Analyse Asymptotique 2 :
-
Les Développements Limités

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

24 janvier 2018

1 Définitions

DÉFINITION 1 : **DL**
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ avec I un intervalle et un point $x_0 \in \overline{I}$ (f n'est donc pas nécessairement définie en x_0).
On dit que la fonction f admet un *développement limité* en x_0 à l'ordre n (que l'on notera $DL(x_0, n)$)
si $\forall x \in I$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o\big((x - x_0)^n\big) \quad \text{au voisinage de } x_0$$

Le polynôme $F(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ est la *partie régulière* du DL.
La différence $R(x) = o\big((x - x_0)^n\big) = f(x) - F(x)$ est le *reste* du DL.

Remarque 1. On peut interpréter $F(x)$ comme le polynôme de degré n qui donne la *meilleure* approximation de $f(x)$ au voisinage de x_0.

Forme normalisée
Tout développement limité à l'ordre $n + p$ au voisinage d'un point x_0 s'écrit sous la forme :

$$f(x) = h^p(a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + o(h^n)) \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} a_0 \neq 0 \\ p,\ n \in \mathbb{N} \\ h = x - x_0 \end{cases}$$

On a alors : $f(x) \underset{x_0}{\sim} a_0(x - x_0)^p$ et $f(x)$ est donc du signe de $a_0(x - x_0)^p$ au voisinage de x_0.

`Exemple 1.` $(*)$ **Fonction non nulle dont tous les DL en 0 sont nuls**
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f(x) = o(x^n)$ au voisinage de 0.
2. Conclure.

THÉORÈME 1 : **Caractérisation de la Continuité et de la dérivabilité en x_0**
Soit f une fonction définie sur I contenant x_0.

1. f est continue en x_0 ssi f admet un $DL(x_0,\ 0)$. Dans ce cas, $f(x) = f(x_0) + o(1)$
2. f est dérivable en x_0 ssi f admet un $DL(x_0,\ 1)$. Dans ce cas, $f(x) = f(x_0) + f'(x_0).(x - x_0) + o(x - x_0)$

Preuve 1 : Les deux équivalences proviennent de la traduction des limites sous forme d'égalités.

Remarque 2.

1. Ce théorème prouve que toute fonction n'admet pas nécessairement un $DL(x_0, n)$.
En effet, si une fonction définie en x_0 n'est pas dérivable en x_0, elle ne pourra pas admettre un $DL(x_0, n)$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Attention, ces deux caractérisations ne se généralisent pas !...
La fonction f telle que $f(x) = x + x^3 \cos \frac{1}{x}$ et $f(0) = 0$ montre en effet qu'une fonction peut admettre un $DL(0,\ 2)$ sans pour autant être deux fois dérivable en 0.

Théorème 2 : **Unicité d'un DL et applications**
Soit une fonction f admettant un $DL(0,\ n)$. Alors :

1. la partie régulière est unique
2. Pour tout $k \leq n$, f admet un $DL(0,\ k)$ obtenu en tronquant la partie principale du $DL(0, n)$ à l'ordre k
3. Si f est paire (resp. impaire) sur un voisinage de 0, alors F est un polynôme pair (resp. impair).

Preuve 2 :

1. Immédiat par l'absurde !
2. En effet, le reste obtenu ainsi est bien un $o(x^k)$.
3. Facile par l'absurde !

Remarque 3. Soit f une fonction qui admet un DL à l'ordre $(2n + 2)$, alors son DL s'écrit :

1. Si la fonction f est paire : $f(x) = a_0 + a_2x^2 + a_4x^4 + \cdots + a_{2n}x^{2n} + \boxed{o(x^{2n+1})}$
2. Si la fonction f est impaire : $f(x) = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + \cdots + a_{2n+1}x^{2n+1} + \boxed{o(x^{2n+2})}$

Remarque 4. Par un changement de variables $h = x - x_0$, on peut toujours se ramener au cas où $x_0 = 0$.
Dorénavant, nous nous intéresserons donc essentiellement aux DL en 0.

Exercice : 1

$(*)$ Déterminer les DL(0,3) des fonctions f de classe $\mathcal{C}^3$ au voisinage de 0 vérifiant l'équation fonctionnelle $f(x) = x^2 + f(2x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2 Méthodes de recherche d'un DL(x_0, n)

Pour obtenir des DL sous Python, vous pourrez utiliser la fonction `series()` de la bibliothèque `sympy`.

2.1 Premiers DL

Proposition 3 : **DL de $\frac{1}{1-x}$**

La fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\backslash\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{1-x} \end{array}$ admet un DL$(0,\ n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\boxed{\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}}$ avec $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o(x^n)$

Pour cette fonction, on connaît *explicitement* le reste du DL.

Preuve 3 : On applique la formule bien connue : $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = ...$

Remarque 5. En remplaçant x par $-x$, x^2 ou $-x^2$ dans l'expression précédente, on en déduit les $DL(0,\ n)$ des fonctions suivantes :

2. $\boxed{\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)}$

3. $\boxed{\frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + o(x^{2n})}$

4. $\boxed{\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o(x^{2n})}$

2.2 Obtention par primitivation

THÉORÈME 4 : **Primitivation d'un DL**
Soit un intervalle I contenant 0 et une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^0$ sur I.
On suppose que la fonction f admet un $DL(0,\ n)$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o(x^n)$$

Alors toute primitive F de f sur un voisinage de 0 admet un $DL(0,\ n+1)$ obtenu en primitivant la partie régulière et en ajoutant $F(0)$:

$$F(x) = \boxed{\mathrm{F}(0)} + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Preuve 4 : Il s'agit de prouver que $g(x) = F(x) - (F(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \cdots + a_n \frac{x^{n+1}}{n+1})$ est un $o(x^{n+1})$.
On a en évidence $g'(x) = o(x^n)$, c'est à dire $\frac{g'(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.
Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe donc un voisinage $V_u =]-u\ ;\ u[$ de 0 sur lequel $|g'(t)| \leq \varepsilon.|t^n|$.
On mq $\frac{g(x)}{x^{n+1}} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ en prenant $x \in V_u$ et en appliquant l'inégalité des accroissements finis entre 0 et $x \in V_u$.

Remarque 6. Au $\mathcal{V}(x_0)$, le théorème appliqué à $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$ donne :

$$F(x) = F(x_0) + a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \cdots + a_n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + o((x - x_0)^{n+1})$$

Ainsi, on obtient facilement :

5. $\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)}$

6. $\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})}$

2.3 Obtention par Taylor-Young

THÉORÈME 5 : **Taylor-Young au voisinage de x_0**
Soit une fonction f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I avec $x_0 \in I$. Alors f possède un $DL(x_0,\ n)$ donné par la formule de Taylor-Young :

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)}$$

Preuve 5 : On démontre ce résultat par récurrence en utilisant le théorème de primitivation d'un DL.

Remarque 7. Ce théorème est en particulier un théorème d'existence que l'on pourra utiliser pour justifier l'existence d'un DL à l'ordre n.

Remarque 8. Au voisinage de 0 la formule de Taylor-Young est alors :

$$\boxed{f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)}$$

En appliquant le théorème de Taylor-Young, on obtient les $DL(0,\ n)$ suivants valables pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

7. $\boxed{e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)}$

8. $\boxed{\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$

9. $\boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$

10. $\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})}$

11. $\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})}$

12. $\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}}$

Deux cas particuliers lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -\frac{1}{2}$:

13. $\boxed{\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)}$

14. $\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + o(x^2)}$

Par primitivation on obtient aussi les deux DL au $\mathcal{V}(0)$ suivants :

15. $\boxed{\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$

16 . $\boxed{\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)}$

Exercice : 2

$(*)$ Déterminer un DL à l'ordre 4 en $x_0 = 2$ de la fonction exp.

Exercice : 3

$(*)$ Démontrer que au voisinage de 0, on a : $\arctan(\frac{1}{x}) = \varepsilon\frac{\pi}{2} - x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)$ où $\begin{cases} \varepsilon = 1 \text{ si } x > 0 \\ \varepsilon = -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

Réciproquement :
Un développement limité en x_0 à l'ordre n **d'une application $\mathcal{C}^n$ sur** I (avec $x_0 \in I$) permet de déterminer les valeurs de $f(x_0)$, $f'(x_0)$ $\ldots f^{(n)}(x_0)$.
D'après la formule de Taylor-Young et l'unicité du $DL(0,\ n)$ on obtient :

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \qquad f^{(k)}(x_0) = k!a_k$$

`Exemple 2.` $(*)$ L'application f définie par $f(x) = \operatorname{ch}(\ln(1+x))$ admet pour $DL(0,3)$: $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x^3 + o(x^3)$.
Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et $f^{(3)}(0)$.

Exercice : 4

$(**)$ Déterminer les valeurs de $\arcsin^{(n)}(0)$.

2.4 Dérivation d'un DL

Remarque 9. On a vu qu'on pouvait primitiver sans soucis les développements limités. En revanche, il faudra être très prudent avant de dériver un DL.

Théorème 6 : Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0.

$\boxed{\text{Si}}$ $\begin{cases} f \text{ admet un } DL(0,\ n) \\ f' \text{ admet un } DL(0,\ n-1) \end{cases}$, $\boxed{\text{alors}}$ le DL de f' s'obtient en dérivant celui de f.

Preuve 6 : On exprime le DL(0, n-1) de f' est on lui applique le théorème de primitivation.

Remarque 10. Le théorème précédent pourra par exemple s'appliquer dans le cas des fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$.

Remarque 11. Le théorème précédent sous-entend que f peut admettre un $DL(0,\ n)$ sans que f' admette un $DL(0,\ n-1)$. Vérifiez cela en considérant la fonction définie par : $f(x) = x^2 + x^4.\cos(\frac{1}{x})$.

2.5 Opérations sur les DL

2.5.1 Combinaison linéaire de DL

Théorème 7 : **Combinaison linéaire de DL**
Soient deux fonctions f et g qui admettent des $DL(0,\ n)$ de partie régulière respectives $F(x)$ et $G(x)$.
Soient deux scalaires $(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{R}2$.
La fonction $\lambda f + \mu g$ admet alors un $DL(0,\ n)$ de partie régulière $\lambda F(x) + \mu G(x)$.

Preuve 7 : Pas de difficulté.

`Exemple 3.` $(*)$ Déterminer un DL(0, n) de la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$.

`Exemple 4.` $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Retrouver les DL(0, 2n) des fonctions ch et sh.

2.5.2 Produit de DL

Théorème 8 : **Produit de DL**
Si deux fonctions f et g admettent des $DL(0,\ n)$ de parties régulières $F(x)$ et $G(x)$, alors la fonction fg admet un $DL(0,\ n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur à n dans le polynôme $F(x)G(x)$.

Preuve 8 : Il suffit de l'écrire ...

Remarque 12. Dans un produit de DL d'ordre n, les termes de degré $> n$ n'ont aucune signification !

Exercice : 5
$(*)$ Prouver qu'au voisinage de 0 on a les DL suivants :

1. $\cos(x)\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{5}{8}x^2 + o(x^2)$
2. $\sin(x)\exp(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$
3. $\frac{\ln(1+x)}{1-x} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o(x^3)$
4. $\frac{\sin x \operatorname{sh} x}{\sqrt{1-x^2}} = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^5)$

Remarque 13.
Pour obtenir un $DL(0,\ n)$ d'un produit $f.g$, il n'est par toujours nécessaire de rechercher un $DL(0,\ n)$ de f et de g. En effet, si par exemple le DL de f peut se factoriser par x^k, on pourra se contenter pour g d'un DL à l'ordre $n-k$.

`Exemple 5.` $(*)$ DL(0,5) de $f(x) = \sin^2 x.\arcsin(2x)$

2.5.3 Composition de DL

Théorème 9 : **Composée de DL**

Si $\begin{cases} \text{la fonction } f \text{ admet un } DL(0,\ n) \text{ de partie régulière } F \\ \text{la fonction } u \text{ admet un } DL(0,\ n) \text{ de partie régulière } U \text{ avec } \boxed{u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0} \end{cases}$

alors $\boxed{f \circ u}$ admet un $DL(0,\ n)$ de partie régulière obtenue en ne gardant que les termes de degré inférieur ou égal à n dans le polynôme $F \circ U(x)$.

Preuve 9 : Là encore, il suffit de l'écrire ...

Détermination du DL(0,n) de $f(u(x))$

1. On commence par calculer $f(u(x))$ en remplaçant $u(x)$ par son DL(0,n).
   On obtient alors une expression de la forme $h(X)$ où X est un DL(0,n) sans terme constant.
2. On utilise alors le DL(0,n) de $h(X)$ pour finir le calcul...

`Exemple 6.` $(*)$ Trouver les DL(0, 3) des fonctions :

1. $f(x) = \ln(1 + \sin x)$
2. $g(x) = \sin(\operatorname{sh} x)$
3. $h(x) = e^{\sqrt{1+x}}$
4. $i(x) = \operatorname{ch}(\ln(1 + x))$

Exercice : 6

$(*)$ Prouver qu'au voisinage de 0 on a les DL suivants :

1. $\ln(1 + x + \sqrt{1 + x}) = \ln 2 + \frac{3}{4}x - \frac{11}{32}x^2 + o(x^2)$
2. $\arctan\left(\frac{2+x}{1+x}\right) = \arctan 2 - \frac{1}{5}x + \frac{3}{25}x^2 + o(x^2)$
3. $\sqrt{1 + \sqrt{1 + x}} = \sqrt{2} + \frac{1}{8}\sqrt{2}x - \frac{5}{128}\sqrt{2}x^2 + o(x^2)$
4. $\ln(1 + \sin^2 x) = x^2 - \frac{5}{6}x^4 + o(x^4)$

2.5.4 Inverse d'un Développement Limité

Théorème 10 : Si f admet un DL(0, n) et si $\boxed{f(0) \neq 0}$, alors $\frac{1}{f}$ admet un DL(0, n).

Preuve 10 : On commence par écrire f sous la forme : $f(x) = f(0)(1 + u(x))$.
La fonction u admet un DL(0, n) et $u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. On peut donc appliquer le théorème de composition des DL.

Pour déterminer un DL(0, n) ou un DA (développement asymptotique) de $\frac{1}{f}$

1. On remplace f par son DL, puis on factorise le terme de plus bas degré pour obtenir la forme : $\frac{1}{1+\ldots}$
2. On trouve alors un DL(0, n) de $\frac{1}{f}$ en utilisant le DL de $\frac{1}{1+x}$

Remarque 14. On pourra utiliser cette méthode pour rechercher un DL(0, n) d'un quotient $\frac{f}{g}$.

`Exemple 7.` $(*)$ Déterminer le DL(0, 5) de $f(x) = \frac{1}{2-x+x^2}$.

Exercice : 7

$(*)$ Déterminer le DL(0, 5) de la fonction tangente, en utilisant $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

Retenir le DL suivant au moins jusqu'à l'ordre 3 : 16. $\boxed{\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^7)}$

Exercice : 8

$(*)$ Déterminer un DL(0, 2) de $f(x) = \frac{\sin x - x}{\tan x - x}$.

Remarque 15. Et si $f(0) = 0$?
Au lieu de trouver un DL(0, n), la méthode précédente permet de déterminer un DA (*développement asymptotique*) de $\frac{1}{f}$.

`Exemple 8.` $(*)$ Déterminer un développement symptotique de $\frac{1}{\sin x}$ au $\mathcal{V}(0)$.

2.5.5 Autres situations utilisant la composition

Ces "autres situations" sont présentées dans les 3 exercices suivants :

Exercice : 9

(∗∗) **Développement limité d'une fonction vérifiant une ED :**
Retouver un DL(0,5) de la fonction tangente en utilisant la relation $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$ valable au $\mathcal{V}(0)$.

Remarque 16. La méthode présentée dans l'exercice précédent ne marche que si :

- f admet bien un DL(0,n), ce que l'on montre en général en prouvant que f est $\mathcal{C}^n$ au $\mathcal{V}(0)$.
- f' admet un DL(0,n-1), ce que l'on montre en général en prouvant que f est $\mathcal{C}^{n-1}$ au $\mathcal{V}(0)$.

Exercice : 10

(∗∗) **Développement limité de la bijection réciproque :**
Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \operatorname{ch} x$.

1. Montrer que f admet une réciproque impaire et $\mathcal{C}^\infty$
2. Justifier l'existence d'un DL(0,6) de f^{-1} et déterminez le !

Remarque 17. La méthode présentée dans l'exercice précédent ne marche que si :

- $f(0) = 0$
- f^{-1} admet un DL(0,n), ce que l'on montre en général en prouvant que f est un $\mathcal{C}^n$ difféomorphisme au $\mathcal{V}(0)$.

Exercice : 11

(∗∗) **Développement limité d'une fonction vérifiant une relation fonctionnelle :**
Déterminer un DL(0,3) de la fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ au $\mathcal{V}(0)$ vérifiant au voisinage de 0 : $f(2x) = \frac{x}{2} f(x) - 1$

Remarque 18. La méthode présentée dans l'exercice précédent ne marche que si f admet un DL(0,n), ce que l'on montre en général en prouvant que f est $\mathcal{C}^n$ au $\mathcal{V}(0)$.

2.6 Méthode mnémotechnique pour retenir certains DL(0, 2 ou 3)

Comment se souvenir du DL(0, 2) ou DL(0, 3) d'une fonction ?

1. Les deux premiers termes de ce DL correspondent à l'équation de la tangente : $f(0) + f'(0)x$
2. Le signe du terme suivant s'obtient en comparant la position de la courbe par rapport à sa tangente.
   Pour la valeur de ce terme, il vous faudra tout de même faire un petit effort de mémoire... On pourra cependant retenir le tableau suivant :

Fonction	sin - sh - arcsin	cos - ch	tan - arctan - th
Valeur du 2ième terme significatif du DL(0, n)	$\pm\frac{x^3}{6}$	$\pm\frac{x^2}{2}$	$\pm\frac{x^3}{3}$

3 Applications des développements limités

De façon générale, les développements limités seront utiles lorsqu'on étudie localement des expressions faisant intervenir des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$. On exclura donc l'emploi de DL pour des études globales : sens de variation, majoration sur un intervalle, signe sur un intervalle, extremum globaux...

3.1 Recherche d'un équivalent

On rappelle ici que le fait de connaître un équivalent permet entre autre de déterminer la limite et le signe d'une fonction au voisinage d'un point.

La recherche d'un équivalent de $f(x)$ pose parfois des difficultés lorsque $f(x) = u(x) + v(x)$ avec les équivalents de $u(x)$ et de $v(x)$ qui s'annulent.

- On peut contourner cette difficulté en calculant $f(x)$ à l'aide de développements limités de $u(x)$ et de $v(x)$ contenant au moins 2 termes significatifs (puisque les premiers termes significatifs s'annulent).
- On effectue si nécessaire le changement de variables $h = (x - x_0)$ ou $h = \frac{1}{x}$ pour se ramener au $\mathcal{V}(0)$
- Lorsque, après calculs on obtient $f(x) = a_k(x-x_0)^k + o((x-x_0)^k)$ avec $a_k \neq 0$ alors $f(x) \underset{x_0}{\sim} a_k(x-x_0)^k$

Exercice : 12

(∗) Rechercher les limites en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \frac{\sin x - \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x^2}$
2. $g(x) = \frac{\sin x - \operatorname{sh} x}{x^3}$
3. $h(x) = \frac{\ln(\cos x) + \frac{\operatorname{sh}^2 x}{2}}{\sin^4 x}$

Exercice : 13

(∗) Trouver la limite de la suite de terme général $u_n = \left(\frac{\cos\frac{1}{n} + \operatorname{ch}\frac{1}{n}}{2}\right)^{n^4}$.

Exercice : 14

(∗) (CCP MP) Déterminer le signe au voisinage de $+\infty$ de : $u_n = \operatorname{sh}\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n}$.

3.2 Tangente à une courbe

Théorème 11 : **Position locale par rapport à la tangente**

Si une fonction f définie en x_0, admet un DL en x_0 de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_k(x-x_0)^k + o\big((x-x_0)^k\big), \quad a_k \neq 0 \quad \text{et} \quad k \geq 2$$

Alors

1. l'équation de la tangente en x_0 est : $\boxed{y = a_0 + a_1(x-x_0)}$
2. $f(x) - [a_0 + a_1(x-x_0)] \sim a_k(x-x_0)^k$.
   En fonction du signe de a_k et de la parité de k, on en déduit la position locale de la courbe par rapport à sa tangente
   - Si k est pair, alors $a_k(x-x_0)^k$ est de signe constant au $\mathcal{V}(x_0)$ et donc, au voisinage de x_0, la courbe est située au dessus ou au dessous de sa tangente.
   - Si k est impair, alors $a_k(x-x_0)^k$ change de signe en x_0 et le point $M_0(x_0,\ f(x_0))$ est un point d'inflexion.

Preuve 11 :

1. On a en effet $a_0 = f(x_0)$ et $a_1 = f'(x_0)$.
2. Cela provient du fait qu'une fonction est du signe de son équivalent au voisinage du point considéré.

Exercice : 15

(∗) Etude locale en 0 des fonctions définies par :

1. $f(x) = \frac{\sin x}{\operatorname{sh} x}$
2. $g(x) = \frac{\sin^2 x}{x}$
3. $h(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$
4. $i(x) = \frac{(e^{\operatorname{sh} x} - \cos x)^2}{\ln\cos x}$

3.3 Calcul des dérivées successives en un point x_0

THÉORÈME 12 : Le théorème de Taylor-Young nous dit que l'orsqu'une fonction est $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0, celle-ci admet une DL(x_0,n) de la forme :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n)$$

Ainsi, en recherchant par le calcul un DL(x_0,n) de $f(x)$ et en identifiant chacun des termes (unicité du DL), on obtient :

$$\forall k \in [\![0, n]\!] \quad \boxed{f^{(k)}(x_0) = a_k.k!}$$

`Exemple 9.` $(*)$ Rechercher les dérivées première et seconde en 0 des fonctions étudiées dans l'exemple précédent.

3.4 Extremum local

PROPOSITION 13 : **Condition suffisante d'existence d'un extrémum local intérieur**
Si une fonction f continue sur I en $x_0 \in \mathring{I}$ admet un DL(x_0,p) de la forme :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_p(x - x_0)^p + o((x - x_0)^p) \quad \text{avec} \quad a_p \neq 0$$

Alors :

1. Si $a_1 \neq 0$, f n'admet pas d'extremum local en x_0.
2. Si $a_1 = 0$ alors f admet a_0 pour extremum local en x_0 si et seulement si $\boxed{p \text{ est pair}}$
   Dans ce cas :
   (a) a_0 est un minimum local si $a_p > 0$
   (b) a_0 est un maximum local si $a_p < 0$

Preuve 13 : Immédiat !

`Exemple 10.`
Prouver à l'aide d'un DL que la fonction f définie par $f(x) = (x - 1 - 2\ln 2)\ln(x + 1)$ admet un minimum local en $x_0 = 1$.

3.5 Prolongement d'une fonction

Grâce à un DL(0, 1), on peut immédiatement dire si une fonction est prolongeable par continuité en 0 et si son prolongement est dérivable en 0.

THÉORÈME 14 : **DL et prolongement**
Soit une fonction f définie sur l'intervalle $I \backslash \{x_0\}$ tel que $x_0 \in \bar{I}$.
On suppose que f admet un DL(x_0, n) en 0 de la forme : $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + o(x - x_0)$
Alors :

1. la fonction f se prolonge par continuité en x_0 en posant $f(x_0) = a_0$
2. le prolongement de f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a_1$

Preuve 14 : Ce théorème a déjà été démontré dans le cours sur la dérivation.

`Exemple 11.` $(*)$ Etudier le prolongement en 0 (continuité et dérivabilité) de $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ et de $g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Exercice : 16
$(*)$ Montrer que la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - e^{-x}}{x}\right)$ est prolongeable en 0 et que ce prolongement est dérivable en 0.

Exercice : 17
$(*)$ Prouver que f définie sur $]0, +\infty[\backslash\{1\}$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Remarque 19. On utilisera en particulier cette méthode lors du raccordement de solutions d'une équation différentielle.

Remarque 20. !!! L'existence pour une fonction f d'un DL(0, 1) au voisinage de 0 $\boxed{\text{privé de 0}}$ ne prouve pas que la fonction est continue et dérivable en 0. En revanche :

1. cela prouve que f est prolongeable par continuité en 0 en une fonction dérivable en 0.
2. si $f(0)$ existe, il permet de prouver d'une simple coup d'oeil que f est continue et dérivable en 0.

Remarque 21. !!! Le théorème précédent ne peut pas se généraliser.
On rappelle que l'existence d'un DL(x_0, n) avec $n \geq 2$ ne permet pas d'affirmer que la fonction est n fois dérivable en x_0.

3.6 Raccordement de solutions d'une équation différentielle non normalisée

Pour étudier la prolongeabilité par continuité et la dérivabilité des solutions aux points de raccordement, on peut utiliser avantageusement les développements limités.

`Exemple 12.` (∗∗) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $|x|y' + (x-1)y = x^3$.

Vous pourrez vérifier que l'on obtient :

1. *Solutions sur* $\mathbb{R}^{*+}$: $y_1(x) = \lambda x e^{-x} + x^2 - x$
2. *Solutions sur* $\mathbb{R}^{*-}$: $y_2(x) = \frac{\mu e^x + 6}{x} + x^2 + 3x + 6$

Exercice : 18

(∗∗) Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $x(x^2+1)y' + y + x = 0$
2. $2t(1+t)y' + (1+t)y = 1$
3. $(x+1)y' = y + 1$

4 Développements asymptotiques (ou DL Généralisés)

Définition 2 : **Développements limités généralisés**

Lorsque $\begin{cases} f(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x) + o(a_n(x)) \\ \forall k \in [\![1, n]\!],\ a_k(x) = o(a_{k-1}(x)) \end{cases}$ au voisinage de $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, alors on dit que :

$f(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_n(x) + o(a_n(x))$ est un développement asymptotique de $f(x)$ au voisinage de x_0

Remarque 22. On constate que les développements limités sont des développements asymptotiques particuliers.

Méthode générale

Pour obtenir un développement asymptotique de $f(x)$ au voisinage de $x_0 \in \bar{\mathbb{R}}$, on :

1. Commence par se placer au voisinage de 0 à l'aide d'un changement de variables
2. Utilise les DL au voisinage de 0 pour transformer l'expression $f(x)$
3. On ordonne enfin les termes significatifs obtenus du moins au plus négligeable

4.1 Exemples de Développements Asymptotiques au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$

Le principe est le même que dans le cas précédent, seulement ici on posera : $h = x - a$.

`Exemple 13.` (∗) Déterminer un développement asymptotique de $f(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ à la précision x^2 au voisinage de 0.

`Exemple 14.` (∗) Prouver qu'au voisinage de 1, on a :

$$\frac{3x^2 - 4x + 2}{(x-1)^3(x^2 - x + 1)} = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1} - 2 + (x-1) + o(x-1)$$

`Exemple 15.` (∗) Déterminer un équivalent de $(\operatorname{sh} x)\ln(\sin x) - x \ln x$ au voisinage de 0.

4.2 Exemples de Développements Asymptotiques au voisinage de $+\infty$

Il s'agit ici d'étudier le comportement d'une suite ou d'une fonction au voisinage de $+\infty$.
Pour se ramener à une étude au voisinage de 0, on posera $h = \frac{1}{n}$ dans la cas d'une suite et $h = \frac{1}{x}$ dans le cas d'une fonction.
On pourra alors utiliser les développements limités usuels au voisinage de 0 pour exprimer la suite ou la fonction comme une somme de termes de moins en moins significatifs au voisinage de l'∞.

`Exemple 16.` $(*)$ Etudier précisément les branches infinies des courbes représentatives des fonctions :

1. $f(x) = (x+2)e^{1/x}$
2. $g(x) = x^2 e^{\frac{x}{x^2-1}}$
3. $h(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+1}}$

`Exemple 17.`
$(*)$ Rechercher la limite en $+\infty$ de la fonction suivante : $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ et déterminer un équivalent de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x - e$.

A retenir ! !

Les développements asymptotiques au voisinage de $+\infty$ permettent de :

1. Etudier les branches infinies d'une fonction (asymptote et position par rapport à celle-ci)
2. Etudier la vitesse de convergence ou de divergence d'une suite.

Exercice : 19

$(**)$ Former le développement asymptotique, en $+\infty$, à la précision $1/n^2$ de : $u_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} k!$.

4.3 Cas des suites implicites

Méthode particulière

La méthode précédente marche lorsqu'on connaît une expression de u_n ou de $f(x)$.
Lorsque ce n'est pas le cas (cf l'exercice suivant) on peut procéder ainsi :

1.	On recherche un équivalent α_n de u_n.	On a alors :	$u_n = \alpha_n + o(\alpha_n)$.
2.	On recherche un équivalent β_n de $u_n - \alpha_n$. :	On a alors :	$u_n = \alpha_n + \beta_n + o(\beta_n)$.
3.	On recherche un équivalent γ_n de $u_n - \alpha_n - \beta_n$.	On a alors :	$u_n = \alpha_n + \beta_n + \gamma_n + o(\gamma_n)$.
4.		etc...	

Exercice : 20

$(**)$ Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $E_p : x + \ln x = p$.
Nous admettrons ici que cette équation admet une unique solution x_p divergeant vers $+\infty$.
Recherche d'un développement asymptotique de x_p :

1. Montrer que $x_p \sim p$.
2. Montrer que $x_p = p - \ln p + o(\ln p)$.
3. En déduire que $x_p = p - \ln p + \frac{\ln p}{p} + o(\frac{1}{p})$.

Exercice : 21

$(**)$ **Etude asymptotique d'une suite implicite**
On considère l'équation $\tan x = x$.

1. Montrer que pour tout entier n, cette équation admet une unique solution sur $]-\frac{\pi}{2}+n\pi,\ \frac{\pi}{2}+n\pi[$.
   On la note x_n.
2. Trouver un équivalent le plus simple possible de x_n.
3. On cherche maintenant un développement asymptotique de x_n.
   (a) En utilisant la périodicité de tan, montrer la convergence de $(x_n - n\pi)$ et trouver sa limite.
   (b) En remarquant que $\tan x_n \sim x_n$, déterminer un développement asymptotique de x_n à trois termes significatifs.

5 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Réponses attendues
1.	Comment procéder lorsqu'on vous demande de déterminer un DL au $(x_0 \neq 0)$?	On pose $t = x - x_0$ pour se placer au $\mathcal{V}(0)$
2.	Quels $DL(0,\ n)$ découlent du DL de $\frac{1}{1-x}$?	$\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{1}{1+x^2}$
3.	Que dire du $DL(0,\ n)$ d'une fonction paire ? D'une fonction impaire ?	cf cours
4.	L'existence d'un $DL(x_0,\ n)$ implique-t-il l'existence d'une dérivée nème en x_0 ?	Oui mais seult^t si $n = 1$ ou $n = 0$
5.	A quoi doit-on faire attention lorsqu'on applique le théorème de primitivation ?	Ne pas oublier le $f(0)$.
6.	Quels $DL(0,\ n)$ obtient-on facilement par primitivation ?	$\ln(1 + x)$, $\arctan x$, $\operatorname{argth} x$
7.	A quoi sert la formule de Taylor-Young ? Dans quel cas peut-on l'appliquer ?	cf cours
8.	Quels $DL(0,\ n)$ obtient-on facilement grace à Taylor-Young ?	$\left\{\begin{array}{l}\cos x\\ \sin x\end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l}\operatorname{ch} x\\ \operatorname{sh} x\end{array}\right.$ e^x et $(1 + x)^\alpha$
9.	Comment retrouver les $DL(0,\ 3)$ de $\arcsin x$ et $\arccos x$?	cf cours
10.	Donner une méthode pour calculer $f^{(k)}(x_0)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ d'une fonction $\mathcal{C}^n$ en x_0 ?	Identification avec les coef du $DL(x_0,\ n)$
11.	Quel piège doit-on éviter lorsqu'on utilise le théorème de dérivation d'un DL ?	cf cours
12.	Quand peut-on obtenir un $DL(0,\ n)$ de $f \circ u(x)$ au $\mathcal{V}(0)$ par composition ?	$u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$
13.	Si $f(x)$ admet un $DL(0,\ n)$, peut-on déterminer un $DL(0,\ n)$ de $\frac{1}{f(x)}$?	- OUI si $f(0) \neq 0$ - NON si $f(0) = 0$ mais dev^t asymptotique
14.	Rappeler la méthode pour déterminer le $DL(0,\ n)$ de la réciproque d'une bijection.	cf cours
15.	Rappeler la méthode mnémotechnique pour retrouver le DL(0, 2 ou 3) d'une fonction.	cf cours

16.	Citer les différentes applications des DL.	cf cours

6 Exercices

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

1) Entrainement au calcul de DL

Le calcul de développements limités nécessite des compétences que vous ne pourrez développer qu'à force d'entrainement. Non seulement, il vous faut connaître les développements limités du cours, mais vous devez faire preuve d'une grande vigilance lors des calculs. Enfin, un peu de pratique vous permettra de limiter vos calculs au strict minimum et gagner ainsi un temps précieux.
Voici une liste de développements limités et de développements asymptotiques sur lesquels je vous conseille très fortement de vous entraîner.

1. Pour la recherche classique de DL :
   (a) on se place au voisinage de 0 (éventuellement à l'aide d'un changement de variable)
   (b) on utilise les DL usuels vus en cours à un ordre de grandeur adapté à la question
   (c) on effectue les calculs en évitant les erreurs et en éliminant systématiquement les termes non significatifs ?
2. On peut aussi déterminer des DL à l'aide des théorèmes suivants :
   (a) Théorème de primitivation (ne pas oublier le $F(0)$)
   (b) Théorème de dérivation (après avoir justifié l'existence d'un DL(0,n) de la dérivée)
   (c) Formule de Taylor-Young (après avoir justifié que f est $\mathcal{C}^n$ au voisinage de 0)

	fonction	voisinage	ordre	réponse
1.	$f(x)=\sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}$	0	5	$f(x)=\sqrt{2}+\frac{1}{8}\sqrt{2}x^2-\frac{5}{128}\sqrt{2}x^4+o(x^5)$
2.	$f(x)=\frac{e^{\frac{x}{1+x}}}{(1+x)^2}$	0	3	$f(x)=1-x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$
3.	$f(x)=\arctan\frac{1}{1-x}$	0	3	$f(x)=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{12}x^3+o(x^3)$
4.	$f(x)=\exp\left(\frac{\ln(1+2x)}{1+x}\right)$	0	3	$f(x)=1+2x-2x^2+o(x^3)$
5.	$f(x)=\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right)$	0	3	$f(x)=\ln(x)-\frac{3}{2}x+\frac{17}{24}x^2-\frac{11}{24}x^3+o(x^3)$
6.	$f(x)=\ln(\frac{e^x-1}{x})$	0	5	$f(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{24}x^2-\frac{1}{2880}x^4+o(x^5)$
7.	$f(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{e^x-e^{-x}-2x}$	0	3	$f(x)=-1+\frac{3}{20}x^2+o(x^3)$
8.	$f(x)=\sqrt{\frac{x-\ln(1+x)}{x\sin x}}$	0	2	$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{6}x+\frac{5\sqrt{2}}{36}x^2+o(x^2)$
9.	$f(x)=\mathrm{ch}(\tan x)$	0	5	$f(x)=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+o(x^5)$
10.	$f(x)=\ln(\frac{e^x-1}{x})$	1	1	$f(x)=\ln(e-1)+\frac{1}{e-1}(x-1)+o(x-1)$
11.	$f(x)=\sqrt{\tan x}$	$\frac{\pi}{4}$	3	$f(x)=1+(x-\frac{\pi}{4})+\frac{1}{2}(x-\frac{\pi}{4})^2+\frac{5}{6}(x-\frac{\pi}{4})^3+o((x-\frac{\pi}{4})^3)$
12.	$f(x)=\ln(\frac{e^x-1}{x})$	$+\infty$		$f(x)=x-\ln(x)-\frac{1}{e^x}+o(\frac{1}{e^x})$
13.	$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}\times\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$	$+\infty$	2	$f(x)=-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{x}+\frac{7}{12x^2}+o(\frac{1}{x^2})$
14.	$f(x)=\left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$	$+\infty$	0	$f(x)=\sqrt{6}+o(1)$

2) Autres DL

1. Pour déterminer le DL(0,n) de f^{-1} (lorsque $f(0)=0$), on commence par justifier son existence et on remarque qu'au voisinage de 0, on a $f^{-1}\circ f(x)=x$ pour tout x au voisinage de 0.

Exercice de TD : 1

($**$) Déterminer les DL suivants :

1. DL(0, 10) de : $f(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$
2. DL(0, 1000) de : $f(x)=\ln\displaystyle\sum_{k=0}^{999}\frac{x^k}{k!}$

Exercice de TD : 2

($\heartsuit\heartsuit$) **Développement limité d'une bijection réciproque :**

1. Soit f définie sur $]-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}[$ par $f(x)=2\tan x-x$.
   (a) Montrer que f admet une réciproque impaire et $\mathcal{C}^\infty$
   (b) Justifier l'existence d'un DL(0,6) de f^{-1} et déterminez le !
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0)=0$ et $f(x)=\frac{e^{x^2}-1}{x}$ lorsque $x\neq 0$.
   (a) Montrer que f admet une réciproque impaire et $\mathcal{C}^\infty$
   (b) Justifier l'existence d'un DL(0,6) de f^{-1} et déterminez le !

Exercice de TD : 3

($\heartsuit$) Déterminer les réels a et b pour que $\arcsin x - \frac{x+ax^3}{1+bx^2}$ soit en 0, un infiniment petit d'ordre maximal.

3) Applications des DL

De façon générale, les DL d'une fonction f servent à étudier une fonction au voisinage d'une point.
Ils permettent en particulier de déterminer :

1. un équivalent et donc la limite en ce point
2. la présence éventuelle d'un point d'inflexion
3. la tangente à la courbe et sa position par rapport à celle-ci
4. la présence d'un extremum local

Exercice de TD : 4

($\heartsuit$) Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et f la fonction définie au voisinage de 0 par $f(x) = \frac{\ln(1+ax)}{1+x}$.
Déterminer les valeurs de a pour lesquelles f présente un point d'inflexion en 0.

Exercice de TD : 5

($\heartsuit\heartsuit$) Soit h est une fonction continue de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $h(x) = o(x)$ au voisinage de 0.
Montrer que :

$$\int_x^{2x} h(t)\ \mathrm{d}t = o(x^2) \quad \text{au voisinage de } 0$$

Exercice de TD : 6

($*$) Etude de la chute d'un parachute.
Soit un parachutiste, sautant d'une hauteur h avec une vitesse nulle et soumis à l'accélération de la pesanteur et à une force de frottement opposée à sa vitesse et proportionnelle à celle-ci.

L'équation différentielle vérifiée par son altitude z est : $m\frac{d^2z}{dt^2} = -mg - k.\frac{dz}{dt}$ avec $z(0) = h$ et $\frac{dz}{dt}(0) = 0$

On en déduit que : $z = -\frac{m^2g}{k^2}\exp(-\frac{kt}{m}) - \frac{mg}{k}t + h + \frac{m^2g}{k^2}$

On s'intéresse alors à ce qui se passe lorsque l'argument de l'exponentielle tend vers 0.

1. Donner un DL de z à l'ordre 3 en la variable t.
2. Interpréter le résultat.

Exercice de TD : 7

($\heartsuit$) Etudier la limite en 0 de la fonction définie par :

1. $f(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{e^x - e^{-x} - 2x}$
2. $f(x) = \left(\frac{\ln x - \ln(1+x)}{\ln x}\right)^{\frac{1}{x}}$

Exercice de TD : 8

($\heartsuit\heartsuit$) Soit f la fonction définie par $f(t) = \frac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\frac{t}{2}}$ si $t \in]0,\ \pi]$ et $f(0) = -1$.
Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\ \pi]$.

Exercice de TD : 9

($**$) Soient a et b deux réels strictement supérieurs à 1. Etudier la convergence de $u_n = \left(\frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$.

Exercice de TD : 10

($**$) Soit $f\ :\ ]0,\ 1[\cup]1,\ +\infty[\mapsto \mathbb{R}$ l' application définie par : $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$

1. Montrer que f est convexe sur $]0,\ 1[$ et sur $]1,\ +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $x > 1$ on a : $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{x\ \mathrm{d}t}{t\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leq \int_x^{x^2} \frac{x^2\ \mathrm{d}t}{t\ln t}$.
   En déduire que : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \ln 2$.
   De même, établir que : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \ln 2$.

3. On prolonge f par continuité en 1, en posant $f(1) = \ln 2$.
   Montrer que f ainsi prolongée est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\ +\infty[$.
   Etablir la convexité de f sur $]0,\ +\infty[$.

Exercice de TD : 11

($\heartsuit\heartsuit$) Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles suivantes :

1. $xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}$
2. $\frac{1}{2}t(1+t)y' + (1+t)y = 1$

4) Développements asymptotiques

Un développement asymptotique est un "développement limité généralisé" dans lequel la partie principale n'est pas nécessairement polynômiale. Il permet d'étudier le comportement d'une suite au voisinage de $+\infty$ ou d'une courbe au voisinage d'un point. On les obtient en utilisant les développements limités en 0 usuels en effectuant éventuellement un changement de variables. Ils permettent :

1. de déterminer un équivalent d'une fonction au voisinage d'un point (éventuellement $\pm\infty$) ou d'une suite
2. d'étudier les branches infinies d'une courbe : asymptote éventuelle et position de la courbe par rapport à celle-ci

Exercice de TD : 12

($\heartsuit$) Déterminer un équivalent simple des suites donc le terme général est :

1. $u_n = 2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
2. $v_n = \sqrt[n+1]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

Exercice de TD : 13

($\heartsuit$) Déterminer avec précision (limite, équivalent, asymptote, position par rapport à celle-ci) les représentations graphiques des fonctions suivantes au voisinage de $+\infty$:

1. $f(x) = \sqrt{x^3 \operatorname{sh} \frac{1}{x}}$
2. $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{\cos \frac{1}{x}}}$
3. $f(x) = \sqrt{\sqrt{\operatorname{ch} \frac{1}{x}} - 1}$
4. $f(x) = x(\ln(2x+1) - \ln x)$

Exercice de TD : 14

($*$) Etudier les courbes définies par les fonctions suivantes au voisinage de l'∞ :

1. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)} \times \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$
2. $f(x) = \ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right)$

Exercice de TD : 15

($**$) Montrer qu'il existe deux réels a et b qu'on calculera, tels que, lorsque $n \to +\infty$, on a :

$$\int_0^1 (1+x^2)^{\frac{1}{n}}\ \mathrm{d}x = a + \frac{b}{n} + O(\frac{1}{n^2})$$

Aide : vous pourrez remarquer qu'il existe M tel que $|e^t - 1 - t| \leq Mt^2$ pour $t \in [0,\ 1]$.

Exercice de TD : 16

($***$) Soit $t \in \mathbb{R}^{+*}$.

1. Montrer que l'équation $xe^x = \frac{1}{t}$ admet une unique solution x_t
2. (a) Prouver qu'au voisinage de $+\infty$ on a $x_t \sim \frac{1}{t}$.
   (b) En posant $x_y = \frac{1}{t} + h$ avec $h = o(\frac{1}{t})$, prouver que : $x_t = \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} + \frac{3}{2t^3} + o(\frac{1}{t^3})$

Exercice de TD : 17

($**$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définie la fonction f_n sur $[0,\ \frac{\pi}{2}]$ par $f_n(x) = n\cos^n x \sin x$.

1. Montrer que f_n admet un maximum $A_n(x_n,\ y_n)$.
2. Donner des équivalents des termes x_n et y_n.