 fonctions au voisinage de a.

Pour cela, formons leur rapport $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ et regardons ce qui se passe lorsque $x \to a$.

3 cas intéressants se présentent alors :

Cas 1 :	$f(x)/g(x)$ est borné au voisinage de a	On dira que f est dominé par g :	$f = O(g)$
Cas 2 :	$f(x)/g(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers a	On dira que f est négligeable devant g :	$f = o(g)$
Cas 3 :	$f(x)/g(x)$ tend vers 1 lorsque x tend vers a	On dira que f et g sont équivalentes :	$f \sim g$

1.1 La relation : "Est un grand O de ..."

Soit $a \in \overline{I}$ et f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur un voisinage de a privé de a.

DÉFINITION 1 : **"Est un grand O de ..."**
On dira que la fonction f est *un grand O* de la fonction g au voisinage du point a ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \text{ est borné au voisinage de } a \text{ privé de } a$$

Notation : $f(x) = O(g(x))$ au voisinage de x_0.
Par abus de langage, on notera $O(g)$ toute fonction étant un grand O de g au voisinage de a.
⚠ Lorsque $f(x) = O(g(x))$, on pourra dans un calcul remplacer $f(x)$ par $O(g(x))$ mais pas $O(g(x))$ par $f(x)$.

Remarque 1.

1. Lorsque $f = O(g)$, on dit aussi que "f est dominée par g. Mais cette terminologie prête à confusion...
2. La notation $f = O(g)$ ne veut rien dire si l'on ne précise pas au voisinage de quel point on se trouve.
3. Ecrire $f = O(1)$ au voisinage de a signifie que f est bornée au voisinage de a.

`Exemple 1.` Si $f(x) = 3x^5 - x^4 + 2x$ alors : $\begin{cases} f = O(x) \text{ au voisinage de } 0 \\ f = O(x^5) \text{ au voisinage de } +\infty \end{cases}$.

1.2 "Est négligeable devant ..."

Soit $a \in \overline{I}$ et f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur un voisinage de a privé de a.

DÉFINITION 2 : **La relation : "Est négligeable devant ..."**
On dira que la fonction f est *négligeable* devant la fonction g au voisinage du point a ssi

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Notation : $f(x) = o(g(x))$ ou parfois $f(x) << g(x)$

Par abus de langage, on notera $o(g)$ toute fonction négligeable devant g au voisinage de a. ⚠ Lorsque $f(x) = o(g(x))$, on pourra dans un calcul remplacer $f(x)$ par $o(g(x))$ mais pas $o(g(x))$ par $f(x)$.

Remarque 2.

1. La notation $f(x) = o(g(x))$ ne veut rien dire si l'on ne précise pas au voisinage de quel point on se trouve.
2. $f(x) = o(g(x))$ signifie en gros que $f(x)$ est *beaucoup plus petit en valeur absolue* que $g(x)$ au voisinage de a.
3. Ecrire $f(x) = o(1)$ au voisinage de a signifie que $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$

`Exemple 2.` Soit $(p,\ q) \in \mathbb{N}^2$. On a : $x^p = o(x^q)$ au voisinage de $0 \iff p > q$

`Exemple 3.` Si $f(x) = 3x^5 - x^4 + x^2$ alors : $\begin{cases} f = o(x) \text{ au voisinage de } 0 \\ f = o(x^6) \text{ au voisinage de } +\infty \end{cases}$

PROPOSITION 1 : **Lien entre les relations de comparaison**
Si au voisinage d'un point a on a $f(x) = o(g(x))$ alors $f(x) = O(g(x))$.

Preuve 1 : Pas de difficulté.

THÉORÈME 2 : **Comparaison des fonctions usuelles**
Soient $\alpha,\ \beta,\ \gamma > 0$ trois réels.

1. Comparaison ln et puissance :
   - en $+\infty$: $(\ln x)^\gamma = o(x^\alpha)$
   - en 0^+ : $|\ln x|^\gamma = o(\frac{1}{x^\alpha})$
2. Comparaison puissance et exponentielle :
   - en $+\infty$: $x^\alpha = o(e^{\beta x})$
   - en $+\infty$: $x^\alpha = o(a^x)$, lorsque $a > 1$
   - en $-\infty$: $e^{\beta x} = o(\frac{1}{x^\alpha})$, lorsque $\alpha \in \mathbb{N}$

Par transitivité, on en déduit que : • en $+\infty$: $\ln^\beta x = o(e^{\alpha x})$

Preuve 2 : Voir le cours sur les fonctions usuelles.

`Exemple 4.` Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x) = \dfrac{x^3.\ln^2 x}{e^{5x}}$.

Le théorème précédent dit en gros la chose suivante :

"Aux bornes de leur intervalle de définition,
les exponentielles l'emportent sur les fonctions puissance et
les fonctions puissance l'emporte sur le logarithme."

Proposition 3 : **Opérations sur les relations de comparaisons**

1)	$f = o(g)$, $g = o(h)$	$\Rightarrow$	$f = o(h)$	cad	(transitivité)	idem avec O
2)	$f_1 = o(g)$, $f_2 = o(g)$	$\Rightarrow$	$f_1 + f_2 = o(g)$	cad	$o(g) + o(g) = o(g)$	idem avec O
3)	$f_1 = o(g_1)$, $f_2 = o(g_2)$	$\Rightarrow$	$f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$	cad	$o(g_1)o(g_2) = o(g_1 g_2)$	idem avec O
4)	$f = o(g)$	$\Rightarrow$	$hf = o(hg)$	cad	$ho(g) = o(hg)$	idem avec O
5)	$f = o(\lambda g)$ $(\lambda \in \mathbb{R}^*)$	$\Rightarrow$	$f = o(g)$	cad	$o(\lambda g) = o(g)$	idem avec O

Preuve 3 : Ces démonstrations ne posent aucune difficulté.

`Exemple 5.` $(*)$ En 0, on suppose que $f(x) = x + o(x)$ et que $g(x) = x^2 + o(x^2)$. Que dire que $f(x) + g(x)$?

Calculs d'une somme avec des "petits o"

1. On commencera par éliminer tous les "o" jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un $o(u(x))$.
2. Puis, on éliminera tous les termes qui sont eux-mêmes des $o(u(x)$.

`Exemple 6.`

1. Déterminer une fonction f telle que $x \ln x = o(f(x))$ au voisinage de $+\infty$.
2. Déterminer une fonction f telle que $\dfrac{\ln x}{x} = o(f(x))$ au voisinage de 0.

Exercice : 1

Ordonner les fonctions suivantes selon la relation "*est négligeable devant* " au voisinage de $+\infty$.

$x^2 e^x$, $\quad x + x^2$, $\quad \dfrac{x^2}{\ln x}$, $\quad x^3 \ln x$, $\quad \dfrac{e^x}{x \ln x}$, $\quad x + \ln\sqrt{x}$, $\quad \dfrac{x^2}{x + \ln x}$, $\quad x^2 \ln^2 x$

1.3 La relation : "Est équivalent à ..."

1.3.1 Définition et premières propriétés

Soit $a \in \overline{I}$ et f et g deux fonctions définies sur l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ ne s'annulant pas sur un voisinage de a privé de a.

Définition 3 : **"Est équivalent à ..."**
On dira que f et g sont *équivalentes* au voisinage du point a ssi :

$$\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 1$$

Notation : $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ ou $f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x)$ ou encore $f(x) \sim g(x)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Proposition 4 : **Caractérisation de l'équivalence de deux fonctions**
On a au voisinage d'un point a :

$$f(x) \sim g(x) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = g(x) + o(g(x))$$

Cela sera particulièremet utile lorsqu'on souhaitera remplacer une expression par un équivalent dans une égalité.

Preuve 4 : Quasi-immédiat !

Remarque 3. La notation $f(x) \sim g(x)$ ne veut rien dire si l'on ne précise pas au voisinage de quel point on se trouve.

Remarque 4.

1. ⚠ Contrairement à l'intuition, il n'y a aucune implication entre $f(x) \underset{a}{\sim} g(x)$ et $f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0$.
   Ces deux propriétés définissent des notions de proximité différentes.
2. ⚠ Ne JAMAIS écrire que $f(x) \underset{a}{\sim} 0$ puisque la fonction nulle ne vérifie pas les conditions d'application de la définition.

PROPOSITION 5 : La relation $\sim$ est une relation d'équivalence sur $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.
Elle est en particulier symétrique, c'est à dire : si f est équivalente à g, g est alors équivalente à f.
On dira donc que f et g sont équivalentes.

Preuve 5 : On démontre facilement que $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.

Exemple 7.

1. Si P est une fonction polynomiale non nulle :
   P est équivalente à son monôme de plus haut degré au voisinage de $+\infty$
   P est équivalente à son monôme de plus bas degré au voisinage de 0
2. Au voisinage de $+\infty$: $\operatorname{ch} x \sim \frac{e^x}{2}$ et $\operatorname{sh} x \sim \frac{e^x}{2}$

Remarque 5. En fait, une fonction donnée admet une infinité d'équivalents au voisinage d'un point a. Seulement l'intérêt d'un équivalent est de remplacer une fonction par une autre fonction plus simple. On choisira donc **toujours** l'équivalent le plus simple.

Par exemple, au voisinage de $+\infty$ on a : $\begin{cases} x^2 + x \sim x^2 \\ x^2 + x \sim x^2 + 2x + 1 \\ x^2 + x \sim x^2 - x - 3 \end{cases}$. Seul le premier équivalent a un intérêt !!

⚠⚠⚠
On retiendra de cet exemple qu'il ne faut jamais donner un équivalent sous la forme d'une somme !!!

Exercice : 2

Prouver que si $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $P(x)e^x + Q(x)e^{-x} = 0$ avec P et Q des fonctions polynômiales, alors $P = Q = 0$.

⚠⚠⚠. Ne pas confondre la notation $\sim$ avec la notation $\simeq$ utilisée parfois en physique.

1.	$\cos x \sim 1$	au voisinage de 0	est un équivalent	
2.	$\cos x \simeq 1 - \frac{x^2}{2}$	au voisinage de 0	est un développement limité caché	(Notation jamais utilisée en Math !!)

PROPOSITION 6 : **Lien entre les relations de comparaison**
On se place au voisinage d'un point a.

1. Si $f(x) \sim g(x)$ alors $f(x) = O(g(x))$.
2. Si $\begin{cases} f(x) \sim g(x) \\ f(x) = o(\alpha(x)) \end{cases}$ alors $g(x) = o(\alpha(x))$.
3. Si $\begin{cases} f(x) \sim g(x) \\ \alpha(x) = o(f(x)) \end{cases}$ alors $\alpha(x) = o(g(x))$.

Preuve 6 : Pas de difficulté.

1.3.2 Comment obtenir des équivalents ?

THÉORÈME 7 : **Les équivalents de références**

Les limites usuelles en 0, nous donnent les équivalents suivants au voisinage de 0 :

- $\sin x \sim x$
- $\arcsin x \sim x$
- $\operatorname{sh} x \sim x$
- $\tan x \sim x$
- $\arctan x \sim x$
- $\operatorname{th} x \sim x$
- $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$
- $1 - \operatorname{ch} x \sim -\frac{x^2}{2}$
- $\ln(1 + x) \sim x$
- $[e^x - 1] \sim x$
- $(1 + x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

`Exemple 8.` ($*$) Déterminer à l'aide d'un changement de variables, un équivalent de $\arccos x$ au voisinage de 1^-.

THÉORÈME 8 : **Les équivalents de références - Généralisation**

Plus généralement, au voisinage de a lorsque $\boxed{f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0}$, on a :

- $\sin f(x) \sim f(x)$
- $\arcsin f(x) \sim f(x)$
- $\operatorname{sh} f(x) \sim f(x)$
- $\tan f(x) \sim f(x)$
- $\arctan f(x) \sim f(x)$
- $\operatorname{th} f(x) \sim f(x)$
- $1 - \cos f(x) \sim \frac{f(x)^2}{2}$
- $1 - \operatorname{ch} f(x) \sim -\frac{f(x)^2}{2}$
- $\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$
- $\left[e^{f(x)} - 1\right] \sim f(x)$
- $[(1 + f(x))^\alpha - 1] \sim \alpha f(x)$

Preuve 8 : Ces résultats proviennent directement des limites vues dans le cours sur les fonctions usuelles.

PROPOSITION 9 : **Calculs avec des équivalents**

1. Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ et $l \neq 0$ alors $f \underset{a}{\sim} l$
2. Si $f_1 \underset{a}{\sim} g_1$ et $f_2 \underset{a}{\sim} g_2$ alors $\begin{cases} f_1 f_2 \underset{a}{\sim} g_1 g_2 \\ f_1/f_2 \underset{a}{\sim} g_1/g_2 \end{cases}$
3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Si $f \underset{a}{\sim} g$ et f et g sont positives alors $f^\alpha \underset{a}{\sim} g^\alpha$ (α est ici indépendant de x !).

Preuve 9 : Pas de difficultés !

Exercice : 3

Déterminer un équivalent simple des fonctions suivantes au voisinage de 0.

1. $f(x) = \dfrac{xe^x}{x^2 + 1} \ln(1 + x)$
2. $g(x) = \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - 1}{\arcsin(\cos x - 1)}$

⚠⚠⚠. On ne peut pas tout faire avec des équivalents :

1. Soient les fonctions : $f(x) = x^2 + x$ $\quad g(x) = -x^2$ $\quad h(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.

   Au voisinage de $+\infty$ on a $\begin{cases} f(x) \sim x^2 \\ g(x) \sim -x^2 \\ h(x) \sim x^2 \end{cases}$, et pourtant $\begin{cases} f(x) + g(x) \sim x \\ h(x) + g(x) \sim \frac{1}{x} \\ e^{f(x)} \not\sim e^{x^2} \text{ alors que } e^{h(x)} \sim e^{x^2} \end{cases}$.
2. Soit $\begin{cases} f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}} \\ g(x) = (1 - x)^{\frac{1}{x}} \end{cases}$. Montrer qu'au voisinage de 0 : $\begin{cases} f(x) \not\sim 1^{\frac{1}{x}} \\ g(x) \not\sim 1^{\frac{1}{x}} \end{cases}$.

⚠⚠⚠. Conséquences ! !

1. Le symbole $\sim$ ne se manipule pas comme le signe $=$ notamment lorsqu'on a une somme.

2. On peut prendre sans réfléchir des produits, quotients, puissances d'équivalents, mais il faut prendre certaines précautions (voir ci-dessous !) dans la recherche d'un équivalent d'une somme, d'une exponentielle ou d'un logarithme.
3. Dans le cas où α est une fonction de x, il faudra écrire : $f^\alpha = e^{\alpha \ln f}$.
4. La forme 1^∞ est une forme indéterminée !

Théorème 10 : Cas du logarithme et de l'exponentielle

1. • Si $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \in \overline{\mathbb{R}^+}\backslash\{1\} \end{cases}$ Alors $\ln f \underset{a}{\sim} \ln g$

   • Si $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} 1$ Alors $\ln f(x) = \ln(1 + (f(x) - 1)) \underset{a}{\sim} f(x) - 1$

2. • Si $\begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{cases}$ Alors $e^f \underset{a}{\sim} e^g$ *(Rarement utilisé en pratique)*

Preuve 10 : Pas de difficulté.

`Exemple 9.` Déterminer un équivalent des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$ et de 0 :

1. $f(x) = \ln(x^2 + \cos x)$
2. $f(x) = \ln((x + \sin x)^2 + 1)$

Remarque 6. ⚠ A l'exception des fonctions puissances (sans précaution) et logarithmes (avec précautions), on veillera à :

"Ne JAMAIS écrire $u(x) \sim \alpha(x)$ donc $f(u(x)) \sim f(\alpha(x))$"

Méthode : Recherche d'un équivalent d'une somme : $f = g + h$

1. On commencera par vérifier si la somme est factorisable.
2. Si ce n'est pas le cas, on recherchera un équivalent simple des fonctions g et h : $\begin{cases} g \sim a \\ h \sim b \end{cases}$.
   On remplacera écrira alors $f = a + o(a) + b + o(b)$ et on comparera les ordres de grandeur de a et b.
3. Lorsque $a + b = 0$, la méthode précédente ne marche pas. On pourra alors :
   - soit tenter de transformer la fonction (factorisation, quantité conjuguée...).
   - soit recourir aux développements limités (voir un cours ultérieur).

`Exemple 10.`

1. $f(x) = x^2 + x.\ln 1/x$ au $\mathcal{V}(+\infty)$.
2. $f(x) = 2x + \ln(1 + x)$ au $\mathcal{V}(0)$.
3. $f(x) = \sin x - \cos\sqrt{x^2 + \frac{\pi^2}{4}}$ au $\mathcal{V}(0)$.
4. $f(x) = \sin x - x$ au $\mathcal{V}(0)$.

`Exemple 11.`

1. Prouver qu'au voisinage de 0 on a :

   1. $(\sin x)^{\mathrm{sh}\, x} - 1 \sim x \ln x$
   2. $\dfrac{\sin^3 x}{\ln(1 + x^2)} + \sqrt{x} \sim \sqrt{x}$

2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a :

   1. $x^2 + (x - 1)\ln x \sim x^2$
   2. $x^{x^{\frac{1}{x}}} - x \sim \ln^2 x$
   3. $\sqrt{1 + x^2} - \sqrt{2 + x + x^2} \sim \frac{-1}{2}$
   4. $\ln^3(x + 1) - \ln^3 x \sim \frac{3\ln^2 x}{x}$
   5. $\mathrm{sh}\sqrt{x^2 + x} - \mathrm{sh}\sqrt{x^2 - x} \sim e^x \,\mathrm{sh}\, \frac{1}{2}$

1.3.3 Applications des équivalents

PROPOSITION 11 : **Un équivalent donne une idée de l'allure de la courbe au voisinage d'un point**
Soient deux fonctions $f,\ g : I \mapsto \mathbb{R}$ et $a = 0$ ou $\pm\infty \in \overline{I}$.
Si au voisinage du point a, $f \sim g$ alors, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont la même allure.

`Exemple 12.` Donner l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de 0 et de l'∞ sachant que $\begin{cases} f(x) \sim x \text{ au voisinage de } +\infty \\ f(x) \sim \sqrt{|x|} \text{ au voisinage de } 0 \\ f(x) \sim -x^2 \text{ au voisinage de } -\infty \end{cases}$.

Remarque 7. Si l'on souhaite obtenir l'allure de $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $a \in \mathbb{R}$, on recherchera un équivalent de $f(x) - f(a)$ au $\mathcal{V}(a)$.

PROPOSITION 12 : **Un équivalent donne localement le signe de la fonction**
Soient deux fonctions $f,\ g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$.
Si au voisinage du point a, $f \sim g$ alors, il existe un voisinage V de a sur lequel f et g ont même signe.

Preuve 12 : On démontre facilement qu'il existe un voisinage de a sur lequel $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

`Exemple 13.` **Etude d'extremum** Etudier l'existence d'extremum locaux de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 3x$.

Remarque 8. **Etude de points d'inflexion :**
On peut utiliser un équivalent de $f''(x)$ au voisinage de x_0 pour montrer que $M(x_0,\ f(x_0))$ est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.

THÉORÈME FONDAMENTAL 13 : **Un équivalent donne la limite !**
Soient deux fonctions $f,\ g : I \mapsto \mathbb{R}$ et un point $a \in \overline{I}$.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} f \underset{a}{\sim} g \\ g(x) \xrightarrow[x\to a]{} l \end{cases} \quad \text{alors} \quad f(x) \xrightarrow[x\to a]{} l$$

Preuve 13 : Pas de difficulté en considérant la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Remarque 9. Pour déterminer la limite d'une fonction, on pourra ainsi rechercher un équivalent simple de la fonction.
Pour cela, nous pourrons utiliser les résultats qui suivent ...

Exercice : 4

Etudier les limites suivantes :

1. $f(x) = \ln \dfrac{e^{2x}+1}{e^x+1}$ en $+\infty$
2. $g(x) = \dfrac{\sin(\sin^3 x^2)}{\sin^3(\sin^2 x)}$ en 0
3. $h(x) = \dfrac{1}{x(x-\ln x)^x}$ en 0^+
4. $k(x) = \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right)^{x\ln x}$ en $+\infty$
5. $l(x) = (1+\ln x)^{\tan(\frac{\pi}{2}x)}$ en 1
6. $m(x) = \ln(\ln x + \dfrac{1}{x})$ en $+\infty$

Remarque 10. Lorsqu'on cherche un équivalent au voisinage de $a \in \mathbb{R}^*$, on pourra se ramener en 0 en posant $t = x - a$.

Exercice : 5

Prouver que :

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x\operatorname{sh}\dfrac{1}{x}) = 1$
2. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\log_x a - \log_a x}{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a} = \dfrac{-2}{a\ln a \operatorname{ch} a}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3} = -1$
4. $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^x - x}{\ln(1+\sqrt{x^2-1})} = 0$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{\cos\frac{\pi x}{2}} = \dfrac{-2e^2}{\pi}$
6. $\lim\limits_{x\to a} \left(2 - \dfrac{x}{a}\right)^{\tan\frac{\pi x}{2a}} = e^{\frac{2}{\pi}}$
7. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sh} x \sin x}} = e^{-\frac{1}{2}}$
8. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln x}{\ln(x+1)}\right)^{x\ln x} = e^{-1}$
9. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\ln(1+x))^{\ln(1+x^2)} = 1$

2 Relations de comparaison : cas des suites

L'objectif de cette partie est l'étude du comportement d'une suite en $+\infty$ par comparaison à des suites plus simples.

2.1 La relation O : "est un grand O de ..."

DÉFINITION 4 :
Soient deux suites (u_n) et (α_n) telle que α_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On dit que la suite (u_n) est *un grand O* de la suite (α_n) et l'on note $u_n = O(\alpha_n)$ lorsque :

$$(\frac{u_n}{\alpha_n}) \text{ est bornée}$$

Remarque 11. $u_n = O(\alpha_n)$ se lit de la façon suivante : u_n *est un grand "O" de* α_n.

Pour prouver que $u_n = O(\alpha_n)$, on pourra par exemple, étudier la limite de $\dfrac{u_n}{\alpha_n}$.
Si cette limite existe et est finie, alors on aura bien $u_n = O(\alpha_n)$.

Remarque 12. Ecrire que $u_n = O(1)$ est équivalent à dire que (u_n) est bornée.

⚠⚠⚠. $O(\alpha_n)$ désigne une suite qui est une grand O de (α_n).
Elle est abusive dans le sens où deux suites O de (α_n) seront notées de la même façon.

⚠⚠⚠. Lorsque $u_n = O(\alpha_n)$, on dit parfois que "(u_n) est *dominée* par (α_n)".
Cette terminologie prête à confusion car elle semblerait indiquée que $u_n \leq \alpha_n$ à partir d'un certain rang ce qui n'est pas le cas.

Exemple 14. Montrer que :

1. $\dfrac{2}{n(n+1)} = O(\dfrac{1}{n^2})$
2. $\dfrac{2}{n} = O(n)$
3. $n^2 + \sin n = O(n^2)$

2.2 La relation o : "est négligeable devant ..."

DÉFINITION 5 :
Soient deux suites (u_n) et (α_n) telle que α_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On dit que la suite (u_n) est *négligeable* devant la suite (α_n) et l'on note $u_n = o(\alpha_n)$ lorsque :

$$\frac{u_n}{\alpha_n} \mapsto 0$$

⚠⚠⚠. $u_n = o(\alpha_n)$ se lit de la façon suivante : u_n *est un petit "o" de* α_n.

⚠⚠⚠. $o(\alpha_n)$ désigne une suite négligeable devant (α_n).
Elle est abusive dans le sens où deux suites négligeables devant (α_n) seront notées de la même façon.

Remarque 13.
1. Ecrire que : $u_n = o(1)$ est équivalent à dire que (u_n) converge vers 0.
2. Si $\alpha_n \to l \in \mathbb{R}$ alors toute suite négligeable devant (α_n) converge vers 0 : $o(\alpha_n) \to 0$.

PROPOSITION 14 : Calculs avec o

⚠⚠⚠. Dans les égalités suivantes, le signe "=" signifie " ... est un ..." ou " ... peut s'écrire comme un ...".

1. Une combinaison linéaire de deux suites négligeables devant (α_n) est négligeable devant (α_n) : $\lambda.o(\alpha_n) + \mu.o(\alpha_n) = o(\alpha_n)$
2. Une suite négligeable devant (α_n) est dominée par (α_n) : $o(\alpha_n) = O(\alpha_n)$ mais $O(\alpha_n) \neq o(\alpha_n)$
3. Le produit d'une suite (β_n) par une suite négligeable devant (α_n) est négligeable devant $(\beta_n.\alpha_n)$: $\beta_n.o(\alpha_n) = o(\beta_n.\alpha_n)$
4. La notation o est transitive : si $\begin{cases} a_n = o(b_n) \\ b_n = o(c_n) \end{cases}$ alors $a_n = o(c_n)$

Preuve 14 : Pas de difficulté particulière ...

⚠⚠⚠. Attention !! On évitera d'écrire des égalités du type : $u_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n})$.
En effet, dans cette expression le terme $1/n^2$ est un $o(1/n)$ et n'apporte donc aucune information intéressante.
On écrira donc simplement $u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Exemple 15.

1. Si $u_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ démontrer que $u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$.
2. Si $u_n = \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})$ et $v_n = \frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2})$, que peut-on dire de $u_n + v_n$?

Exercice : 6

Soit $l \in \mathbb{R}$.
Que dire d'une suite (u_n) à termes non nuls vérifiant $u_n = l + o(u_n)$?

THÉORÈME 15 : Comparaisons de référence

1.	Si	$0 < \alpha < \beta$	alors	$n^\alpha = o(n^\beta)$	et	$\frac{1}{n^\beta} = o(\frac{1}{n^\alpha})$
2.	Si	$0 < \alpha$ et $0 < \beta$	alors	$(\ln n)^\beta = o(n^\alpha)$		
3.	Si	$0 < \alpha$ et $0 < \beta$	alors	$n^\beta = o(e^{\alpha n})$	et par transitivité :	$(\ln n)^\beta = o(e^{\alpha n})$
4.	Si	$1 < a$ et $0 < \beta$	alors	$n^\beta = o(a^n)$		
5.	Si	$1 < a$	alors	$a^n = o(n!)$		
6.				$n! = o(n^n)$		

Preuve 15 :

1. Les 4 premiers résultats proviennent des comparaisons entre fonctions de référence.
2. Pour prouver que $a^n = o(n!)$, on pourra montrer que $u_n = \frac{a^n}{n!} \to 0$ en étudiant la limite de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$
3. Pour prouver que $n! = o(n^n)$, on pourra montrer que $u_n = \frac{n!}{n^n} \to 0$ en majorant $|u_n|$ par $\frac{1}{n}$.

Remarque 14. Bien retenir ces résultats car ils sont très utilisés en pratique !!

Exemple 16. Classer les suites, dont les termes généraux sont les suivants, par ordre de négligeabilité.

1. (a) $\frac{1}{n}$ (b) $\frac{1}{n^2}$ (c) $\frac{\ln n}{n}$ (d) $\frac{\ln n}{n^2}$ (e) $\frac{1}{n.\ln n}$
2. (a) n (b) n^2 (c) $n\ln n$ (d) $\sqrt{n}\ln n$ (e) $\frac{n^2}{\ln n}$

2.3 La relation $\sim$: "est équivalent à ..."

DÉFINITION 6 : **Suites équivalentes**
Soient deux suites (u_n) et (α_n) telle que α_n ne s'annule pas à partir d'un certain rang.
On dit que deux suites (u_n) et (α_n) sont équivalentes (Notation : $u_n \sim v_n$) lorsque :

$$\frac{u_n}{\alpha_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

Remarque 15. Nous avons l'équivalence : $u_n \sim \alpha_n \iff u_n - \alpha_n = o(\alpha_n)$

PROPOSITION 16 : La relation "$\sim$" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des suites.

Preuve 16 : On démontre facilement que la relation $\sim$ est réflexive, symétrique et transitive.

⚠⚠⚠. $u_n \sim \alpha_n$ n'implique pas que : $u_n - \alpha_n \to 0$.

⚠⚠⚠. $u_n - \alpha_n \to 0$ n'implique pas que : $u_n \sim \alpha_n$.

Pour montrer que $u_n \sim \alpha_n$, on peut utiliser l'une des 3 méthodes suivantes :

— soit on montre que : $\frac{u_n}{\alpha_n} \to 1$,
— soit on montre que : $u_n = \alpha_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$,
— soit on montre que : $u_n = \alpha_n + o(\alpha_n)$.

Ainsi, on a de façon immédiate : $n + \ln n \sim n$ et $n^2 + n + \frac{1}{n} \sim n^2$

Exemple 17. Trouver un équivalent de la suite (u_n) vérifiant : $u_n + o(u_n) = n + o(n)$.

Remarque 16. Equivalent d'une suite convergente : Si $u_n \to l \in \mathbb{R}^*$ alors $u_n \sim l$

⚠⚠⚠. En revanche, si $u_n \to 0$ il ne faudra SURTOUT pas écrire $u_n \sim 0$!!

Exemple 18.
— Si P est une fonction polynomiale alors P(n) est équivalent au terme de plus haut degré
— Si F est une fonction rationnelle alors F(n) est équivalent au rapport des termes de plus haut degré

PROPOSITION 17 :
1. Si $u_n \sim \alpha_n$ alors $u_n = O(\alpha_n)$ et $\alpha_n = O(u_n)$.
2. Si $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ u_n = o(\alpha_n) \end{cases}$ alors $v_n = o(\alpha_n)$.

Preuve 17 : Pas de difficulté.

THÉORÈME FONDAMENTAL 18 : **Un équivalent permet d'obtenir la limite d'une suite**
Si $\begin{cases} u_n \sim v_n \\ v_n \mapsto l \in \overline{\mathbb{R}} \end{cases}$, alors $u_n \mapsto l$.

Preuve 18 : On a $u_n = v_n(1+\varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \to 0$.

THÉORÈME 19 : **Un équivalent simple permet d'obtenir le signe d'une suite**
Si deux suites sont équivalentes : $u_n \sim v_n$ alors elles sont de même signe à partir d'un certain rang.

Preuve 19 : Dans le cas où $v_n \neq 0$, on a : $\dfrac{u_n}{v_n} = 1 + o(1)$. Par conséquent, $\dfrac{u_n}{v_n} \geq 0$ à partir d'un certain rang.

Remarque 17. Lorsqu'une suite (u_n) admet pour limite 0 ou l'∞, un équivalent de u_n donne la "vitesse" à laquelle u_n tend vers cette limite.
Ainsi :

1. si $u_n \sim \dfrac{1}{n}$ et $v_n \sim \dfrac{1}{n^2}$, comme $\dfrac{1}{n^2} = o(\dfrac{1}{n})$, alors $v_n = o(u_n)$ et donc (v_n) tend plus rapidement vers 0 que (u_n).
2. si $u_n \sim n^2$ et $v_n \sim e^n$, comme $n^2 = o(e^n)$, alors $u_n = o(v_n)$ et donc (v_n) tend plus rapidement vers $+\infty$ que (u_n).

2.4 Recherche pratique d'équivalents

Pour rechercher la limite d'une suite (u_n), il est très utile de commencer par en rechercher un équivalent !!

2.4.1 Les équivalents usuels

Nous admettrons pour l'instant les équivalents classiques suivants :

THÉORÈME 20 : **Equivalents usuels**
Soit (u_n) une suite telle que $\boxed{u_n \mapsto 0}$.
Alors :

1. $\sin u_n \sim u_n$
2. $\tan u_n \sim u_n$
3. $\operatorname{sh} u_n \sim u_n$
4. $\operatorname{th} u_n \sim u_n$
5. $\arcsin u_n \sim u_n$
6. $\arctan u_n \sim u_n$
7. $[1-\cos u_n] \sim u_n^2/2$
8. $[1-\operatorname{ch} u_n] \sim -u_n^2/2$
9. $\ln(1+u_n) \sim u_n$
10. $[e^{u_n}-1] \sim u_n$
11. $[(1+u_n)^\alpha - 1] \sim \alpha u_n$
lorsque $\alpha \in \mathbb{R}^*$

`Exemple 19.` Donner des équivalents des suites suivantes :

1. $u_n = \sqrt{1 - \dfrac{\sin\frac{1}{n}}{n^2}} - 1$
2. $v_n = e^{n^2 e^{-n}+1} - e$
3. $w_n = \ln(\cos\dfrac{1}{n})$

PROPOSITION 21 : **Formule de Stirling**
Nous avons :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Preuve 21 : Admise car la démonstration fait l'objet de problèmes usuels.

`Exemple 20.` $(*)$ Déterminer un équivalent de $\dbinom{2n}{n}$

2.4.2 Produit, quotient et puissance d'équivalents

THÉORÈME 22 : **Produit, quotient, puissance d'équivalents**
Soient quatre suites (u_n), (a_n) et (v_n), (b_n) vérifiant $\boxed{u_n \sim a_n \text{ et } v_n \sim b_n}$ alors :

1. $u_n v_n \sim a_n b_n$
2. $\dfrac{u_n}{v_n} \sim \dfrac{a_n}{b_n}$ (si v_n et b_n ne s'annulent pas)
3. $u_n^\alpha \sim a_n^\alpha \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$ (uniquement pour des suites à termes positifs lorsque $\alpha \notin \mathbb{Z}$).
⚠ α est un réel qui ne doit pas dépendre de n.

Preuve 22 : Il suffit d'utiliser la définition.

⚠⚠⚠. On peut multiplier ou diviser des équivalents, mais nous allons voir qu'on ne peut pas les additionner ou prendre leur image par une fonction quelconque (exponentielle, logarithme etc ...) sans prendre certaines précautions.

`Exemple 21.`

1.	Somme :	Soit $\begin{cases} u_n = n^3+n \\ v_n = -n^3+n^2 \end{cases}$.	On a alors	$\begin{cases} u_n \sim n^3 \\ v_n \sim -n^3 \end{cases}$	et pourtant	$(u_n+v_n) \not\sim 0$
2.	Exponentielle :	Soit $u_n = n^2+n$.	On a alors	$u_n \sim n^2$	et pourtant	$e^{u_n} \not\sim e^{n^2}$
3.	Logarithme :	Soit $u_n = 1+1/n$.	On a alors	$u_n \sim 1$	et pourtant	$\ln u_n \not\sim \ln 1$.

2.4.3 Logarithme et exponentielle d'équivalents

Théorème 23 : **Logarithme et Exponentielle d'équivalents**

Soient $(u_n),\ (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, telles que : $u_n \sim a_n$:

- Si $u_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}\backslash\{1\}$ alors $\ln u_n \sim \ln a_n$
- Si $u_n \to 1$ alors $\ln u_n = \ln(1+(u_n-1)) \sim u_n - 1$
- Si $u_n - a_n \to 0$ alors $e^{u_n} \sim e^{a_n}$

Preuve 23 : Pas de difficulté.

`Exemple 22.` Déterminer un équivalent simple des suites de terme général :

1. $u_n = \ln(\sin \dfrac{1}{n})$.
2. $v_n = e^{(\sin \frac{1}{n})}$.

Remarque 18.

Un *équivalent simple* d'une suite est un produit-quotient de suites de références. Par exemple : $\dfrac{\sqrt{2\pi n}}{2^{n^2}}, \dfrac{n^3.\ln^2 n}{3^n}$ ...
En particulier, un équivalent simple ne sera jamais une somme de suites.

`Exemple 23.` Prouver que :

1. $\dfrac{1}{\pi(n+1)} \sim \dfrac{1}{\pi n}$
2. $e^{n^2+n+\frac{1}{n}} \sim e^{n^2}.e^n$
3. $\ln(n^2+n+1) \sim 2\ln n$
4. $\dfrac{\pi n^2+3n}{4.3^n - 2^{n+1}} \sim \dfrac{\pi n^2}{4.3^n}$
5. $\sqrt{\ln(n+1)-\ln n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
6. $\dfrac{\ln(n^2+1)}{n+1} \sim \dfrac{2\ln n}{n}$
7. $\dfrac{e^n+n!}{n+1} \sim (n-1)!$
8. $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$
9. $\dfrac{e^n+e^{-n}+n}{\sqrt{n^2+n}-n} \sim 2e^n$
10. $e^{n^2+n!+\frac{1}{n}} \sim e^{n^2+n!}$
11. $\ln(n^2+3^n)-\ln(n^2+4^n) \sim n\ln\dfrac{3}{4}$
12. $\dfrac{\ln n + n!}{n^2+(n+1)!} \sim \dfrac{1}{n+1}$

⚠⚠⚠. Contrairement aux "o" et aux "O", on ne peut supprimer les constantes multiplicatives dans les équivalents.

Cas des suites de la forme $u_n = a_n^{b_n}$
Lorsqu'une suite se présente sous la forme $u_n = a_n^{b_n}$, il faut commencer par l'exprimer sous la forme

$$u_n = e^{b_n.\ln(a_n)}$$

On essaie alors de faire apparaître les équivalents connus pour le logarithme et l'exponentielle ...

⚠⚠⚠. Si $\begin{cases} u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \\ v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \end{cases}$, alors $u_n^{v_n}$ ne tend pas forcément vers 1 : c'est une forme indéterminée 1^∞ !

`Exemple 24.` Trouvez la limite des suites de terme général : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ et $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$.

2.4.4 Recherche d'un équivalent d'une somme

Si $u_n = a_n + b_n$.

1. Chercher un équivalent simple des suites (a_n) et (b_n) : $\begin{cases} a_n = \alpha_n + o(\alpha_n) \\ b_n = \beta_n + o(\beta_n) \end{cases}$.
2. (a) Si les deux équivalents ne sont pas du même ordre de grandeur :
   Si par exemple $\beta_n = o(\alpha_n)$, alors $u_n = \alpha_n + o(\alpha_n)$ et donc $\boxed{u_n \sim \alpha_n}$.
   (b) Si $\alpha_n + \beta_n \neq 0$:
   Alors $\beta_n = \lambda\alpha_n$ avec $\lambda \neq -1$ et on a $u_n = (\lambda+1)\alpha_n + o(\alpha_n)$ et donc $\boxed{u_n \sim (\lambda+1)\alpha_n}$
   (c) Si $\beta_n + \alpha_n = 0$:
   Alors on re-transforme u_n en essayant de faire apparaître les équivalents usuels ou en utilisant les développements Limités.

`Exemple 25.` Montrer que :

1. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} \sim \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
2. $\ln(1+1/n^2) + \sin(1/n) \sim \dfrac{1}{n}$
3. $\ln(1+1/n) + \sin(2/n) \sim \dfrac{3}{n}$
4. $\sqrt{\cos(1/n)} - e^{\sin(1/n^2)} \sim \dfrac{-5}{4n^2}$
5. $\ln(n^2+3) - \ln(n^2+1/n) \sim \dfrac{3}{n^2}$
6. $\cos\Big(\ln\big(1+\sin(1/n)\big)\Big) - e^{\sin(1/n)} \sim -\dfrac{1}{n}$
7. $e^{\sin\frac{1}{n^2}} - \sqrt{1+e^{-n}} \sim \dfrac{1}{n^2}$
8. $\ln(n^2+2^n) \sim n\ln 2$
9. $\ln\Big(\dfrac{en^2+1}{n^2+n}\Big) - \cos(1/n) \sim \dfrac{-1}{n}$

`Exemple 26.` Cas d'une suite où la recherche d'un équivalent passe par les Développements Limités :

$$(u_n)\ /\ u_n = \ln(n\sin\frac{1}{n})$$

2.4.5 Application à l'étude de la convergence des suites fonctionnelles

Lorsqu'une suite fonctionnelle fait apparaître une forme indéterminée, on pourra la lever en utilisant les équivalents plutôt que les limites usuelles.

`Exemple 27.` Rechercher la limite des suites suivantes et en donner un équivalent. :

1. $u_n = \sin[\tan(\ln(n+1) - \ln n)]$ 2. $v_n = \dfrac{\sqrt{\cos\frac{1}{n}} - 1}{\ln(n+1) - \ln n}$ 3. $w_n = \dfrac{\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{1-\cos e^{-n}}$

⚠⚠⚠. Inutile de s'acharner à trouver un équivalent de u_n lorsque l'objectif est simplement de rechercher sa limite !

`Exemple 28.` Trouvez les limites des suites de terme général : $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$ et $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

Exercice : 7

Etudier la convergence de la suite de terme général : $u_n = \left(\cos\dfrac{1}{n}\right)^{n^4\sin\frac{1}{n^2}}$

Remarque 19. Lorsqu'une suite converge vers un réel l, on pourra étudier la vitesse de convergence vers l en recherchant un équivalent de $v_n = u_n - l$.

`Exemple 29.` Vitesse de convergence de (u_n) définie par : $u_n = \ln\dfrac{en}{n+1}$.

3 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Réponses attendues
23.	Pouvez-vous redéfinir les notations $''O''$, $''o''$ et $''\sim''$ pour les suites ?	cf cours
24.	Utilisez les notations $''O''$, $''o''$ et $''\sim''$ pour comparer 2^n et n^{100}.	$\left\{\begin{array}{l} 2^n = o(n^{100}) \\ 2^n = O(n^{100}) \end{array}\right.$
25.	Pourquoi ne faut-il "jamais" écrire $u_n \sim 0$?	cf cours
26.	Donner 3 utilisations possibles des équivalents.	cf cours
27.	Dans quels cas l'implication $u_n \sim v_n \Rightarrow f(u_n) \sim f(v_n)$ est fausse ?	cf cours
28.	Comment faire pour trouver un équivalent de $\ln u_n$? De e^{u_n} ? De $u_n + v_n$?	cf cours
17.	Rappeler les définitions usuelles de $f = O(g)$, $f = o(g)$ et $f \sim g$ au $\mathcal{V}(a)$.	cf cours
18.	Equivalent de $f(x) = x^2 + x + \ln x$ au voinage de 0 et de $+\infty$.	Au $\mathcal{V}(0)$: $f(x) \sim \ln x$ Au $\mathcal{V}(+\infty)$: $f(x) \sim x^2$
19.	Pourquoi ne faut-il (presque) jamais écrire $f \sim 0$ au voisinage d'un point ?	cf cours
20.	Sauriez-vous prouver que $\left\{\begin{array}{l} f = o(u) \\ g = o(v) \end{array}\right. \Rightarrow fg = o(uv)$	cf cours
21.	Justifier pourquoi il n'y a aucune implication entre $f \underset{a}{\sim} g$ et $f(x) - g(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.	cf cours
22.	Pourquoi la relation $\sim$ est dite "relation d'équivalence" ? En citer d'autres !	cf cours
23.	Connaissez-vous les équivalents des fonctions usuelles au voisinage de 0 ?	cf cours
24.	Pourquoi un équivalent ne doit pas être donné sous la forme d'une somme ?	cf cours
25.	A quoi peuvent servir les équivalents ?	3 réponses !
26.	Quels calculs peut-on faire ou ne pas faire avec les équivalents ?	cf cours
27.	Comment déterminer l'équivalent d'une somme ?	cf cours
28.	Comment faire pour obtenir un équivalent d'un logarithme ou d'une exponentielle ?	cf cours

4 Exercices

1) Les suites

1. Pour comparer deux suites au voisinage de $+\infty$, on recherche la limite de leur rapport.
   (a) Si cette limite est nulle ou égale à l'∞ alors l'une est négligeable devant l'autre
   (b) Si cette limite vaut 1 alors ces deux suites sont équivalentes.
2. Pour déterminer un équivalent, on utilise généralement les opérations usuelles : multiplication, rapport, puissance constante
3. Attention aux 3 cas suivants :
   (a) Pour une somme de suite, on compare les deux termes de la somme.
   (b) Pour un logarithme, on regarde si la limite de l'argument vaut 1 ou autre chose.
   (c) Pour une exponentielle, on regarde si la limite de la différence entre l'argument et son équivalent est nulle.

Exercice de TD : 1

(♡) Ordonner les suites dont les termes généraux sont donnés ci-dessous de façon à ce que toute suite soit négligeable devant la suite qui la suit. Vous utiliserez la notation « << ».

1. $\sqrt{n}$
2. $\ln n$
3. $n.\ln n$
4. e^n
5. $\dfrac{\ln n}{n}$
6. $(\ln n).e^n$
7. n^2+n^3
8. $\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}$
9. $n.\sqrt{n}$
10. $\dfrac{1}{n}$
11. $n^2.\ln n$
12. $n+\sqrt{n}$
13. $n.(\ln n)^2$
14. $n.e^n$
15. $n^4+\ln n$
16. n^2+e^{2n}
17. $\ln n+(\ln n)^2$
18. $\sqrt{n}.\ln n$

Exercice de TD : 2

(♡) Déterminez des équivalents des suites suivantes puis en déduire leur limite.

1. $u_n=\dfrac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{n})}$
2. $u_n=\dfrac{\ln n^3+1}{\ln n+(\ln n)^2}$
3. $u_n=n^2.\ln\dfrac{n+1}{n+2}$
4. $u_n=n\big[\sin\dfrac{1}{n}+\ln(1+\dfrac{1}{n^2})\big]$
5. $u_n=(n^2+\ln n).\ln(1+e^{-n})$
6. $u_n=\dfrac{n^2+2n+3}{n+\ln n}(\sin\dfrac{1}{n}+e^{-n})$
7. $u_n=\big(1+\dfrac{n^2+1}{n^3+\ln n}\big)^{n+\sqrt{n}}$

Exercice de TD : 3

(∗∗) Montrer que $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k!$ est équivalent à $n!$ et déterminer un équivalent de $\dfrac{1}{n!}\big(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k!\big)-1$

Exercice de TD : 4

(♡) Soit $a>1$.

1. En posant $u_n=\dfrac{a^n}{n!}$, montrer l'existence d'un entier n_0 tel que : $\forall n\geq n_0,\ 0\leq u_{n+1}\leq\dfrac{u_n}{2}$.
2. En déduire que $a^n=o(n!)$

Exercice de TD : 5

(∗∗) On considère la suite (u_n) définie par u_1 et vérifiant pour tout $n\geq 1$: $\ln(n+1)u_{n+1}-\ln(n)u_n=n$.
En faisant intervenir une suite télescopique, déterminer un équivalent de u_n.

Exercice de TD : 6

(∗∗) Pour tout entier n on définit : $K_n=\displaystyle\int_0^1 e^t t^n\,dt$.

1. Montrer que la suite (K_n) est positive et décroissante.
2. A l'aide d'une intégration par partie, donner une relation de récurrence entre K_n et K_{n+1}
3. Montrer que la suite (K_n) converge vers 0 et que $K_n\sim\dfrac{e}{n}$.

Exercice de TD : 7

(♡♡) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On admet que l'équation $x - \ln x = n$ admet une unique solution u_n dans $[1,\ +\infty[$.

1. Montrer que (u_n) diverge vers $+\infty$
2. Montrer que $u_n \sim n$ et que $u_n - n \sim \ln n$.

2) Les fonctions

Mêmes conseils que pour les suites.

Exercice de TD : 8

(♡) Déterminer, les limites en a des fonctions suivantes en recherchant éventuellement un équivalent :

1.	$f(x) = \dfrac{2}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{1-\cos x}$	en	$a = 0$	2.	$f(x) = \dfrac{1}{x^2}.\exp(\dfrac{1}{\sin x})$	en	$a = 0^-$
3.	$f(x) = \ln^2(x+1) - \ln^2 x$	en	$a = +\infty$	4.	$f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}.\sin\dfrac{1}{x}$	en	$a = 0$
5.	$f(x) = \dfrac{\sin x - \sqrt{3}\cos x}{2\cos x - 1}$	en	$a = \dfrac{\pi}{3}$	6.	$f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} - \sqrt{x}$	en	$a = +\infty$
7.	$f(x) = (\sin x)^x$	en	$a = 0^+$	8.	$f(x) = \dfrac{\ln(\sin^2 x)}{x - \frac{\pi}{2}}$	en	$a = \dfrac{\pi}{2}$
1.	$f(x) = \dfrac{xe^{-x} + x^2}{x - \ln x}$	en	$a = +\infty$	2.	$f(x) = \dfrac{x + \sin x}{x \ln x}$	en	$a = 0^+$
3.	$f(x) = \dfrac{x^{\ln x}}{\ln x}$	en	$a = +\infty$	4.	$f(x) = \dfrac{x\ln x - x}{x + \cos x}$	en	$a = +\infty$
5.	$f(x) = \left(\dfrac{x}{\ln x}\right)^{\frac{\ln x}{x}}$	en	$a = +\infty$	6.	$f(x) = \dfrac{\ln x + x^2}{\ln(x + x^2)}$	en	$a = 0^+$
7.	$f(x) = \dfrac{\sqrt{xe^x - x^2}}{\operatorname{ch} x}$	en	$a = +\infty$				